TS1

Devoir pour le lundi 12 novembre 2012

I. 1°) Déterminer trois entiers naturels x_1, x_2, x_3 deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=1$.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on peut trouver n nombres entiers x_1, x_2, …, x_n strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1$.

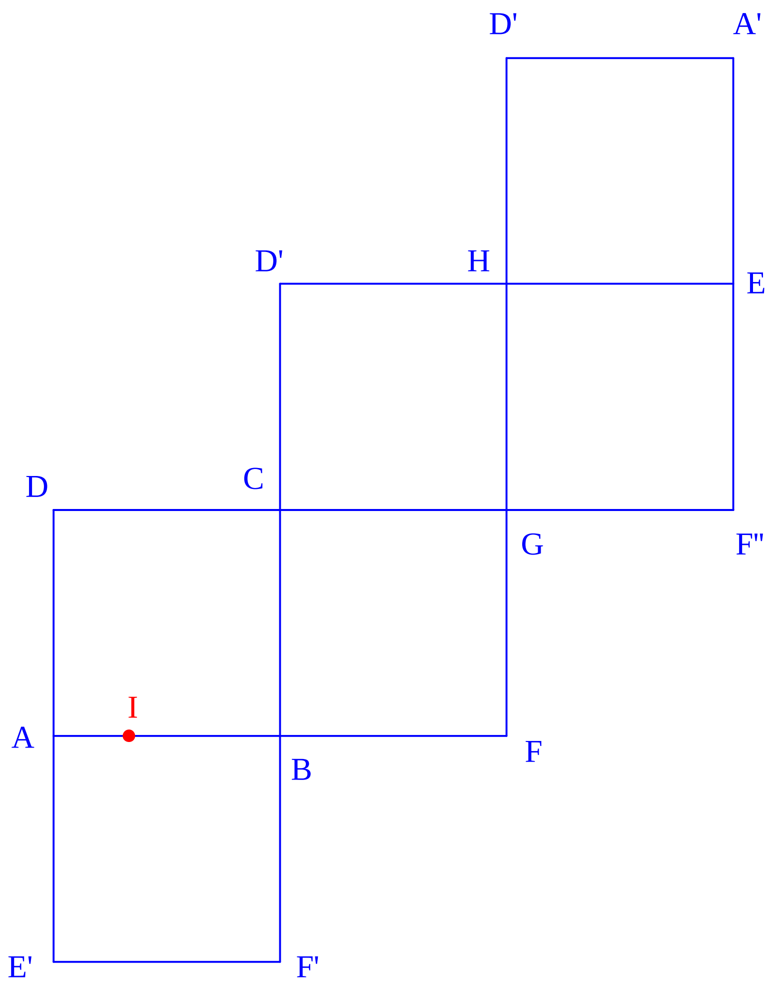
II. Soit ABCDEFGH un cube d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

1°) Déterminer la position relative des plans (BEG) et (ACH). <u>Citer le théorème utilisé</u>.

2°) Soit I un point quelconque de]AB[. On note P le plan passant par I et parallèle au plan (BEG).

Déterminer la position relative des plans P et (ACH). <u>Citer le théorème utilisé</u>.

3°) Tracer la section IJKLMN du cube par le plan P (J $\in$]AE[ ).
Reproduire le patron du cube ci-après et tracer en rouge les côtés de la section ; en déduire que le périmètre de cette section ne dépend pas de la position du point I sur]AB[et exprimer sa valeur en fonction de a.



Corrigé du DM pour le 12-11-2012

I.

1°) **Déterminons trois entiers naturels x_1, x_2, x_3 deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=1$.**

Posons $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=6$.

On peut s'appuyer sur une représentation géométrique (disque que l'on partage en 3 secteurs circulaires coloriés de différentes couleurs), comme me l'a fait un élève (Jean-Baptiste Pajot).

On vérifie sans peine que l'on a : $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=1$.

Il est bien évident que l'on peut aussi effectuer une permutation de x_1, x_2, x_3.

On pourrait d'ailleurs se demander s'il y a unicité de ce triplet (à une permutation près).

2°) **Démontrons que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on peut trouver n nombres entiers x_1, x_2, , …, x_n strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1$.**

Pour n entier naturel tel que $n \geqslant 3$, on définit la phrase $P(n)$: « Il existe n nombres entiers x_1, x_2, …, x_n strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1$. ».

Initialisation : La phrase $P(3)$ est vraie d'après la question 1°).

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire qu'il existe k nombres entiers x_1, x_2, …, x_k strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_k}=1$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire qu'il existe $k+1$ nombres entiers x_1', x_2', …, x_{k+1}' strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1'}+\frac{1}{x_2'}+...+\frac{1}{x_{k+1}'}=1$.

On sait d'après l'hypothèse de récurrence qu'il existe k nombres entiers x_1, x_2, …, x_k strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_k}=1$.

Donc $\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_2}+...+\frac{1}{2x_k}=\frac{1}{2}$.

Posons $x_1'=2$, $x_2'=2x_1$, $x_3'=2x_2$, …, $x_{k+1}'=2x_k$.

On vérifie aisément que x_1', x_2', …, x_{k+1}' sont strictement supérieurs à 1, deux à deux distincts et qu'ils satisfont l'égalité $\frac{1}{x_1'}+\frac{1}{x_2'}+...+\frac{1}{x_{k+1}'}=1$.

On en déduit que $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :
On a démontré que $P(3)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geqslant 3$, alors $P(k+1)$ est vraie. Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

Autre façon : on donne une expression explicité des réels (méthode constructive).

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^1}\ ;\ \frac{1}{2^2}\ ;\ \dots\ ;\ \frac{1}{2^{n-2}}}_{n-2 \text{ termes}}\ ;\ \underbrace{\frac{1}{3\times 2^{n-3}}\ ;\ \frac{1}{3\times 2^{n-2}}}_{2 \text{ termes à part}}$$

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3\times 2^{n-3}}+\frac{1}{3\times 2^{n-2}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3\times 2^{n-3}}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{\cancel{3}\times 2^{n-3}}\times\frac{\cancel{3}}{2}$$

$$=1-\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$=1-\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$=1-\cancel{\frac{1}{2^{n-2}}}+\cancel{\frac{1}{2^{n-2}}}$$

$$=1$$

Un petit problème technique intéressant qui a bloqué beaucoup d'élèves.

Comment traduire que des réels x_1, x_2, …, x_n sont deux à deux distincts ?

On doit écrire $\forall (i,\, j) \in \{1\,;\,2\,;\ldots;\,n\} \quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.

En revanche, on ne peut écrire : $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_n$.

Copie d'Alexandre Karneff

2°)

D'après le 1°), on peut conjecturer que x_n est un nombre parfait. Or un nombre A parfait s'écrit $\text{A} = 2^k n$ avec n premier et $n = 2^{k+1} - 1$.

On peut également conjecturer que x_1, x_2 … x_n sont les diviseurs naturels de x_n strictement supérieurs à 1 : $\text{A} = 2^k n$.

Listons les diviseurs de A strictement supérieurs à 1 :
$2\,;\,2^2\,;\,2^3\,;\ldots;\,2^k\,;\,n\,;\,2n\,;\,2^2 n\,;\ldots;\,2^k n$.

Listons maintenant l'inverse de ces diviseurs :
$\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2^2}\,;\,\frac{1}{2^3}\,;\ldots;\,\frac{1}{2^k}\,;\,\frac{1}{n}\,;\,\frac{1}{2n}\,;\,\frac{1}{2^2 n}\,;\ldots;\,\frac{1}{2^k n}$.

Calculons maintenant la somme de l'inverse des diviseurs strictement supérieurs à 1 :

$$S = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{2^k}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}$$

$$S = \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{n}$$

On peut isoler les solutions et les vérifier par la suite :

$$x_1 = n\ ;\ x_2 = \frac{n}{1+n}2^2 \text{ et } x_n = \frac{n}{1+n}2^k$$

Vérifions ces résultats :

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n} = \frac{1+n}{2^k n}\underbrace{\left(2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+1\right)}_{2^k-1}+\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{n}+\frac{1+n}{2^k n}\left(2^k-1\right)$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{2^{k+1}}{2^k n}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\left(2^k-1\right)$$

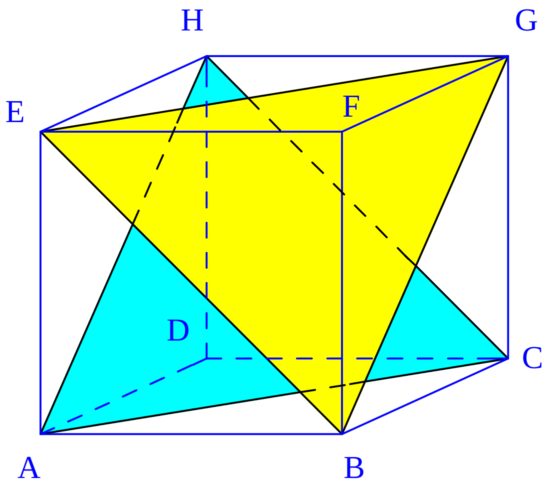
$$=\frac{1}{n}\left(1+2^{k+1}-2\right)$$

$$=\frac{2^{k+1}-1}{n}$$

$$=1$$

Ainsi, on peut bien trouver *n* nombres entiers x_1, x_2, …, x_n strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1$.
Cependant, on ne sait pas s'il en existe d'autres.

II. ABCDEFGH : cube d'arête *a*



On pouvait colorier les plans (BEG) et (ACH) sur la figure.

1°) **Déterminons la position relative des plans (BEG) et (ACH).**

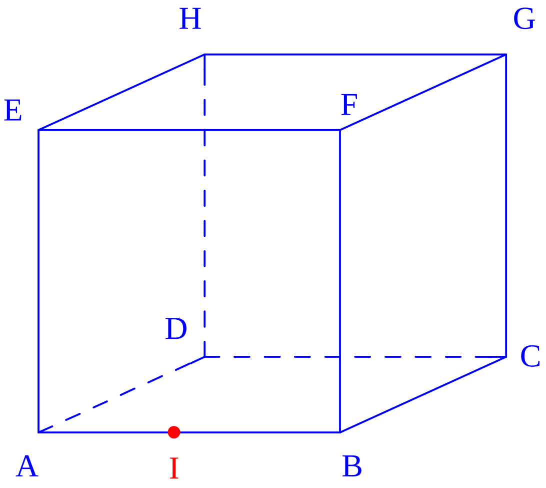
On a : (EB) // (CH) et (BG) // (AH).

Or, si deux droites d'un plan sont parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, alors ces plans sont parallèles.

On en déduit que (BEG) // (ACH).

2°)
I : point quelconque de]AB[

P : plan passant par I et parallèle au plan (BEG)



Déterminons la position relative des plans *P* et (ACH).

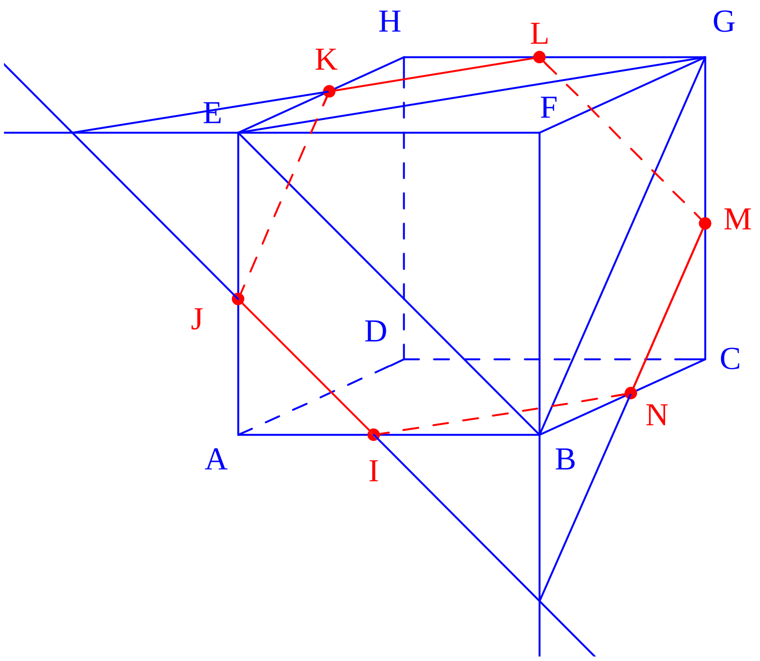
On sait que *P* // (BEG) d'après les hypothèses et (BEG) // (ACH) d'après la question 1°).
Or si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ces deux plans sont parallèles.
On en déduit que (BEG) // (ACH).

3°)

• Traçons la section IJKLMN du cube par le plan *P*.

On utilise essentiellement la méthode de parallélisme.

On peut cependant faire une méthode mixte (parallélise et tracé hors solide) comme le montre la figure ci-dessous.



On peut démontrer aisément que BI = BN , EJ = EK , GL = GM et que de plus, toutes ces longueurs sont égales.

On peut éventuellement marquer les codages correspondants sur la figure.

• Traçons les côtés de la section sur le patron du cube.

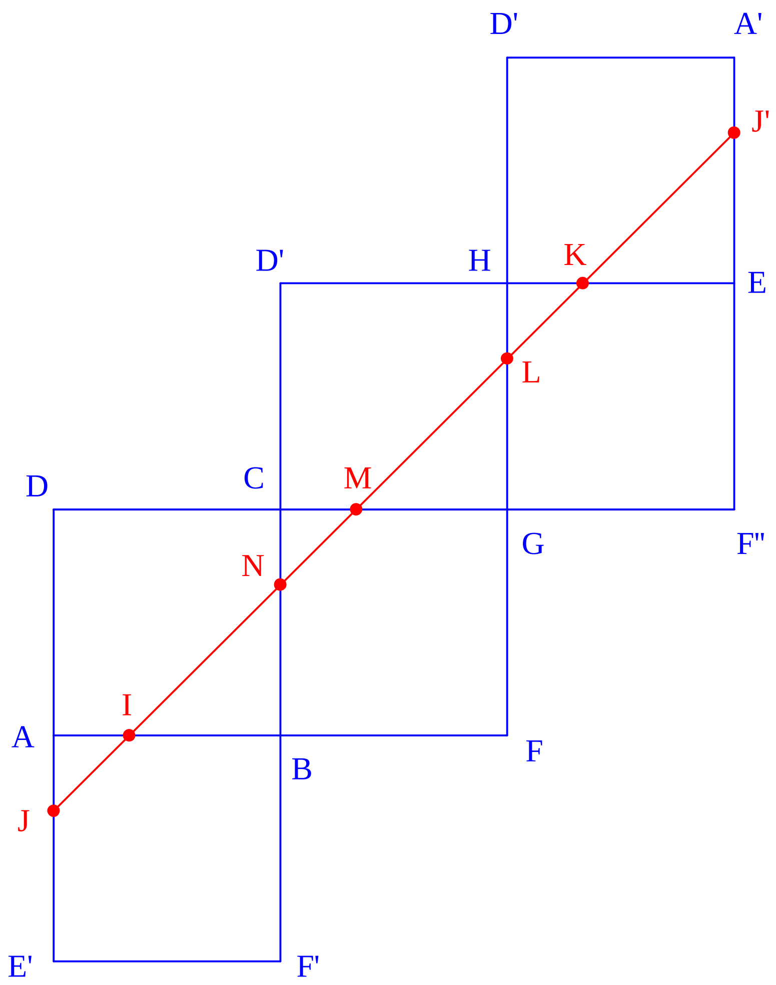
La section du cube par le plan *P* est tracée en rouge.

On a (IJ) // (BE') et $J \in]AE[$.

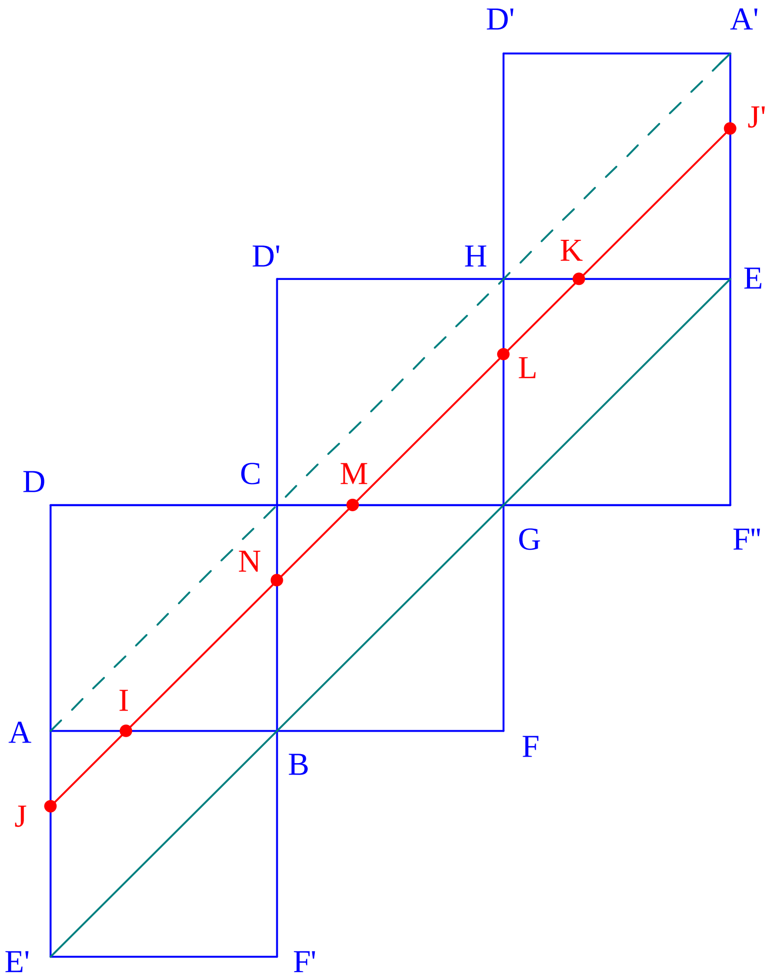
On a (IN) // (AC) et $N \in]BC[$.

On a (NM) // (BG) et $M \in]CG[$.

Et ainsi de suite…



Le « trait de section » est représenté en rouge sur la figure.



Ainsi, les points définissant la section sont tous alignés sur une même droite.
On joint les points à l'aide de la règle (et non à main levée).

Le quadrilatère EE′JJ′ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

On en déduit que $\mathrm{JJ'} = \mathrm{EE'}$.

Or $\mathrm{EE'} = \mathrm{EG} + \mathrm{GB} + \mathrm{BE'} = a\sqrt{2} + a\sqrt{2} + a\sqrt{2} = 3a\sqrt{2}$.

Rappel : La diagonale d'un carré de côté a a pour longueur $a\sqrt{2}$.

On en déduit que le périmètre de la section du cube par le plan P a un périmètre constant égal à $3a\sqrt{2}$.

Le périmètre ne dépend pas de la position de I sur]AB[.

Autre méthode :

Par le calcul, en posant $\mathrm{AI} = x$.

Méthode plus longue, moins élégante... donc à éviter.

Pour avoir une idée du résultat très intéressant que l'on établit dans cet exercice on aurait pu utiliser un logiciel de géométrie dynamique dans l'espace.