1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 12 novembre 2012 (30 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………..…………….. **Note : … / 40 = … / 20**

I. (16 points) On considère l'équation $x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (m désigne un réel fixé).

1°) Le but de cette question est de résoudre l'équation pour $m = 0$, $m = 3$ et $m = -2$.
Un modèle de rédaction est donné pour chaque équation.

• Résolution de (E) pour *m* = 0.

Pour $m = 0$, l'équation (E) s'écrit : ……………………………………………………… .

(E) est successivement équivalente à :

……………………………………………………….

……………………………………………………….

Les solutions de (E) sont ………………………………….. .

• Résolution de (E) pour *m* = 3.

Pour $m = 3$, l'équation (E) s'écrit : ……………………………………………………… .

(E) est successivement équivalente à :

……………………………………………………….

……………………………………………………….

Les solutions de (E) sont ………………………………….. .

• Résolution de (E) pour *m* = – 2.

Pour $m = -2$, l'équation (E) s'écrit : ……………………………………………………… .

(E) est successivement équivalente à

……………………………………………………….

……………………………………………………….

Les solutions de (E) sont ………………………………….. .

2°) Le but de cette question est de déterminer m pour que -1 soit une solution de l'équation (E).
Compléter les lignes ci-dessous.

-1 est solution de (E) si et seulement si ……………………………………………………….

si et seulement si ……………………………………………………….

si et seulement si ……………………………………………………….

si et seulement si ……………………………………………………….

3°) **Bonus (à faire sur une feuille à part une fois que tout le reste a été traité)**

Démontrer que l'équation (E) admet toujours deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

II. (4 points) On considère le polynôme $P(x) = 3x^2 + x - 4$.

1°) Compléter sans explication la phrase suivante :

Les racines de $P(x)$ sont ……………………………………………………… .

2°) Donner sans explication une factorisation de $P(x)$ en facteurs du premier degré.

$P(x) =$ ………………………………………………………..

III. (2 points) On note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = x^2 - 2x\sqrt{2} + 3$ dans le plan muni d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Compléter sans explication la phrase :

Le sommet S de $\mathcal{C}$ a pour coordonnées $(\ldots\ldots ; \ldots\ldots)$.

IV. (10 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+3}{2-x-x^2} > 0$ (1).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

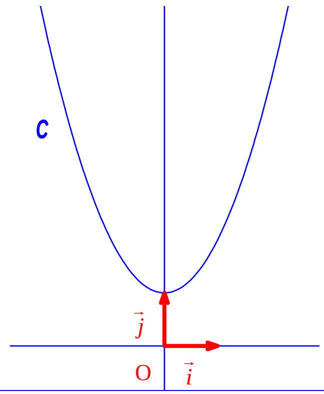
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (2 points)

Sur le graphique ci-contre, on donne la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = x^2 + 1$ dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Hachurer l'ensemble *E* des points M du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient l'inégalité $y \geqslant x^2 + 1$.



VI. (6 points) Algorithmique

On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une ou plusieurs réponses sont exactes.
Compléter sans justifier la colonne de droite du tableau ci-dessous avec les lettres (a, b ou c) correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte un point.
Chaque réponse fausse enlève un point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.
Écrire très lisiblement et sans rature.

Entrée :
Saisir *n* (entier naturel)

Traitement :
Si *n* < 10, alors
  a prend la valeur 5*n*
Sinon
  a prend la valeur 5*n* – 10
FinSi

Sortie :
Afficher *a*

1°) Le nombre obtenu avec l'entrée 5 est :			
a. 25	b. 15	c. – 25	
2°) Le nombre obtenu avec l'entrée 12 est :			
a. 60	b. 50	c. – 60	
3°) Si on veut obtenir 45, on peut entrer :			
a. 9	b. 11	c. 13	
4°) Si on veut obtenir 50, on peut entrer :			
a. 10	b. 12	c. 50	

Corrigé

I. $x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (m : réel fixé)

1°)

• **Résolution de (E) pour $m = 0$.**

Pour $m = 0$, l'équation (E) s'écrit : $x^2 - 3 = 0$.

(E) est successivement équivalente à :

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

Les solutions de (E) sont $\sqrt{3}$ **et** $-\sqrt{3}$.

• **Résolution de (E) pour $m = 3$.**

Pour $m = 3$, l'équation (E) s'écrit : $x^2 - 6x = 0$.

(E) est successivement équivalente à :

$x(x - 6) = 0$

$x = 0$ **ou** $x = 6$

Les solutions de (E) sont **0 et 6**.

• **Résolution de (E) pour $m = -2$.**

Pour $m = -2$, l'équation (E) s'écrit : $x^2 + 4x - 5 = 0$.

(E) est successivement équivalente à

$x = 1$ **(racine évidente) ou** $x = -5$ **(obtenue par produit)**

Les solutions de (E) sont **1 et – 5**.

2°) **Déterminons m pour que – 1 soit une solution de l'équation (E).**

– 1 est solution de (E) si et seulement si $(-1)^2 - 2m \times (-1) + m - 3 = 0$

si et seulement si $3m - 2 = 0$

si et seulement si $m = \frac{2}{3}$

3°) **Bonus :**

Démontrons que l'équation (E) admet toujours deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ (E)

Le discriminant réduit de (E) est égal à :

$$\Delta' = m^2 - (m - 3)$$
$$= m^2 - m + 3$$

Considérons le polynôme $m^2 - m + 3$ (polynôme du second degré en m).

Le discriminant de ce polynôme est $1 - 4 \times 3 = -11$.
Ce polynôme est donc de signe constant : celui du signe du coefficient du terme de degré 2 c'est-à-dire strictement positif.

Donc $\Delta' > 0$.

Par suite, **l'équation (E) admet toujours deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.**

II. $P(x) = 3x^2 + x - 4$

1°) Les racines de $P(x)$ sont **1 (racine évidente) et $-\frac{4}{3}$ (obtenue par produit)**.

2°) $P(x) = 3\left(x + \frac{4}{3}\right)(x - 1)$ ou $P(x) = (3x + 4)(x - 1)$

III. $\mathcal{C}$: $y = x^2 - 2x\sqrt{2} + 3$

Le sommet S de $\mathcal{C}$ a pour coordonnées $(\sqrt{2}\,;1)$ (utilisation du cours sur la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré).

IV. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+3}{2-x-x^2}>0$ (1).

Considérons le polynôme $-x^2-x+2$.

1 et – 2 sont racines de ce polynôme (utilisation de la racine évidente 1 et du produit des deux racines).

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0^{num}	$+$	$\vert$	$+$		$+$	
$-x^2-x+2$		$-$	$\vert$	$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$	$0^{\text{déno}}$	$-$	
$\dfrac{x+3}{-x^2-x+2}$		$+$	0^{num}	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

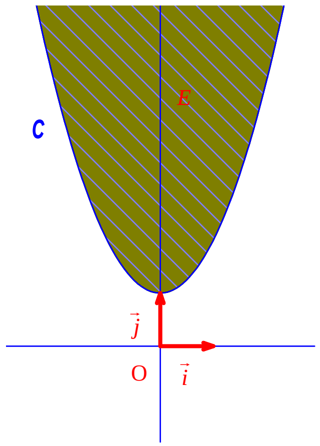
L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S=\left]-\infty\ ;\ -3\right[\cup\left]-2\ ;\ 1\right[$.

V.

$\mathcal{C}$: $y=x^2+1$

Hachurons l'ensemble E des points M du plan dont les coordonnées $(x\ ;y)$ vérifient l'inégalité $y\geqslant x^2+1$.

L'ensemble E est l'ensemble des points situés au-dessus ou sur la courbe $\mathcal{C}$.
L'ensemble E est donc le domaine hachuré sur la figure ci-dessous (frontière comprise).



On peut noter que l'on peut obtenir ce type de graphique sur la calculatrice (sélectionner le style de la courbe).

VI. Algorithmique

Entrée :
Saisir n (entier naturel)

Traitement :
Si n < 10, alors
  a prend la valeur $5n$
 Sinon
  a prend la valeur $5n - 10$
FinSi

Sortie :
Afficher a

1°) Le nombre obtenu avec l'entrée 5 est :
a. 25   b. 15   c. – 25

2°) Le nombre obtenu avec l'entrée 12 est :
a. 60   b. 50   c. – 60

3°) Si on veut obtenir 45, on peut entrer :
a. 9   b. 11   c. 13

4°) Si on veut obtenir 50, on peut entrer :
a. 10   b. 12   c. 50

a
b
a* et *b
b

Pour les questions 3°) et 4°), on devait essayer tous les nombres proposés pour voir que l'on n'oubliait pas des possibilités.
La réponse du 4°) est évidente compte-tenu de la question 2°) !