1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 15 octobre 2012 (30 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………..……………… **Note : … / 40 = … / 20**

Le contrôle évalue les compétences suivantes :

C1 : maîtriser les connaissances exigibles
C2 : mettre en œuvre une recherche de manière autonome
C3 : mener des raisonnements

I. (11 points) 5 minutes ……………………………………………………………………………… C1

1°) (3 points) Compléter la phrase :

L'ensemble de définition de la fonction « racine carrée » est ……………………….. .

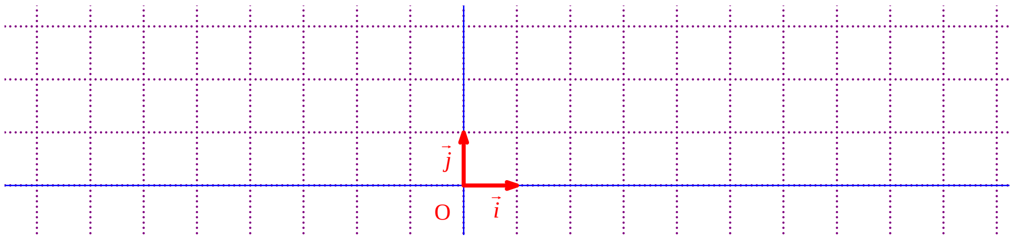
2°) (3 points) Compléter le tableau de variation ci-dessous (flèches à la règle).

x	
$\sqrt{x}$	

3°) (2 points) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction « racine carrée » dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Compéter la phrase :

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M de coordonnées (…... ; ..….) ……………………………………….……….

Tracer $\mathcal{C}$ avec précision sur le graphique ci-dessous.



4°) (3 points) À l'aide du graphique, déterminer l'ensemble des solutions S de l'inéquation $\sqrt{x} < 2$.
Laisser les traits de construction apparents sur le graphique.

S = ………………………

II. (4 points) 2 minutes ………………………………………………………………………………… C1

1°) (2 points) Soit x un réel tel que $1 \leqslant x \leqslant 9$. Écrire le meilleur encadrement possible de $\sqrt{x}$.

2°) (2 points) Soit y un réel tel que $-3 \leqslant y \leqslant -\sqrt{2}$. Écrire le meilleur encadrement possible de y^3.

1°) …………………………………………………	2°) …………………………………………………

III. (6 points) 4 minutes ..…………………………………………………..…………………. C2 et C3

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les droites D et D' d'équations cartésiennes respectives $-3x + 6y + 1 = 0$ et $4x - 8y - 11 = 0$.
Démontrer de la manière la plus concise possible que D // D' sans transformer les équations cartésiennes données dans l'énoncé.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

IV. (3 points) 3 minutes ..………………………………………………………..……………….. C1 et C2

L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{2} - 3}$ est ……………………………… .

V. (6 points) 5 minutes ……………………………………………………………………..…………. C1

Calculer en détaillant les calculs en trois étapes à chaque fois l'expression $A = x^2 + y^2$ pour :

a) $x = \sqrt{2} - 1$ et $y = \sqrt{2} + 1$ b) $x = 2\sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{3}$ c) $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ et $y = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

a) Calcul de A pour $x = \sqrt{2} - 1$ et $y = \sqrt{2} + 1$

A = ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

b) Calcul de B pour $x = 2\sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{3}$

B = ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

c) Calcul de C pour $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ et $y = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

C = ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

VI. (6 points) 5 minutes ..…………………………………………………………..………..……….... C2 et C3

Écrire chacun des nombres suivants sans racine carrée au dénominateur.
Compléter les égalités en écrivant un seul résultat simplifié sans donner aucun détail des calculs.

$\dfrac{1}{2\sqrt{3}} =$ ………..	$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} =$ ………..	$\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} =$ ………..

VII. (2 points) 3 minutes ..…………………………………………………………..………..……… C2 et C3

On considère deux réels x et y tels que l'on ait $x^2 + y = x + xy$ (1).
On considère le raisonnement déductif suivant.

> L'égalité (1) donne $x^2 - x = xy - y$
> donc $x\,(x - 1) = y\,(x - 1)$
> Ainsi $x = y$.

Après avoir analysé ce raisonnement, dire si le raisonnement est correct. S'il est faux, corriger le raisonnement.

……..

……..

……..

……..

VIII. (2 points) 1 minute ..…………………………………………………………..………..………... C2 et C3

On considère la phrase ouverte suivante : « $\sqrt{x} > x$ » où x désigne un réel positif ou nul.

Proposer sans justifier <u>une</u> valeur de x telle que cette phrase soit vraie.

> La phrase est vraie pour $x =$ ………. .

Corrigé du contrôle du 15 octobre 2012

I.

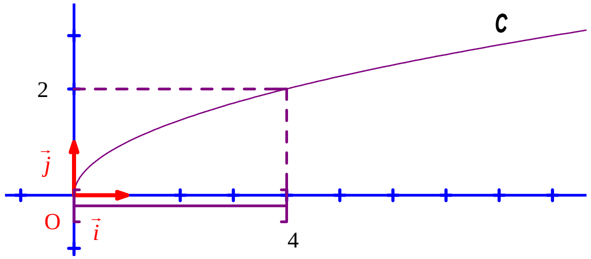
1°) L'ensemble de définition de la fonction « racine carrée » est $\mathbb{R}_+$ ou **[0 ; + ∞[**.

2°) Le tableau de variation de la fonction « racine carrée » est le suivant.

x	**0**	$+\infty$
$\sqrt{x}$	**0** ↗	

3°) $\mathcal{C}$: courbe représentative de la fonction « racine carrée »

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M de coordonnées **(x ; $\sqrt{x}$) lorsque x décrit $\mathbb{R}_+$.**



4°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x} < 2$ est **S = [0 ; 4[**.

II.

1°) $1 \leqslant x \leqslant 9$

Écrivons le meilleur encadrement possible de $\sqrt{x}$.

$$\mathbf{1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3}$$

2°) $-3 \leqslant y \leqslant -\sqrt{2}$

Écrivons le meilleur encadrement possible de y^3.

$$\mathbf{-27 \leqslant y^3 \leqslant -2\sqrt{2}}$$

III.

$D : -3x + 6y + 1 = 0$

$D' : 4x - 8y - 11 = 0$

Démontrons que $D // D'$.

Le vecteur $\vec{u}\,(6 ; 3)$ est un vecteur directeur de D.

Le vecteur $\vec{u}\,'(8 ; 4)$ est un vecteur directeur de D'.

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6 \times 4 - 3 \times 8 = 24 - 24 = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont colinéaires donc $D // D'$.

Autre méthode :

On peut applique directement la règle du cours pour le parallélisme de deux droites dont on connaît des équations cartésiennes sans repasser par des vecteurs directeurs.

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6 \times 4 - 3 \times 8 = 24 - 24 = 0 \text{ donc } D // D'.$$

IV.

L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2} - 3}$ est **[6 ; + ∞[**.

Justification :

$f(x)$ existe si et seulement si $\frac{x}{2} - 3 \geqslant 0$

si et seulement si $\frac{x}{2} \geqslant 3$

si et seulement si $x \geqslant 6$

$\mathcal{D}_f = [6 ; +\infty[$

V.

$\mathrm{A} = x^2 + y^2$

a) **Calcul de A pour $x = \sqrt{2} - 1$ et $y = \sqrt{2} + 1$**

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} \\ &= \mathbf{6} \end{aligned}$$

b) **Calcul de B pour $x = 2\sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{3}$**

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 8 + 3 \\ &= \mathbf{11} \end{aligned}$$

c) **Calcul de C pour $x = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ et $y = \sqrt{2+\sqrt{3}}$**

$$\begin{aligned} \mathrm{C} &= \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= 2 - \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \\ &= 2 + 2 \\ &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

VI.

$\dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$	$\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = 3 - 2\sqrt{2}$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2} - 1$$ (technique de la quantité conjuguée)

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = \frac{3-2\sqrt{2}}{1} = 3 - 2\sqrt{2}$$ (technique de la quantité conjuguée)

ou : $\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

VII. $x^2 + y = x + xy \quad (1)$

> L'égalité (1) donne $x^2 - x = xy - y$
> donc $x\ (x - 1) = y\ (x - 1)$
> Ainsi $x = y$.

Ce raisonnement est faux.
Le passage de la deuxième à la troisième ligne est obtenu en simplifiant les deux membres de l'égalité par $x - 1$.
Or $x - 1$ peut être nul pour $x = 1$.
Dans ce cas on ne peut pas simplifier.

Le raisonnement correct est :

> L'égalité (1) donne $x^2 - x = xy - y$
> donc $x\ (x - 1) = y\ (x - 1)$
> Ainsi $(x - 1)\ x - y\ (x - 1) = 0$
> D'où $(x - 1)\ (x - y) = 0$.
> Donc $x - 1 = 0$ ou $x - y = 0$ (règle du produit nul).
> Par suite, $x = 1$ ou $x = y$.

VIII.

P : « $\sqrt{x} > x$ »

La phrase P est vraie pour **$x = 0{,}5$ (ou $x = 0{,}25$).**

En fait, la phrase est ouverte pour tous les réels de l'intervalle $]\ 0\ ;\ 1[$ et pour ceux-là seulement.