1^ère^ S1

Contrôle du lundi 22 octobre 2012 (30 min)

Répondre très lisiblement et sans rature en écrivant au stylo à plume.
Ne rien écrire, ne rien surligner sur le sujet en dehors de ce qui est demandé.
L'utilisation du symbole ⇔ n'est pas autorisée.
Une aide à la rédaction pour la question 3°) de l'exercice **II** mentionnée par le sigle ☐ est donnée à la fin de l'énoncé.

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note :

…… /20

I. (4 points) QCM

Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule est exacte.
Compléter sans justifier la colonne de droite du tableau ci-dessous avec les lettres (a, b, ou c) correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte un point.
Chaque réponse fausse enlève un point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) L'équation $\sqrt{x}=9$ a pour ensemble de solutions : a. { – 3 ; 3 } b. { 3 } c. { 81 }	
2°) L'inéquation $(x-1)^3 \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions : a. $\mathbb{R}$ b.]– ∞ ; 1] c. [1 ; + ∞[	
3°) L'inéquation $\sqrt{x} < 4$ a pour ensemble de solutions : a.]– ∞ ; 16[b. [0 ; 16[c. [0 ; 2[	
4°) L'inéquation $\sqrt{x} \geqslant -10$ a pour ensemble de solutions : a. [0 ; + ∞[b. ∅ c. [100 ; + ∞[	

II. (9 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1°) On se propose de déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle I =]– ∞ ; 0[en utilisant le sens de variation des fonctions de référence et les propriétés du cours.

Compléter les phrases suivantes :

La fonction $u : x \mapsto x^2$ est …………………………… sur I (1).

La fonction $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est …………………………… sur I (2).

D'après les phrases (1) et (2), la fonction f est donc …………………………… sur I.

2°) Peut-on déterminer de la même manière qu'au 1°) le sens de variation de f sur l'intervalle J =]0 ; + ∞[? Pourquoi ?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'intersection A de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses ☐.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4°) On admet que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle]0 ; 1] atteint en un réel x_0.
Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice la partie de $\mathcal{C}$ sur l'intervalle]0 ; 1] puis utiliser les commandes spéciales de la calculatrice pour déterminer la valeur arrondie au millième de x_0 et de $f(x_0)$.

$x_0 \approx$ …………………… (valeur arrondie au millième)

$f(x_0) \approx$ …………………… (valeur arrondie au millième)

III. (6 points)

Donner la forme canonique des trinômes suivants $P(x)=x^2-3x+1$ et $Q(x)=4-2x^2+8x$ (on ne détaillera les calculs que pour l'un des deux polynômes au choix ; on donnera la forme canonique de l'autre polynôme).

………

………

………

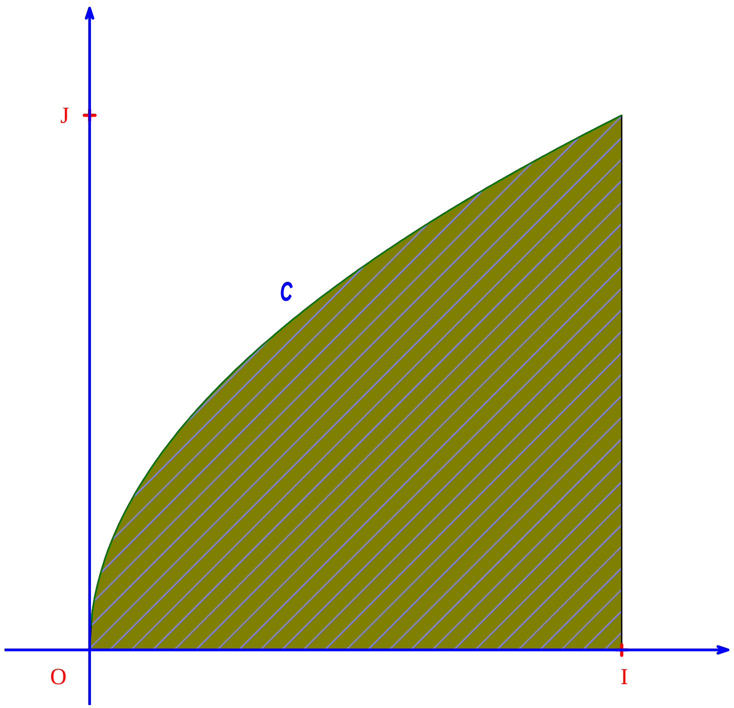
………

………

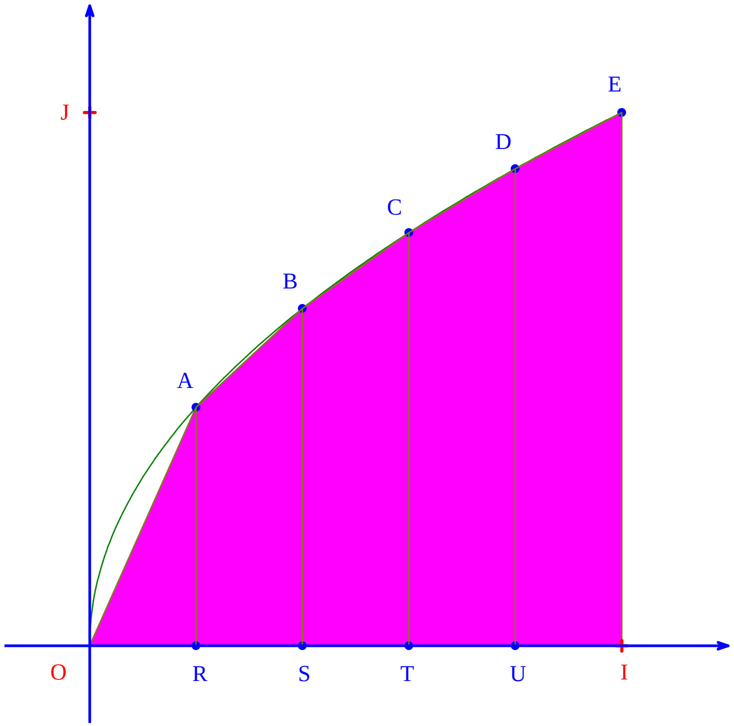
………

IV. (2 points) Utilisation de la calculatrice

On a tracé dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction « racine carrée » sur l'intervalle [0 ; 1]. On s'intéresse à l'aire du domaine situé sous la courbe sur cet intervalle.



Les points A, B, C, D et E les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 et 1.
Les points R, S, T et U sont les points de l'axe des abscisses d'abscisses respectives 0,2 ; 0,4 ; 0,6 et 0,8.
On construit « sous » la courbe $\mathcal{C}$, à partir des points précédents, le triangle ORA et les trapèzes RSBA, STCB, TUDC et UIED.



On admet que la somme des aires du triangle et des quatre trapèzes est égale à :
$Z = 0,2\times\left(\sqrt{0,2}+\sqrt{0,4}+\sqrt{0,6}+\sqrt{0,8}\right)+0,1$.

Utiliser la calculatrice pour donner la valeur arrondie de Z au centième.
On ne demande aucun détail des calculs.

$Z\approx$ ……………. (valeur arrondie au centième)

Bonus à traiter sur une copie à part, seulement

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes $\left|\sqrt{x}-1\right|=4$ (1) et $\left|\frac{1}{x}-3\right|=1$ (2)

☐ **Aide à la rédaction pour la question 3°) de l'exercice II :**
« L'abscisse du point A est solution de l'équation … ».

Corrigé du contrôle du 22-10-2013

I. QCM

1°) L'équation $\sqrt{x}=9$ a pour ensemble de solutions : a. { – 3 ; 3 } b. { 3 } c. **{ 81 }**	**c**
2°) L'inéquation $(x-1)^3 \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions : a. $\mathbb{R}$ b.]– ∞ ; 1] c. **[1 ; + ∞[**	**c**
3°) L'inéquation $\sqrt{x} < 4$ a pour ensemble de solutions : a.]– ∞ ; 16[b. **[0 ; 16[** c. [0 ; 2[	**b**
4°) L'inéquation $\sqrt{x} \geqslant -10$ a pour ensemble de solutions : a. **[0 ; + ∞[** b. ∅ c. [100 ; + ∞[	**a**

1°) $\sqrt{x}=9$

x doit être positif ou nul
On élève les deux membres au carré.

2°) $(x-1)^3 \geqslant 0$

Le signe de $(x-1)^3$ est le même que $x-1$.

Donc l'inéquation $(x-1)^3 \geqslant 0$ est équivalente à $x-1 \geqslant 0$ (on peut aussi faire un tableau de signe avec trois lignes en écrivant $x-1$ sur chaque ligne.

3°) $\sqrt{x} < 4$

x doit être positif ou nul

On peut effectuer une résolution graphique.

4°) $\sqrt{x} \geqslant -10$
x doit être positif ou nul

Le résultat d'une racine carrée est toujours positif ou nul.

Donc l'inéquation $\sqrt{x} \geqslant -10$ est toujours vérifiée quel que soit x positif ou nul.
On peut aussi penser à une résolution graphique.

Beaucoup d'élèves ont été perturbés par le symbole $\geqslant$.

Ils ne se seraient pas trompés si j'avais mis le symbole >, ce qui prouve que le symbole $\geqslant$ n'est pas compris.

II. $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

1°) I =]– ∞ ; 0[

La fonction $u : x \mapsto x^2$ est **strictement décroissante** sur I (1).

La fonction $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est **strictement décroissante** sur I (2).

D'après les phrases (1) et (2), la fonction f est donc **strictement décroissante** sur I.

2°) On ne peut pas déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle J =]0 ; + ∞[de la même manière qu'au 1°) car la fonction u est **strictement croissante** sur J mais v est **strictement décroissante** sur J.

3°) $\mathcal{C}$: courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Déterminons par le calcul l'abscisse du point d'intersection A de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

L'abscisse du point A est solution de l'équation $f(x) = 0$ (1).

Dans $\mathbb{R}^*$, (1) est successivement équivalente à :

$x^2 = -\dfrac{1}{x}$

$x^3 = -1$

$x = -1$ (la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. – 1 est le seul réel dont le cube est égal à – 1)
On n'est pas obligé d'avoir recours à la racine cubique d'un réel.

On en déduit que A a pour abscisse – 1.

4°)

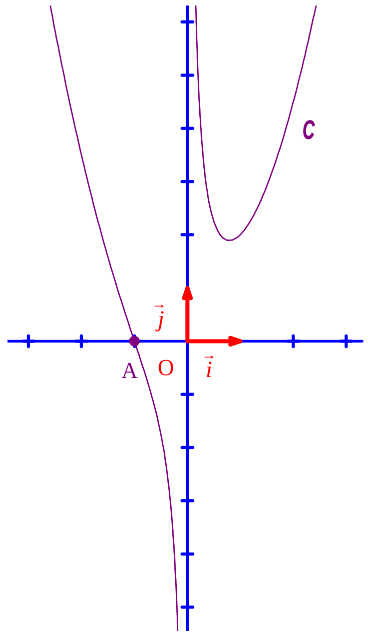
En utilisant la calculatrice, on trouve :

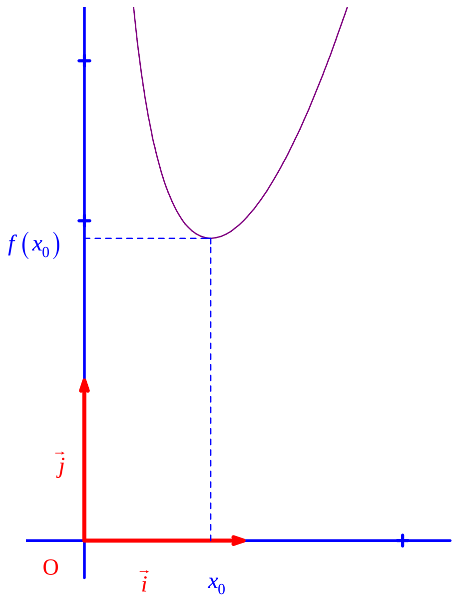
$x_0 = 0{,}79370052...$

$f(x_0) = 1{,}88988157...$

Donc

$x_0 \approx 0{,}794$ (valeur arrondie au millième) $f(x_0) \approx 1{,}890$ (valeur arrondie au millième)





En fait, on démontrera que le minimum de *f* sur]0 ; 1] est atteint pour en $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (valeur exacte) et que $f(x_0) = \dfrac{3}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}$.

III. Forme canonique de polynômes du second degré

$$\begin{aligned}P(x) &= x^2 - 3x + 1\\ &= \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 1\\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(x) &= 4 - 2x^2 + 8x\\ &= -2x^2 + 8x + 4\\ &= -2\left(x^2 - 4x - 2\right)\\ &= -2\left(x^2 - 4x + 4 - 6\right)\\ &= -2\left[\left(x^2 - 4x + 4\right) - 6\right]\\ &= -2\left[(x-2)^2 - 6\right]\\ &= -2(x-2)^2 + 12\end{aligned}$$

IV. Calcul de l'aire sous la courbe de la fonction racine carrée sur l'intervalle [0 ; 1] (aire du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses)

En 1$^{\text{ère}}$ S on ne connaît pas de formule pour l'aire d'un tel domaine (la courbe n'est pas un quart de cercle sur l'intervalle [0 ; 1] même si elle part « perpendiculairement » à l'axe des abscisses ; la forme est « proche » mais on pourrait démontrer que ce n'est pas un quart de cercle).
L'énoncé proposait une méthode de calcul classique pour trouver une valeur approchée de cette aire et donnait une formule permettant de la calculer, de sorte que l'on n'avait qu'à utiliser la calculatrice pour répondre à la question.

$Z = 0,2 \times \left(\sqrt{0,2} + \sqrt{0,4} + \sqrt{0,6} + \sqrt{0,8}\right) + 0,1$

$Z \approx$ **0,65** (valeur arrondie au centième)

L'aire du domaine est environ égal à 0,65 unité d'aire.

On pourra démontrer en Terminale que la valeur exacte de l'aire est égale à $\dfrac{2}{3}$ unité d'aire.

$\dfrac{2}{3} = 0,6666666...$

En utilisant la méthode décrite ici, on commet une erreur inférieure ou égale à 0,02.

Bonus

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left|\sqrt{x}-1\right|=4$ (1).

On résout en fait dans $\mathbb{R}_+$.

(1) est successivement équivalente à :
$\sqrt{x}-1=4$ ou $\sqrt{x}-1=-4$
$\sqrt{x}=5$ ou $\sqrt{x}=-3$ (impossible)
$x=25$

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1=\{25\}$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left|\dfrac{1}{x}-3\right|=1$ (2).

On résout en fait dans $\mathbb{R}_+$.

(2) est successivement équivalente à :

$\dfrac{1}{x}-3=1$ ou $\dfrac{1}{x}-3=-1$
$\dfrac{1}{x}=4$ ou $\dfrac{1}{x}=2$

$x=\dfrac{1}{4}$ ou $x=\dfrac{1}{2}$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2=\left\{\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right\}$.