TS

Fonction exponentielle (1)

Plan du chapitre :

Le 13-3-2020

$1^{\text{ère}}$ spé Premier cours sur la fonction exponentielle

Romain Quiniou

Lorsque l'on a un + entre les exp, on ne peut rien faire.

$\exp a + \exp b$

Lien avec le logarithme vu en sciences physiques Niveau d'intensité sonore et pH.
Fonction exponentielle utilisée pour la construction de la Tour Eiffel.
On parle de croissance ou décroissance exponentielle.
Émile Thévenin élève de $1^{\text{ère}}$ 6 spécialité m'a envoyé le lien suivant en lien avec l'épidémie de coronavirus.
« Exponential growth and epidemics » Youtube

Le 3 septembre 2021

La fonction ln a été découverte en premier à la fin du XVI$^{\text{e}}$ – début du XVII$^{\text{e}}$ siècle.
La fonction exponentielle date du XVIII$^{\text{e}}$ siècle.
On ne respecte donc pas l'ordre historique.

Le 3 septembre 2021

Exponentielle (1)
transcendante comme cos, sin, tan

Numworks touche e^x

e^3 transcendant (chercher le terme)

calcul qu'il y a derrière ? comment on fait pour le calculer ?

point pour effectuer le calcul, la calculatrice utilise l'algorithme Cordic (chercher sur Wikipedia)
point Avant les calculatrice, tables .
est-ce qu'il y a une formule ? non

$\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{x^k}{k!}$ peu exploitable

I. Construction de l'exponentielle

1°) Introduction

On démontre en physique dans l'étude de la radioactivité (abordée en 1ère) que si $\mathrm{N}(t)$ désigne le nombre de noyaux désintégrés à l'instant *t*, on a : $\mathrm{N}'(t) = -\lambda \mathrm{N}(t)$ où λ désigne une constante qui dépend de l'élément radioactif considéré.
Une telle relation qui relie une fonction et sa dérivée s'appelle une équation différentielle.

On peut exprimer $\mathrm{N}(t)$ en fonction de *t* sous la forme $\mathrm{N}(t) = \mathrm{N}(0) \times \exp(-\lambda t)$ où exp désigne une fonction appelée « fonction exponentielle ».

De nombreuses autres situations de physique (par exemple l'étude de la pression atmosphérique) conduisent à des équations différentielles de la même forme $f'(t) = kf(t)$ et donc nécessitent l'utilisation de la fonction exponentielle.

2°) Propriété

Il existe une et une seule fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

3°) Démonstration

• Nous admettrons que si *f* est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors *f* ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ce résultat sera démontré dans le paragraphe **VIII.** à la fin du chapitre.

• L'existence est admise sans démonstration conformément au programme.

• L'unicité sera démontrée dans le paragraphe **VIII.** à la fin du chapitre. On démontre dans ce même paragraphe que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

4°) Définition

L'unique fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée « fonction exponentielle » et est notée « exp ».

On notera que d'après cette définition :

• la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ (autrement dit on admet que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$) et $\exp' = \exp$;

• $\exp(0) = 1$ (on lit « l'image de 0 par la fonction exponentielle est égale à 1 » ou « l'exponentielle de 0 est égale à 1 »).

5°) Utilisation de la calculatrice

Nous admettrons que la fonction exponentielle ne peut s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles (c'est ce que l'on appelle une « fonction transcendante », comme les fonctions cosinus, sinus et tangente).
On ne peut pas calculer « à la main » l'image par la fonction exponentielle d'un réel autre que 0.
Aussi devons-nous avoir recours à la calculatrice pour calculer l'image d'un réel autre que 0.

Par exemple, pour « calculer » exp(3), on devra procéder ainsi :

• calculatrice Numworks touche $\boxed{\mathrm{e}^x}$

• calculatrice TI : on doit taper $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{ln}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{entrer}}$

On obtient l'affichage $\mathrm{e}\wedge(3$ ou e^3.

La notation e^3 ou $\mathrm{e}\wedge(3$ se réfère à une notation que nous verrons dans la suite du cours.

• calculatrice Casio : on doit taper $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{ln}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$

La touche $\boxed{\text{ln}}$ se réfère à une fonction qui sera étudiée plus tard appelée « fonction logarithme népérien » et qui sera définie à partir de l'exponentielle. En effet, pendant très longtemps, on commençait par étudier la fonction logarithme népérien et c'est seulement après que l'on définissait la fonction exponentielle à partir de la fonction logarithme népérien.

On obtient l'affichage 20.08553692. On peut donc écrire $\exp(3) = 20{,}0855369\ldots$.
Il s'agit d'un nombre irrationnel (résultat que l'on peut démontrer mais que nous admettrons) c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme quotient de deux entiers. En particulier, il admet un développement décimal illimité sans aucune période.
On peut même démontrer que c'est un nombre transcendant c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers relatifs.

La calculatrice utilise la notation en exposant, e^3, qui sera vue plus loin.

On obtient ainsi une valeur approchée de exp(3).
Il faut noter que certaines calculatrices plus récentes – et conformes au nouveau programme – ont une touche « exponentielle » (le logarithme népérien s'obtient en faisant $\boxed{\text{2nde}}$ puis en appuyant sur la touche « exponentielle »).

Remarque : Le lundi 4-11-2019
La fonction exponentielle croît très vite (voir représentation graphique et limites qui seront vues dans le chapitre « exponentielle (2) »). On parle d'ailleurs de « croissance exponentielle dans le cas de croissances très rapides lors de modélisation de phénomènes d'évolution discrets ou continus.
La valeur maximale de la fonction exponentielle calculable par la calculatrice est $\exp(230)$.
La calculatrice donne $\mathrm{e}^{230} \approx 7{,}7220185\ldots \times 10^{99}$.

II. Relation fonctionnelle

1°) Propriété fondamentale

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

On dit que :

• l'exponentielle d'une somme est égale au produit des exponentielles ;

• la fonction exponentielle transforme une somme en produit.

2°) Démonstration

On fixe un réel y.

On pose $\varphi(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.

On a démontré dans le paragraphe **VIII** que le résultat d'une exponentielle est toujours non nul.

La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \exp(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée est la fonction $x \mapsto 1 \times \exp(x+y) = \exp(x+y)$ (formule du cours sur dérivée de « $u(ax+b)$ ».

φ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, exp ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

Donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = \frac{\exp(x) \times \exp(x+y) - \exp(x) \times \exp(x+y)}{(\exp(x))^2}$$

$$= 0$$

Donc φ est constante sur $\mathbb{R}$.

Il existe donc un réel k tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = k$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x+y) = k\exp(x)$.

On choisit $x = 0$.

On obtient : $\exp(y) = k\exp(0) = k \times 1 = k$.

D'où la propriété.

3°) Conséquences

• **exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.**

• $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) > 0$

Démonstration

• **exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.**

Ce point a déjà été démontré dans le paragraphe **VIII**.

• **exp est à valeurs strictement positives.**

exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle continue sur $\mathbb{R}$.

$\exp(0) = 1$ et exp s'annule pas.

Donc il est impossible de trouver un réel x tel que $\exp(x) \leqslant 0$.

exp étant positive en 0, exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (grâce à la continuité).

III. Propriétés algébriques de l'exponentielle

1°) Propriété 1 (fondamentale)

• Énoncé

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

• Démonstration faite dans le paragraphe II.

• Généralisation

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \exp(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \ldots \times \exp(x_n)$$

Cette formule peut se démontrer en utilisant une récurrence évidente.

On peut écrire cette formule en utilisant les symboles mathématiques de somme et de produit sous la forme suivante :

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right) = \prod_{i=1}^{i=n} \exp(x_i) \quad \text{(le symbole } \Pi \text{ désigne le produit).}$$

2°) Propriété 2

• Énoncé

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

• Démonstration

On applique la relation fondamentale avec $y = -x$.

On obtient l'égalité $\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(0) = 1$.

D'où : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

3°) Propriété 3

• Énoncé

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

• Démonstration

On applique la relation fondamentale avec x et $-y$.

On obtient l'égalité $\exp(x-y) = \exp(x) \times \exp(-y)$.

On applique la propriété précédente pour écrire $\exp(x-y) = \exp(x) \times \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

4°) Propriété 4

• Énoncé

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad [\exp(x)]^n = \exp(nx)$$

• Démonstration

1^er^ cas : $n > 0$

$$\begin{aligned}[\exp(x)]^n &= \underbrace{\exp x \times \exp x \times \ldots \times \exp x}_{n \text{ facteurs}} \\ &= \exp(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ termes}}) \\ &= \exp(nx)\end{aligned}$$

2^e^ cas : $n = 0$

$$\begin{aligned}[\exp(x)]^0 &= 1 \qquad \text{(convention)} \\ &= \exp(0x)\end{aligned}$$

3^e^ cas : $n < 0$

On pose : $n' = -n$.

$$\begin{aligned}[\exp(x)]^n &= [\exp(x)]^{-n'} \\ &= \left[(\exp(x))^{n'}\right]^{-1} \\ &= [\exp(n'x)]^{-1} \qquad \text{1}^{\text{er}} \text{ cas} \\ &= \frac{1}{\exp(n'x)} \\ &= \exp(-n'x) \\ &= \exp(nx)\end{aligned}$$

5°) Propriété 5

• Énoncé

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{\exp(x)} = \exp\left(\frac{x}{2}\right)$$

• Démonstration

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)\\ &= \exp\left(\frac{x}{2}\right)\times\exp\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{propriété fondamentale}\\ &= \left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\end{aligned}$$

Donc $\sqrt{\exp x} = \sqrt{\left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}$

$= \exp\frac{x}{2}$ car $\exp\frac{x}{2} > 0$

• Rappel

On sait que $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. Par conséquent, la formule qui vient d'être démontrée généralise la formule $\left(\exp(x)\right)^n = \exp(nx)$.

• Généralisation aux racines *n*-ièmes

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant 2 \quad \sqrt[n]{\exp(x)} = \exp\left(\frac{x}{n}\right)$$

On sait que $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

5°) Formulaire récapitulatif

$$\exp(x+y) = \exp(x)\times\exp(y)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\left[\exp(x)\right]^n = \exp(nx)$$

$$\sqrt{\exp(x)} = \exp\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sqrt[n]{\exp(x)} = \exp\left(\frac{x}{n}\right)$$

Cas d'une expression de la forme $\exp(x)+\exp(y)$ ou $\exp(x)-\exp(y)$:
Lorsque l'on a un + ou un – entre les deux, on ne peut rien faire.

IV. Sens de variation de la fonction exponentielle

$\exp : x \mapsto \exp x$

1°) Propriété

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp x > 0$

Or $\exp' = \exp$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) > 0$.

On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On peut dresser le tableau de variation de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $\exp'(x)$	$+$
Variations de exp	$\nearrow$

2°) Conséquences

***a* et *b* sont deux réels quelconques.**

$$\exp a < \exp b \Leftrightarrow a < b$$

$$\exp a = \exp b \Leftrightarrow a = b$$

3°) Application aux équations et aux inéquations

• Exemple 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\exp(2x+1) = \exp 3 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 2x+1 = 3\\ &\Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \{1\}$.

• Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\exp(3x-1) > \exp(2x+3) \quad (2)$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow 3x-1 > 2x+3\\ &\Leftrightarrow x > 4\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de (2) est $\boxed{S_2 =]4\,;+\infty[}$.

4°) Études des signes d'expressions avec des exponentielles

● **Exemple 1 :** Étudier le signe de $\exp(x)-1$ suivant les valeurs de *x*.

Méthode : Pour étudier le signe de cette expression, on résout deux inéquations et une équation.

$\exp(x)-1>0 \quad (1)$	$\exp(x)-1<0 \quad (2)$	$\exp(x)-1=0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow \exp(x)>1$ $\Leftrightarrow x>0$	$(2) \Leftrightarrow \exp(x)<1$ $\Leftrightarrow x<0$	$(3) \Leftrightarrow \exp(x)=1$ $\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\exp(x)-1$		$-$	0	$+$	

On peut vérifier le résultat grâce à la calculatrice en traçant la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \exp(x)-1$.

● **Exemple 2 :** Étudier le signe de $\exp(x)+1$ suivant les valeurs de *x*.

$\exp x$ est toujours positif donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x)+1>0$.

V. Notation définitive

1°) Nombre de Néper

On pose $\mathbf{e}=\exp(1)$.

Grâce à la calculatrice, on trouve $\mathrm{e}=2,718\,281\,828\ldots$.

e est un nombre qui n'a ni écriture décimale finie ni écriture fractionnaire.
C'est un nombre irrationnel. C'est même un nombre transcendant c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers relatifs.
On le désigne comme π par une lettre.
Cette notation e est due au mathématicien suisse Leonhard Euler (1731).

2°) Propriété

D'après la propriété 4 sur les exposants, $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exp(n)=(\exp(1))^n$.

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exp(n)=\mathrm{e}^n$$

3°) Généralisation

On généralise à $x \in \mathbb{R}$ en posant $\exp(x)=\mathrm{e}^x$.

On lit « exponentielle *x* » ou « e exposant *x* ».

C'est désormais cette notation qui sera préférentiellement employée.

4°) Valeurs particulières

$$\mathrm{e}^0=1$$
$$\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$$

5°) Réécriture de quelques propriétés avec cette notation

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x>0$$

6°) Réécriture des propriétés algébriques de l'exponentielle

$$\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$$
$$\frac{1}{\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^{-x}$$
$$\mathrm{e}^{x-y}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$$
$$(\mathrm{e}^x)^n=\mathrm{e}^{nx}$$
$$\sqrt{\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

Comme les propriétés de l'exponentielle sont analogues à celles de puissances, la notation e^x s'avère particulièrement pratique pour les calculs.

VI. Représentation graphique de la fonction exponentielle

$\exp : x \mapsto \exp x$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

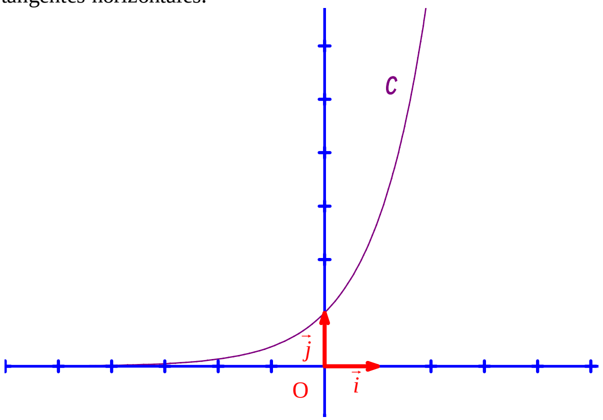
1°) Tableau de valeurs (avec la calculatrice)

x	– 10	– 1	0	1	2	3	4
exp x (valeurs arrondies au dixième)	0,0	0,4	1	2,7	7,4	20,1	54,6

$\mathrm{e}^{-10} = 0{,}0004539...$; $\mathrm{e}^{-1} = 0{,}367...$; $\mathrm{e}^{0} = 1$; $\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$; $\mathrm{e}^{2} = 7{,}389...$; $\mathrm{e}^{3} = 20{,}0855...$; $\mathrm{e}^{3} = 54{,}598...$

2°) Tracé

La courbe $\mathcal{C}$ est en un seul morceau.
Elle ne possède pas de tangentes horizontales.



La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc la courbe est tracée sans lever le crayon.

3°) Branches infinies

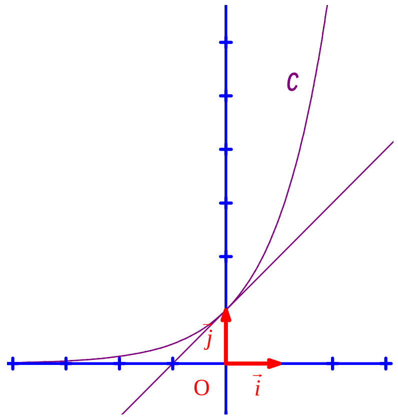
L'étude des branches infinies sera vue plus tard avec les limites.
Néanmoins, on peut déjà observer que la courbe de la fonction exponentielle se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses en $-\infty$ sans jamais le toucher.
On dit que la courbe de la fonction exponentielle admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$.

4°) Tangentes particulières

• au point d'abscisse 0

$\exp'(0) = \exp(0) = \mathrm{e}^{0} = 1$

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1(x-0)+1$ soit $y = x+1$.

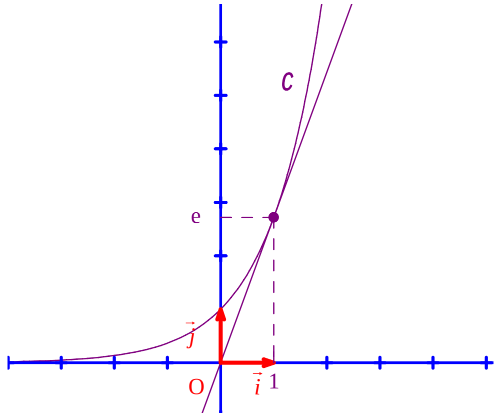


• au point d'abscisse 1

$\exp'(1) = \exp(1) = \mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \mathrm{e}(x-1)+\mathrm{e}$ soit $y = \mathrm{e}x$.

Cette tangente passe par l'origine du repère d'où le tracé.



Les deux tangentes précédentes sont importantes.
Elles permettent un meilleur tracé de la courbe de la fonction exponentielle à main levée à l'aide des points d'abscisses 0 et 1 (tracé de la courbe à deux points).

VII. Logarithme népérien

1°) Démonstration

On rappelle le tableau de variations de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de exp	0 limite	$\nearrow$	$+\infty$ limite

Nous verrons plus tard les limites suivantes que l'on peut déjà aisément comprendre :

$\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ (la courbe de la fonction exponentielle admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$)

Une généralisation du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires qui sera vue plus tard permet d'affirmer que pour tout réel a strictement positif il existe un unique réel x tel que $\exp(x) = a$, ce qui s'écrit en langage mathématique quantifié :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists! x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \exp(x) = a.$$

On peut écrire la dernière égalité $\mathrm{e}^x = a$.

Autrement dit, tout réel $a > 0$ admet un unique antécédent par la fonction exp, ce que l'on visualise facilement dans le tableau de variation.

x	$-\infty$	x	$+\infty$
Variation de exp	0	a	$+\infty$

On peut aussi le voir sur la courbe exponentielle.

2°) Définition et notation [logarithme népérien d'un réel strictement positif]

> Pour tout réel $a > 0$, l'unique réel x tel que $\exp(x) = a$ est appelé **« logarithme népérien » de *a*** et est noté **ln *a***.

Par définition, on a $\exp(\ln a) = a$ ou encore $\mathrm{e}^{\ln a} = a$.

> On retiendra la propriété fondamentale : $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathrm{e}^{\ln a} = a$.

3°) Exemples

$\exp(1) = \mathrm{e}$ donc $\mathbf{\ln e = 1}$.

$\exp(0) = 1$ donc $\mathbf{\ln 1 = 0}$.

Ces deux valeurs sont à connaître par cœur.

Pour d'autres nombres, on utilise la calculatrice (touche spéciale).

Sur la calculatrice TI 83 : touche $\boxed{\text{ln}}$.

Sur la calculatrice TI 82 : touche $\boxed{\textit{ln}}$.

Sur la calculatrice Casio Graph 35+ : touche $\boxed{\text{ln}}$.

Par exemple, $\ln 2 = 0{,}693147180\ldots$ (ln 2 est un nombre irrationnel ; c'est même un nombre transcendant).

Nous n'étudierons pas comment trouver une telle valeur sans la calculatrice (ni comment fait la calculatrice pour trouver une telle valeur) ; le calcul d'un logarithme népérien « à la main » ne sera pas expliqué cette année.

Il est important de signaler que, tout comme l'exponentielle d'un réel quelconque ne peut s'exprimer à l'aide des symboles usuels, le logarithme népérien d'un réel strictement positif x ne peut s'exprimer à l'aide des symboles usuels.

4°) Simplifications d'écritures (exercice fondamental)

Simplifier : $\mathrm{e}^{-\ln 2}$, $\mathrm{e}^{3\ln 2}$, $\mathrm{e}^{-2\ln 2}$, $\mathrm{e}^{1+\ln 2}$.

$$\mathrm{e}^{-\ln 2} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{e}^{3\ln 2} = \left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$\mathrm{e}^{-2\ln 2} = \frac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 2}} = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{e}^{1+\ln 2} = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{\ln 2} = \mathrm{e} \times 2 = 2\mathrm{e}$$

> On peut vérifier les résultats grâce à la calculatrice.

5°) Application aux équations et inéquations avec exponentielle

● **Exemple 1 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\exp(x)=2 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow x=\ln 2$

Donc l'ensemble des solutions de (1) est $S_1=\{\ln 2\}$.

On peut vérifier le résultat grâce à la calculatrice (résolution approchée de l'équation).

● **Exemple 2 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\exp(x)<3 \quad (2)$.

$(2) \Leftrightarrow x<\ln 3$

Donc l'ensemble des solutions de (2) est $\boxed{S_2=]-\infty\,;\ln 3[}$.

La fonction logarithme népérien sera étudiée plus tard dans un chapitre spécialement consacré à elle.
Pour l'instant, nous nous contenterons d'utiliser la notation ln quand nous en aurons besoin.

6°) Mise en garde

On prêtera attention qu'on a défini le logarithme népérien d'un réel strictement positif.

Le logarithme népérien d'un réel négatif n'existe pas.
Néanmoins, lorsque la calculatrice est en mode réel, si l'on tape ln – 1 sur la calculatrice en mode réel, un message d'erreur s'affiche « unreal » (calculatrice Numworks) ou « résultat non réel » (calculatrice TI).
En revanche, si l'on tape ln – 1 sur la calculatrice en mode complexe, celle-ci affiche un résultat qui est un nombre complexe imaginaire pur. Nous n'expliquerons pas ce résultat cette année.

7°) Logarithme décimal

En sciences physiques on utilise le logarithme décimal (ou logarithme de base 10).

● Définition :

Le **logarithme décimal** d'un réel strictement positif x, noté $\log x$, est défini à partir du logarithme népérien par la formule $\log x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Il correspond à la touche $\boxed{\log}$ de la calculatrice.

Pour information, on a $\ln 10=2{,}30258509...$.

● Une propriété importante

$\log 10=1$

$\forall n\in\mathbb{Z} \quad \log 10^n=n$ (démonstration quasi immédiate à l'aide la propriété sur le logarithme népérien d'une puissance)

● Utilisation en chimie

Le logarithme décimal permet de définir le pH (potentiel hydrogène) d'une solution aqueuse en fonction de la concentration en ions oxonium présents dans la solution.

Par définition, $\text{pH}=-\log\left[\text{H}_3\text{O}^+\right]$.

Le pH sert à déterminer la basicité ou l'acidité d'une solution aqueuse (acide si le pH est inférieur à 7, basique si le pH est supérieur à 7).

Nous verrons également plus tard à l'occasion de la définition des exposants réels que la relation de définition $\text{pH}=-\log\left[\text{H}_3\text{O}^+\right]$ permet de dire que $\left[\text{H}_3\text{O}^+\right]=10^{-\text{pH}}$.

On définit de même le pK_a d'une solution aqueuse en fonction de la constante d'acidité K_a de la solution par l'égalité : $\text{pK}_a=-\log \text{K}_a$.

8°) Courbe de la fonction logarithme népérien

On peut tracer la courbe de la fonction logarithme népérien $\ln : x\mapsto \ln x$ sur l'écran de la calculatrice graphique.
C'est la symétrique de la courbe de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y=x$ dans le plan muni d'un repère normé (c'est-à-dire tel que les vecteurs unités sur chaque axe aient la même norme) et donc a fortiori dans un repère orthonormé.
Elle sera étudiée ultérieurement dans le chapitre sur le logarithme népérien.

VIII. Démonstration de l'unicité de la fonction exponentielle

1°) Lemme

● **Énoncé**

Si f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$ alors $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)\times f(-x)=1$.

● **Démonstration**

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=f(x)\times f(-x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-f'(-x)]$$
$$= f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$$
$$= f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x)$$
$$= 0$$

On en déduit que φ est constante sur $\mathbb{R}$.

Or $\varphi(0) = f'(0) \times f(0) = 1$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = 1$ ce qui nous permet d'écrire $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \times f(-x) = 1$.

2°) Conséquence

Si *f* est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors *f* ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

3°) Démonstration de l'unicité dans la définition de l'exponentielle

On souhaite démontrer que s'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors f est unique.

Supposons que les fonctions f_1 et f_2 vérifient les conditions posées :
$f_1' = f_1$ et $f_1(0) = 1$;
$f_2' = f_2$ et $f_2(0) = 1$.

On pose $\varphi = \dfrac{f_1}{f_2}$ (on sait que f_2 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).

φ est le quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f_2 ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

Donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\varphi' = \frac{f_1' \times f_2 - f_1 \times f_2'}{(f_2)^2} = \frac{f_1 \times f_2 - f_1 \times f_2}{(f_2)^2} = 0$$

formule de dérivée d'un quotient

On en déduit que φ est constante sur $\mathbb{R}$.

Or $\varphi(0) = \dfrac{f_1(0)}{f_2(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.
Donc φ est constante égale à 1.
Par suite, $f_1 = f_2$.

La solution du problème posé est donc unique.

IX. Valeurs approchées de e

1°) Formule d'approximation affine tangente (admise sans démonstration)

Pour une fonction *f* dérivable en un réel x_0, on a : $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ pour *x* « proche » de x_0.

Cette formule s'interprète facilement de manière graphique (et la « justifie » du même coup) : au voisinage du point d'abscisse x_0 la courbe de la fonction *f* est quasiment confondue avec la tangente en ce point (qui a pour équation $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$).

2°) Application à la fonction exponentielle

On prend $f = \exp$. On prend un réel *h* fixé non nul « proche » de 0.

On va appliquer cette formule en plusieurs étapes.

1$^{\text{ère}}$ étape : on prend $x = h$ et $x_0 = 0$.

$f(h) \approx f(0) + hf'(0)$

Comme $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$, la formule d'approximation affine tangente donne $f(h) \approx 1 + h$.

2$^{\text{e}}$ étape : on prend $x = 2h$ et $x_0 = h$.

$f(2h) \approx f(h) + hf'(h)$
$f(2h) \approx f(h) + hf(h)$
$f(2h) \approx (1 + h) f(h)$
$f(2h) \approx (1 + h)^2$

3$^{\text{e}}$ étape : on prend $x = 3h$ et $x_0 = 2h$.
$f(3h) \approx f(2h) + hf'(2h)$
$f(3h) \approx f(h) + hf(2h)$
$f(3h) \approx (1 + h) f(2h)$
$f(3h) \approx (1 + h)^3$

etc.

On peut démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(nh) \approx (1 + h)^n$.

3°) Applications numériques

$f(1) = \mathrm{e}$

On va choisir un entier naturel *n* non nul et un nombre réel strictement positif *h* tel que $nh = 1$ (donc, en fait, pour un entier naturel *n* non nul fixé, on a : $h = \dfrac{1}{n}$).

- $h=0,5$ et $n=2$. $f(1)\approx(1+0,5)^2$ $(1,5)^2=2,25$ donc $\mathrm{e}\approx 2,25$

- $h=0,2$ et $n=5$. $f(1)\approx(1+0,2)^5$ $(1,2)^5\approx 2,49$ donc $\mathrm{e}\approx 2,49$

- $h=0,1$ et $n=10$. $f(1)\approx(1+0,1)^{10}$ $(1,1)^{10}\approx 2,59$ donc $\mathrm{e}\approx 2,59$

- $h=0,01$ et $n=100$. $f(1)\approx(1+0,01)^{100}$ $(1,01)^{100}\approx 2,70$ donc $\mathrm{e}\approx 2,70$

- $h=0,001$ et $n=1000$. $f(1)\approx(1+0,001)^{1000}$ $(1,001)^{1000}\approx 2,7169$ donc $\mathrm{e}\approx 2,7169$

4°) Tracé approché de la courbe de la fonction exponentielle

Une méthode analogue à celle employée pour déterminer des valeurs approchées de e permettrait de tracer la représentation graphique de la fonction exponentielle de manière approchée par des « morceaux » de tangentes. Cette méthode, qui ne sera pas décrite ici, s'appelle la méthode d'Euler.