

Devoir pour le jeudi 25 octobre 2012

I. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 0$ et pour tout nombre entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n + 2(n+1).$$

1°) Calculer u_1 et u_2 .

2°) On considère l'algorithme suivant rédigé en langage naturel.

Entrée :

Saisir N (nombre entier naturel non nul)

Initialisation :

U prend la valeur 0

Traitement :

Pour K allant de 0 jusqu'à N - 1 **Faire**

 U prend la valeur U + 2(K + 1)

FinPour

V prend la valeur U - N

Sorties :

Afficher U et V

a) Faire fonctionner cet algorithme « à la main » en prenant N = 3.

b) Pour N = n, exprimer les valeurs affichées de U et V à l'aide de u_n .

c) Émettre une conjecture sur l'expression de V en fonction de n, puis sur l'expression de u_n en fonction de n.

3°) Démontrer par récurrence la conjecture portant sur l'expression de u_n .

4°) On se propose de retrouver l'expression de u_n par une autre méthode.

On écrit l'égalité $u_{k+1} = u_k + 2(k+1)$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ et on fait la somme membre à membre comme dans le cadre ci-dessous :

$$u_1 = u_0 + \dots$$

$$u_2 = u_1 + \dots$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_{n-1} + \dots$$

Recopier et compléter ce cadre.

En additionnant membre et en simplifiant, retrouver l'expression de u_n en fonction de n.

II. Soit n un entier naturel non nul.

On pose $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ et $g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.

1°) Quel lien y a-t-il entre f et g ?

2°) On suppose $x \neq 1$.

a) Donner une formule sommatoire pour f(x) et g(x).

Le polynôme du numérateur sera ordonné suivant les puissances décroissantes de x.

b) **Application**

Donner une formule sommatoire pour $\sum_{k=1}^n k2^{k-1}$.

Vérifier cette formule sommatoire en utilisant un logiciel de calcul formel.

3°) **Question facultative**

On pose $h(x) = 2 + 6x + \dots + n(n-1)x^{n-2}$.

Donner une formule sommatoire pour h(x) lorsque $x \neq 1$.

Le polynôme du numérateur sera ordonné suivant les puissances décroissantes de x.