TS Exercices sur la continuité (2)

1 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I=[-1;5]$ telle que $f(-1)=-4$ et $f(5)=3$.
Démontrer qu'il existe un unique réel dans I dont l'image par f soit égale à 0 ?

Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans I.
Quelle hypothèse supplémentaire suffit-il de faire pour que cette solution soit unique ?

2 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.
On suppose que $f(-5)=1$; $f(-3)=-2$; $f(0)=1$; $f(2)=4$; $f(5)=-5$; $f(6)=1$.
Recopier et compléter les phrases suivantes :

- L'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet <u>au moins</u> ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=0$ admet <u>au moins</u> ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=-4,5$ admet <u>au moins</u> ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=3$ admet <u>au moins</u> ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.

3 On considère la fonction $f : x \mapsto x^3+4x^2+4x$.
Démontrer, en rédigeant soigneusement, que l'équation $f(x)=-\frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\mathrm{I}=[-1;0]$.

4 Démontrer que l'équation $3x^4-8x^3+6x^2=3$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\mathrm{I}=[0;2]$.

5 Démontrer que l'équation $(3x-1)\sqrt{x}=1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\mathrm{I}=[0;1]$.

6 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I}=[-5;8]$.

Donner un exercice plus franc avec juste une fonction strictement croissante ou strictement décroissante.

x	-5		0		8
Variations de f	1	↗	2	↘	-6

Déterminer le nombre de solutions dans I de l'équation $f(x)=0$ (E).

7 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I}=[-2;5]$.

x	-2		-1		1		5
Variations de f	-3	↗	4	↘	-5	↗	9

Déterminer le nombre de solutions dans I de l'équation $f(x)=2$ (E).

8 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\cos x-x$.

Le but de cet exercice est d'étudier l'équation $f(x)=0$ (E).
On ne peut pas résoudre cette équation par le calcul.

Partie A : Existence et unicité de la solution de (E)

1°) Étudier la continuité de f sur I.
2°) Calculer la dérivée de f ; étudier soigneusement son signe sur I.
En déduire le sens de variation de f sur I et faire le tableau de variations de f sur I. On calculera $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3°) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans I.
Dans le tableau de variations de f établi au 2°), placer α sur la première ligne du tableau.
Placer 0 sur la flèche de variation et « relier » α et 0 par des pointillés.

N. B. : On ne peut pas donner la valeur exacte de α. On va donc chercher un encadrement de α.

Partie B : Encadrements de la solution

Le but de cette partie est de déterminer des encadrements de α en utilisant la méthode de balayage.
On sait que $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. On souhaite obtenir des encadrements plus précis de α en restreignant à chaque fois l'intervalle.

1°) **Encadrement par deux entiers consécutifs**

Calculer $f(1)$ (utiliser la calculatrice en « mode radian »). En déduire que l'on a : $0<\alpha<1$.
On obtient ainsi un encadrement d'amplitude 1 de α.

2°) **Encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 1**

À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau ci-dessous. On utilisera directement le tableau de valeurs de calculatrice en prenant un pas de 0,1.
On pensera à mettre la calculatrice en « mode radian ».

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$ (troncature au centième)											

En déduire l'encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
On obtient ainsi un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

3°) **Encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 2**

Utiliser le même principe pour obtenir l'encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
On obtient ainsi un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Partie C : Utilisation de la calculatrice

Utiliser l'outil de résolution des équations de la calculatrice (résolution approchée).

On rappelle que la calculatrice doit être en mode radian.

Recopier et compléter l'égalité $\alpha = \boxed{} , \boxed{} \ldots$

On veillera à ne pas écrire la dernière décimale affichée par la calculatrice. On ne peut en effet être certain que la dernière décimale soit exacte.

On peut éventuellement utiliser dcode.

$\boxed{9}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 2x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Déterminons le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0 \quad (\mathrm{E})$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = [0\,;1]$.

On note α cette solution.

3°) Appliquer quatre fois « à la main » en détaillant les étapes la méthode de dichotomie pour obtenir des encadrements de α en complétant le tableau suivant.

On écrira les valeurs sous forme décimale (et non sous forme fractionnaire) en donnant des troncature au millième pour les valeurs de $f(c)$. Dans la colonne de test, on se contentera d'écrire V (vrai) ou F (faux).

Appliquer quatre fois « à la main » en détaillant les étapes la méthode de dichotomie pour obtenir un encadrement de α.

On recopiera et on complètera le tableau suivant :

a	b	Amplitude de l'intervalle $b-a$	Centre de l'intervalle $c = \dfrac{a+b}{2}$	Image du centre $f(c)$	Signe de l'image du centre	Encadrement de α
0	1	1	0,5			

Information : α est un nombre irrationnel dont la valeur exacte calculée à l'aide de la formule de Cardan est

$\alpha = \sqrt[3]{1+\sqrt{\dfrac{35}{27}}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{\dfrac{35}{27}}}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\alpha = 0,77091699705\ldots$.

$\boxed{10}$

Partie A

On considère la fonction $g : x \mapsto x^3 + 3x^2 + 2$.

1°) Étudier g (dérivée et tableau de variations).

2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 0 \quad (\mathrm{E})$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-4\,;-3]$.

3°) À l'aide de la calculatrice (en utilisant par exemple l'application pour la résolution des équations polynomiales), donner l'encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

Grâce à la formule de Cardan (qui n'est pas au programme de Terminale et qui n'est pas à connaître), on peut démontrer que la valeur exacte de α est donnée par : $\alpha = -\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} - 1$.

4°) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3-1}{(x+1)^2}$.

1°) Donner l'ensemble de définition de f.

2°) Justifier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

3°) Établir le tableau de variations de f.

$\boxed{11}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 - x - 1$.

1°) Étudier f (dérivée et tableau de variations).

2°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0 \quad (\mathrm{E})$ admet une unique solution α dans l'intervalle I=[1 ; 2].

3°) À l'aide de la calculatrice (en utilisant par exemple l'application pour la résolution des équations polynomiales), donner l'encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 5.

Grâce à la formule de Cardan (qui n'est pas au programme de Terminale et qui n'est pas à connaître), on peut démontrer que la valeur exacte de α est donnée par : $\alpha = \dfrac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + 1}{3}$.

Même si la formule de Cardan n'est pas au programme, il est très utile de savoir ce qu'est une racine cubique.

$\boxed{12}$ On considère un récipient cylindrique de rayon intérieur 10 cm et de hauteur 20 cm. Il contient de l'eau, sur une hauteur de 4 cm.
On place une boule au fond du récipient et on constate que l'eau recouvre exactement la boule (la boule, de densité plus grande que l'eau, ne flotte pas).

On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ et que le volume d'un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon R est donné par la formule $\pi R^2 h$.

1°) On note r le rayon de la boule en cm.

Démontrer que r est solution de l'équation $\frac{x^3}{3}-50x+100=0 \quad (\text{E})$.

Indication : Faire un schéma du dispositif et calculer des volumes.

2°) À l'aide de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{3}-50x+100$, démontrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;10[$.

3°) Encadrer r par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

Corrigé

Les mots $\boxed{\text{sur}}$ et $\boxed{\text{dans}}$

• Le mot $\boxed{\text{sur}}$ s'emploie pour une fonction :

La fonction f est continue $\boxed{\text{sur}}$ I, la fonction f est définie $\boxed{\text{sur}}$ I, la fonction f est dérivable $\boxed{\text{sur}}$ I, la fonction f est monotone $\boxed{\text{sur}}$ I etc.

• Le mot $\boxed{\text{dans}}$ s'emploie pour une équation ou une inéquation :

On résout une équation ou une inéquation $\boxed{\text{dans}}$ un intervalle.
L'équation (E) admet au moins une solution $\boxed{\text{dans}}$ I.

On pensera aux « 3 C » chaque fois que nécessaire.

$\boxed{1}$

$f : I=[-1\,;5] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(-1)=-4$ et $f(5)=3$

Quelques remarques avant de commencer :

• L'énoncé nomme I l'intervalle $[-1\,;5]$.
• Attention, l'hypothèse $f(-1)=-4$ et $f(5)=3$ n'implique nullement que f est croissante sur I.

• Démontrons que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans I.

On écrit une idée par ligne.

C_1 : f est continue sur I par hypothèse.

C_2 : $f(-1)=-4$ et $f(5)=3$ par hypothèse donc $0\in[-4\,;3]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans I.

1ère rédaction :

On sait que *f* est continue sur l'intervalle I.
De plus, on sait que $f(-1)=-4$; $f(5)=3$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $k\in[-4\,;3]$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle I.

Or $0\in[-4\,;3]$.
Donc l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle I.

2e rédaction :

f vérifie les conditions suivantes :

f est continue sur l'intervalle I.
$f(-1)=-4$; $f(5)=3$
$f(-1)<0<f(5)$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle I.

• Quelle hypothèse supplémentaire suffit-il de faire pour que cette solution soit unique ?

Pour que cette solution soit unique, *il suffit* de supposer que *f* est strictement monotone sur I, c'est-à-dire ici strictement croissante sur I.

Il s'agit d'une *condition suffisante*.
Cette condition n'est pas *nécessaire*.

Le 8-2-2022

Diana Duca T1 spé

Elle m'a écrit les deux lignes suivantes :
Peut-on prendre un nombre quelconque *x* appartenant à l'intervalle $[-4\,;3]$?
Que pouvons-nous dire à un réel *x* quelconque n'appartenant pas à cet intervalle ?

Elle m'a demandé si ça restait valable pour l'équation $f(x)=1$, $f(x)=2$, $f(x)=3$ etc.
Ça reste valable pour tout réel $k\in[-4\,;3]$.
Par contre, on ne peut rien dire si *k* est hors de cet intervalle.

$\boxed{2}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(-5)=1$; $f(-3)=-2$; $f(0)=1$; $f(2)=4$; $f(5)=-5$; $f(6)=1$

On peut faire un tableau de valeurs mais pas de tableau de variations.

x	-5	-3	0	2	5	6
$f(x)$	1	-2	1	4	-5	1

Quelques remarques avant de commencer :

On peut faire un graphique (on ne connaît cependant pas l'allure de la courbe entre – 5 et – 3, entre – 3 et 0 etc.).
Sur l'intervalle [– 5 ; – 3], la fonction *f* n'est pas forcément monotone, ni même strictement monotone. La courbe peut couper plusieurs fois l'axe des abscisses.

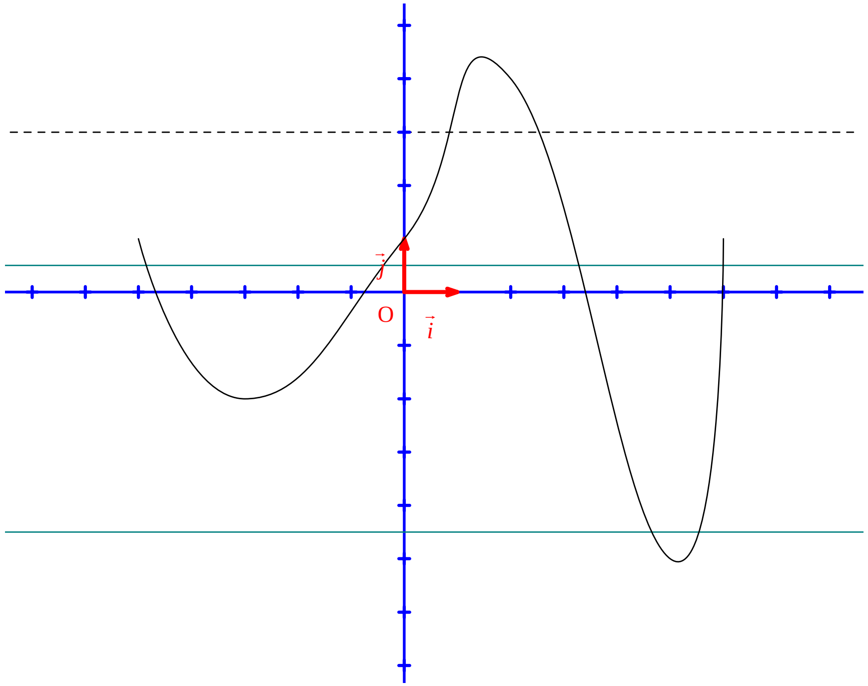
On se place intervalle par intervalle.

On pose $I_1=[-5\,;-3]$, $I_2=[-3\,;0]$, $I_3=[0\,;2]$, $I_4=[2\,;5]$, $I_5=[5\,;6]$.

On utilise le théorème des valeurs intermédiaires.

- L'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ admet **au moins 4** solutions dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=0$ admet **au moins 4** solutions dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=-4{,}5$ admet **au moins 2** solutions dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=3$ admet **au moins 2** solutions dans $\mathbb{R}$.

N.B. : Dans chaque cas, on dit bien « au moins ». Il peut y avoir plus de solutions.



On a les données suivantes : $f(-5)=1$; $f(-3)=-2$; $f(0)=1$; $f(2)=4$; $f(5)=-5$; $f(6)=1$.

On considère les intervalles : $[-5;-3]$, $[-3;0]$, $[0;2]$, $[2;5]$, $[5;6]$.

Par hypothèse, *f* est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par restriction, *f* est continue sur chacun de ces intervalles.

Pour l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$

Dans l'intervalle $[-5;-3]$, il y a au moins une solution (TVI).
Dans l'intervalle $[-3;0]$, il y a au moins une solution (TVI).
Dans l'intervalle $[0;2]$, il n'y a pas de solution (pas TVI).
Dans l'intervalle $[2;5]$, il y a au moins une solution (TVI).
Dans l'intervalle $[5;6]$, il y a au moins une solution (TVI).

Tous ces intervalles ont une borne en commun mais aucune d'elles n'est solution de l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$.

$\boxed{3}$

$f : x \mapsto x^3+4x^2+4x$

$\mathrm{I}=[-1;0]$

Démontrons que l'équation $f(x)=-\frac{1}{2}$ (E) admet au moins une solution dans I.

On peut noter que $f(x)=x(x+2)^2$ mais ce résultat n'a pas véritablement d'importance pour la suite sauf éventuellement pour les calculs d'images.

f vérifie les conditions suivantes.

C_1 : *f* est une fonction polynôme donc *f* est continue sur $\mathbb{R}$ et par restriction sur I.

C_2 : On a $f(-1)=(-1)^3+4\times(-1)^2+4\times(-1)=-1$ et $f(0)=0^3+4\times0^2+4\times0=0$ d'où $-\frac{1}{2}\in[-1;0]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet au moins une solution dans I.

$\boxed{4}$

Démontrons que l'équation $3x^4-8x^3+6x^2=3$ (E) admet au moins une solution dans l'intervalle $\mathrm{I}=[0;2]$.

Le but de l'exercice n'est pas de chercher à résoudre l'équation.
En effet, on ne sait pas résoudre de manière exacte une équation polynomiale de degré 4 (même en posant un changement d'inconnue $X=?$).

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^4-8x^3+6x^2$.

f vérifie les conditions suivantes.

C_1 : *f* est une fonction polynôme donc *f* est continue sur $\mathbb{R}$ et par restriction sur I.

C_2 : On $f(0)=0$ et $f(2)=8$ d'où $3\in[0;8]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet au moins une solution dans I.

• On ne connaît pas le nombre de solutions l'équation mais ce n'est pas demandé dans la question.
Pour le savoir, il faudrait faire une étude un peu plus poussée des variations de *f*.

• Si on voulait, on pourrait obtenir grâce à la calculatrice des valeurs approchées de la (ou des) solution(s) en utilisant l'application qui permet de résoudre les équations polynomiales à une inconnue jusqu'au degré 10.

$\boxed{5}$

Démontrons que l'équation $(3x-1)\sqrt{x}=1$ (E) admet au moins une solution dans l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$.

On considère la fonction $f : x \mapsto (3x-1)\sqrt{x}$.

La fonction *f* est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Attention, la fonction *f* n'est pas une fonction polynôme ni la restriction d'une fonction rationnelle.

L'équation (E) correspond à $f(x)=1$.

(C_1) : *f* est continue sur $[0\,;+\infty[$ (produit de fonctions continues sur $[0\,;+\infty[$) et donc, par restriction, sur I.

On justifie de manière plus précise de la manière suivante :

On considère les fonctions $u : x \mapsto 3x-1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.

Les fonctions *u* et *v* sont continues sur respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0\,;+\infty[$ donc par restriction sur I.

Or $f=u\times v$ donc *f* est continue sur I.

0 est bien « contenu » dans l'intervalle (autrement dit, on écrit bien l'intervalle $[0\,;1]$ et non l'intervalle $]0\,;1]$).
En effet, on a vu que la fonction « racine carrée » est continue sur $\mathbb{R}_+$: elle est bien continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

(C_2) : On a $f(0)=0$ et $f(1)=2$ donc $f(0)<1<f(1)$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet au moins une solution dans I.

$\boxed{6}$

On reproduit le tableau de variations de *f*.

x	-5		0		8
Variations de *f*	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-6

Rappel : Les flèches expriment à la fois les variations (stricte croissance ou décroissance) et continuité.

$\mathrm{I}_2=[-5\,;8]$

Déterminons le nombre de solutions dans I de l'équation $f(x)=0$ (E).

On raisonne *intervalle par intervalle*.

On pose $\mathrm{I}_1=[0\,;8]$ et $\mathrm{I}_2=[-5\,;0]$.

• On se place sur l'intervalle I_1 .

C_1 : Par hypothèse, *f* est continue sur I donc par restriction sur I_1 .
C_2 : $f(0)=2$ et $f(8)=-6$
0 est compris entre – 6 et 2.
C_3 : *f* est strictement décroissante sur I_1 .

f vérifie les conditions C_1, C_2, C_3 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux foncions strictement monotones), l'équation (E) admet une unique solution dans I_1 .

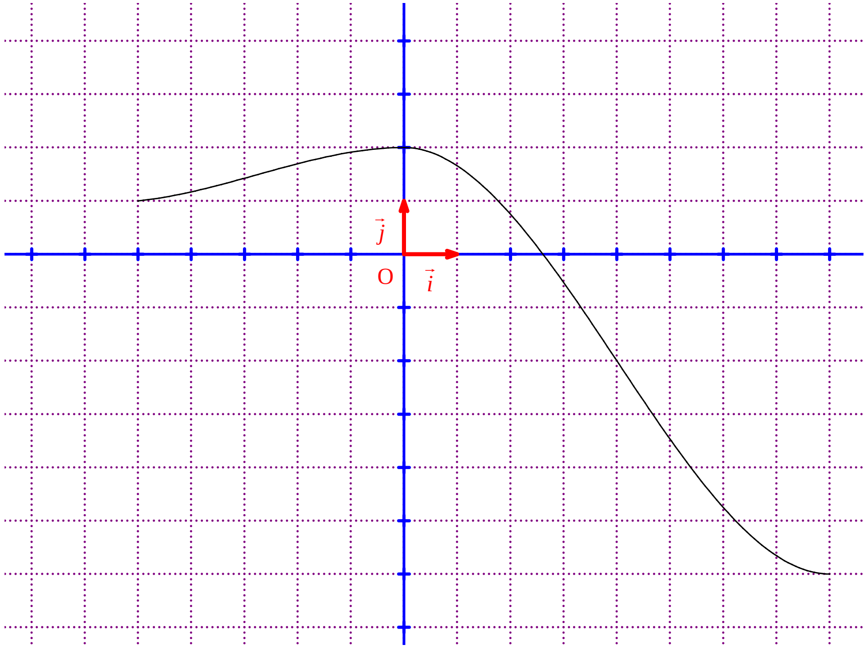
Les conditions C_1 et C_2 assurent l'existence d'une solution ; la condition C_3 assure l'unicité.

• On se place sur l'intervalle I_2 .
De manière évidente, l'équation (E) n'a pas de solution dans cet intervalle car *f* a pour minimum 1 sur cet intervalle (ou est minorée par 1 sur cet intervalle) et $0<1$ (on ne se sert pas du théorème des valeurs intermédiaires pour l'affirmer).

Conclusion : L'équation (E) admet une unique solution dans I.

Remarque très importante :

On ne se sert pas du théorème des valeurs intermédiaires pour affirmer que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle I_2 .



On pourrait poser $I_1 = [0\,;8]$ et $I_2 = [-5\,;0[$.

$\boxed{7}$

$I = [-2\,;5]$

On reproduit le tableau de variations.

x	-2	α	-1	β	1	γ	5
Variations de f	-3	2	4	2	-5	2	9

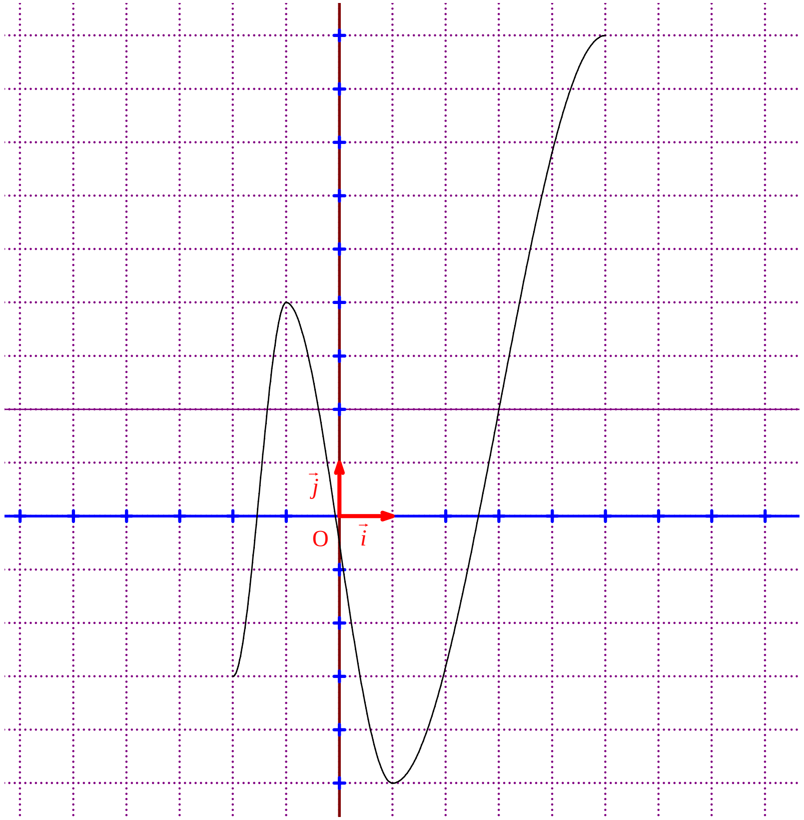
Déterminons le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$ (E) dans I.

On se place intervalle par intervalle.

On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles $[-2\,;-1]$, $[-1\,;1]$ et $[1\,;5]$ (la fonction f est continue et strictement monotone sur chacun de ces intervalles).

Normalement, il ne faudrait pas mettre d'intervalles qui se chevauchent (par exemple : $[-2\,;-1]$ et $[-1\,;1]$).
Il faudrait ouvrir l'un des intervalles en la borne commune (dan notre exemple, il faudrait par exemple écrire $[-2\,;-1[$ et $[-1\,;1]$).
On s'autorise cependant de ne pas le faire, sachant que l'on vérifie aisément qu'aucune des bornes des intervalles n'est solution).
On s'autorise également sachant que si c'était le cas, il suffirait d'en tenir compte dans la conclusion.

L'équation (E) admet 3 solutions deux à deux distinctes dans I.



Pour aller plus loin :

On pourrait donner le signe de f sur I.
On utilise α, β, γ.

8

$f : x \mapsto \cos x - x$ définie sur $\mathrm{I} = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

Partie A : Existence et unicité de la solution de (E)

1°) **Étudions la continuité de f sur I.**

On introduit deux fonctions u et v.

1ère rédaction :

On pose $u(x) = \cos x$ et $v(x) = x$.

2e rédaction :

On considère les fonctions $u : x \mapsto \cos x$ et $v : x \mapsto x$.

u et v sont continues sur $\mathbb{R}$ donc par restriction sur I.
Or $f = u - v$ donc f est continue sur I.

Attention, la fonction f n'est pas une fonction polynôme ni une fonction rationnelle.

2°) **Calculons $f'(x)$.**

u et v sont dérivables sur I.

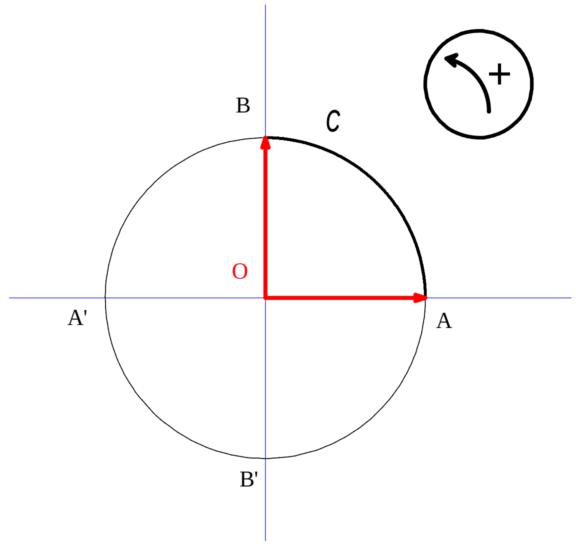
Or $f = u - v$ donc f est dérivable sur I.

$\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = -\sin x - 1$

Étudions le signe de $f'(x)$ et déduisons-en le sens de variation de f sur I.

On procède par des encadrements successifs.

On sait que le sinus est compris entre – 1 et 1.
Comme on est dans I, $\sin x$ est compris entre 0 et 1 (utiliser un cercle trigonométrique).



$\forall x \in \mathrm{I} \quad 0 \leqslant \sin x \leqslant 1$
Donc $\forall x \in \mathrm{I} \quad -1 \leqslant -\sin x \leqslant 0$
D'où $\forall x \in \mathrm{I} \quad -2 \leqslant -\sin x - 1 \leqslant -1$
Par suite, $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) < 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur I.

Remarques sur cette question :

1. Une inégalité simple (et non double) suffit pour établir l'inégalité $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

2. On peut aussi dire que u est strictement décroissante sur I, que v est strictement croissante sur I donc que $-v$ est strictement décroissante sur I.
Par suite, $u - v$ est strictement décroissante sur I (la somme de deux fonctions strictement décroissante sur un intervalle est strictement décroissante sur cet intervalle).
On en déduit que f est strictement décroissante sur I.

Tableau de variations de f sur I :

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $f'(x)$		–	
Variations de f	1	0	$-\frac{\pi}{2}$

$f(0) = \cos 0 - 0 = 1 - 0 = 1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

3°) **Démontrons que l'équation (E) admet une unique solution α dans I.**

On utilise les « 3 C » de la mise en application du théorème des valeurs intermédiaires.

C_1 : f est continue sur I.

C_2 : On a : $f(0)=1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$, ce qui permet de dire que $0\in\left[-\frac{\pi}{2};1\right]$.

C_3 : f est strictement décroissante sur I.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution α dans I.

Remarques :

On ne cherche pas à déterminer α.
On ne peut pas trouver la valeur exacte de α.

Partie B : Encadrements de la solution

1°) **Encadrement par deux entiers consécutifs**

$f(0)=\cos 0-0=1$ (déjà calculé, à enlever)

Avec la calculatrice (obligatoire car 1 n'est pas une valeur d'angle remarquable), on obtient
$f(1)=\cos 1-1=-0,459697694...$ (attention à bien mettre les petits points)

$f(0)>0$ et $f(1)<0$

Donc f présente un changement de signe entre 0 et 1.
Par suite, comme f est strictement décroissante sur I, on a : $0<\alpha<1$.

2°) **Encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 1**

On utilise la calculatrice pour obtenir directement le tableau de valeurs suivant. Cela évite de calculer chaque image.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$ (troncature au centième)	1	0,89	0,78	0,65	0,52	0,37	0,22	0,06	–0,10	–0,27	–0,45

On observe à quel moment f change de signe. On en déduit que l'on a : $0,7<\alpha<0,8$.

3°) **Encadrement par deux décimaux consécutifs d'ordre 2**

x	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,8
$f(x)$ (troncature au centième)	0,06	0,05	0,03	0,02	0,002	– 0,02	– 0,04	– 0,05	– 0,07	– 0,09	– 0,10

troncature au millième pour celle-là

On en déduit que l'on a : $0,73<\alpha<0,74$.

Partie C : Utilisation de la calculatrice

1ère méthode :

Numworks

Calculatrice résolution sur équation

On note cos x – x =0.

x= 0.7390852…

(calculatrice TI-83-Premium CE)
On obtient l'affichage : $X=0,73908513321512$.
On peut donc écrire $\alpha=0,7390851332151...$.

2e méthode :

Grâce à la calculatrice graphique, on trouve $\alpha=0,7390851332...$ (attention à bien mettre les petits points)
Le résultat est bien conforme aux encadrements déterminés dans la partie B.

On n'a pas déterminé la valeur exacte de α.
La calculatrice nous a juste permis de déterminer le début de l'écriture décimale (infinie) de α.

Avec la calculatrice (TI 83 ou TI 89), on peut obtenir trois décimales de plus avec la calculatrice ; on obtient l'affichage : $0,739\ 085\ 133\ 215\ 16$.
La dernière décimale n'est pas sûre.
$\alpha=0,7390851332\underline{151}...$

$f(x)=$……………..
Calcul :
Zero : remplir puis $\boxed{\text{quitter}}$
math : 0

9

$f : x \mapsto x^3 + 2x - 2$

1°) Déterminons le sens de variation de *f* sur $\mathbb{R}$.

1ère méthode :
On utilise les dérivées.

2e méthode :
On écrit *f* comme somme de deux fonctions dont on connaît le sens de variations.
On considère les fonctions $u : x \mapsto x^3$ et $v : x \mapsto 2x-2$.

u et *v* sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

Or $f = u + v$ donc *f* est strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ (propriété : la somme de deux ou de plusieurs fonctions strictement croissantes sur un intervalle est strictement croissante sur cet intervalle).

En version plus courte, on peut aussi dire que *f* est la somme de deux fonctions strictement croissante donc *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ (E) admet une unique solution dans l'intervalle $I = [0\,;1]$.

C_1 : *f* est continue sur $\mathbb{R}$ donc par restriction sur l'intervalle *I*.
C_2 : On a $f(0) = -2$ et $f(1) = 1$, ce qui montre que 0 est compris entre – 2 et 1.
C_3 : *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc par restriction, sur *I*.

f vérifie les conditions C_1, C_2, C_3 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution dans *I*.

Les conditions C_1 et C_2 assurent l'existence d'une solution ; la condition C_3 assure l'unicité.

3°)

a	b	Amplitude de l'intervalle $b-a$	Centre de l'intervalle $c = \dfrac{a+b}{2}$	Image du centre $f(c)$	Signe de l'image du centre	Encadrement de α
0	1	1	0,5	– 0,875	–	$0,5 < \alpha < 1$
0,5	1	0,5	0,75	– 0,078…	–	$0,75 < \alpha < 1$
0,75	1	0,25	0,875	0,419…	+	$0,75 < \alpha < 0,875$
0,75	0,875	0,125	0,8125	0,101…	+	$0,75 < \alpha < 0,8125$

Au départ on se place sur l'intervalle $I = [0\,;1]$ (1ère ligne). Les valeurs de *a* et *b* sont $a = 0$ et $b = 1$.

$f(0,5) = -0,875$ (valeur exacte)
$f(1) = 1$ calculé précédemment
$f(0,5) < 0$ et $f(1) > 0$
On sait que $f(\alpha) = 0$ par définition.
On passe donc de négatif à positif entre 0,5 et 1.
On en déduit que α est entre 0,5 et 1 : $0,5 < \alpha < 1$.

On se place alors sur l'intervalle $[0,5\,;1]$ (2e ligne). Les nouvelles valeurs de *a* et *b* sont $a = 0,5$ et $b = 1$.

On retient que :

- On cherche des encadrements de α.
- En bout de ligne, on remet les valeurs de *a* et *b*.

En version plus rapide, dégagée de l'algorithme :

$f(0) = 0^3 + 2 \times 0 - 2 = -2$
$f(1) = 1^3 + 2 \times 1 - 2 = 1$
Donc $0 < \alpha < 1$.

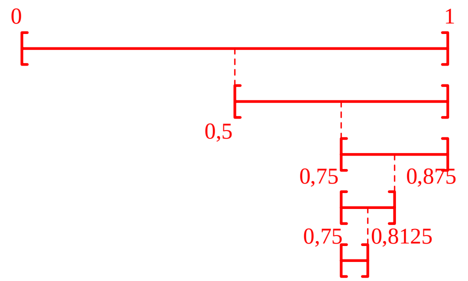
$f(0,5) = 0,5^3 + 2 \times 0,5 - 2 = -0,875$ donc $0,5 < \alpha < 1$.

$f(0,75) = 0,75^3 + 2 \times 0,75 - 2 = -0,078125$ donc $0,75 < \alpha < 1$.

$f(0,875) = 0,41992$ donc $0,75 < \alpha < 0,875$.

$f(0,8125) = 0,16138$ donc $0,75 < \alpha < 0,8125$.

On peut visualiser ainsi les « intervalles emboîtés ».



10

Partie A. Étude de la fonction $g : x \mapsto x^3 + 3x^2 + 2$ (fonction auxiliaire)

1°) **Étudions les variations de *g*.**

g est une fonction polynôme donc elle est (continue et) dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g		↗	6	↘	2	↗	

* On utilise la règle du signe d'un polynôme du second degré.

Ou en détaillant plus le signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $3x$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g		↗	6	↘	2	↗	

2°)

On pensera aux « 3 C » chaque fois que nécessaire.

Démontrons que l'équation $g(x)=0$ (E) admet une unique solution α dans l'intervalle [– 4 ; – 3].

On place le 0 avec des pointillés dans le tableau de variations pour voir que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	-2		0		$+\infty$
Variations de g	↗	0	6	↘	2	↗	

x	$-\infty$	-4	α	-3	-2		0		$+\infty$
Variations de g		-14	0	2	6	↘	2	↗	

C_1 : *g* est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme donc par restriction sur $[-4\,;-3]$.

C_2 : On a $g(-4)=-14$ et $g(-3)=2$ d'où $0 \in [-14\,;2]$ (0 est une valeur intermédiaire).

C_3 : *g* est strictement croissante sur $[-4\,;-3]$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-4\,;-3]$.

Le tableau de variations nous montre de manière évidente que l'équation $g(x)=0$ ne peut admettre d'autre solution dans $\mathbb{R}$.

Donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Remarque de vocabulaire :

Le terme de « racine » est employé car *g* est une fonction polynôme.
On pourrait aussi employer le terme de « zéro » (en disant que α est l'unique zéro de $g(x)$ dans $\mathbb{R}$).

Le nombre α a été défini comme unique solution de l'équation $g(x)=0$ dans $\mathbb{R}$.
Bien que l'on ne connaisse pas la valeur exacte (nous ne le cherchons pas, car il faudrait avoir recours à la formule de Cardan qui donne l'expression de la racine d'un polynôme du troisième degré lorsque celui-ci admet une unique racine dans $\mathbb{R}$), il est possible de faire intervenir α dans la suite de l'exercice comme cela va être fait dans la partie B.
On se gardera de remplacer α à aucun moment par une valeur approchée.

La formule de Cardan donne $\alpha = -\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} - 1$.
α est un nombre irrationnel.

3°) **Déterminons un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.**

On a $g(-3{,}2) = -0{,}048$ (valeur exacte) et $g(-3{,}19) = 0{,}066541$ (valeur exacte).

Donc $-3{,}20 < \alpha < -3{,}19$

Autre présentation :

x	$g(x)$ (valeur arrondie)
– 3,2	– 0,05
– 3,19	0,07

Remarque :

Le solveur de la calculatrice donne $\alpha = -3{,}195823....$

Comme g est une fonction polynôme, on peut aussi utiliser directement l'application de la calculatrice qui permet de résoudre les équations polynomiales.

L'encadrement obtenu par balayage est donc conforme au résultat obtenu avec la calculatrice.

Rappel de vocabulaire :

L'encadrement $-3{,}20 < \alpha < -3{,}19$ permet de dire que :

– 3,20 est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de α ;

– 3,19 est l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de α.

4°) **Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.**

On s'appuie sur le tableau de variations de la fonction g, sans forcément donner d'explications supplémentaires qui seraient longues et fastidieuses à rédiger.

x	$-\infty$	α	-2		0		$+\infty$
Variations de g	↗	0	6	↘	2	↗	
	$-$			$+$			

Il y a deux possibilités pour répondre.

1$^{\text{ère}}$ possibilité : On répond par un tableau de signes.

En utilisant le tableau de variations, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

2$^{\text{e}}$ possibilité : On répond par des phrases.

- Si $x < \alpha$, alors $g(x) < 0$.
- Si $x > \alpha$, alors $g(x) > 0$.
- $g(\alpha) = 0$

Il est inutile d'expliquer davantage ; on s'appuie sur le tableau de variations de g.

Partie B. Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3-1}{(x+1)^2}$

1°) **Déterminons l'ensemble de définition de f.**

$f(x)$ existe si et seulement si $(x+1)^2 \neq 0$

si et seulement si $x \neq -1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2°) **Calculons $f'(x)$.**

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1$^{\text{ère}}$ méthode : maladroite

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad f'(x) = \frac{3x^2(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3-1)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{(x+1)(3x^3+3x^2-2x^3+2)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{(x+1)(x^3+3x^2+2)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

2$^{\text{e}}$ méthode : à retenir

On écrit $f(x)$ comme un produit : $f(x) = (x^3-1) \times \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

On pose $u(x) = x^3 - 1$ et $v(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

On a $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^3}$.

$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = ...$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f'(x) = 3x^2 \times \dfrac{1}{(x+1)^2} + \left(x^3 - 1\right) \times \left[-\dfrac{2}{(x+1)^3}\right]$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f'(x) = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - \frac{2\left(x^3-1\right)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{3x^2(x+1) - 2x^3 + 2}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 2}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

3°) **Tableau de variations de *f* :**

x	$-\infty$		α		-1		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(1+x)^3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty\,;\alpha]$ et $]-1\,;+\infty[$ (ne pas dire « sur $]-\infty\,;\alpha] \cup]-1\,;+\infty[$ »).
f est strictement décroissante sur l'intervalle $[\alpha\,;-1[$.

Dans le tableau de variations, on met l'extremum local $f(\alpha)$ (valeur exacte).

Pour l'instant, nous ne mettrons pas les limites dans les tableaux de variation.

$f(\alpha)$ est un maximum local (ce n'est pas un maximum global, comme on le voit avec les limites).
La calculatrice permet de trouver une valeur approchée de ce maximum sans calculer α.

$f(\alpha) = -6{,}9768...$

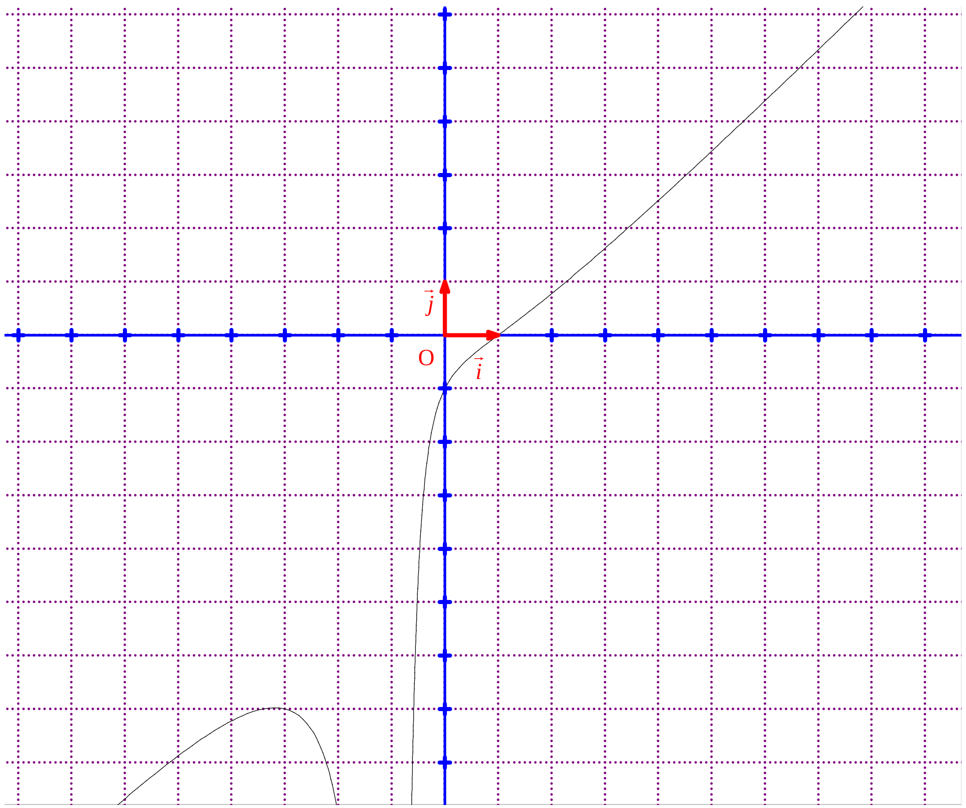
Pour cela, on utilise la calculatrice.

On commence par tracer la courbe représentative de *f*.
On prend la fenêtre graphique définie par :
Xmin = – 6 ; Xmax = 6 ; Xgrad = 1 ; Ymin = – 15 ; Ymax = 3 ; Ygrad = 1 ; Yres = 1.

Sur TI, appuyer sur les touches $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ puis choisir 4 : maximum).

On peut justifier aisément que $f(\alpha) < 0$. En effet, $\alpha < 0$ donc $\dfrac{\alpha^3 - 1}{(\alpha+1)^2} < 0$.

La représentation graphique de *f* fait apparaître une asymptote oblique.
Il manque la tangente horizontale.



Il est possible d'obtenir une expression rationnelle de $f(\alpha)$ en fonction de α.

Comme $g(\alpha) = 0$, on a $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2 = 0$. On a donc $\alpha^3 = -3\alpha^2 - 2$

Par suite, $\alpha^3 = -3\alpha^2 - 2$ d'où $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3 - 1}{(\alpha+1)^2} = \dfrac{-3\alpha^2 - 3}{(\alpha+1)^2} = -3\dfrac{\alpha^2 + 1}{(\alpha+1)^2}$.

$\boxed{11}$

$f : x \mapsto x^3 - x^2 - x - 1$

1°) **Étudions f.**

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

On considère le polynôme $3x^2 - 2x - 1$.

Les racines sont 1 (racine évidente) et $-\dfrac{1}{3}$ (obtenue par produit).

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de f		$\nearrow$	$-\dfrac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

On remplit la ligne du signe $f'(x)$ grâce à la règle du signe d'un polynôme du second degré.

$f(1) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$

$f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{22}{27}$

Dans un tableau de variations, on doit toujours écrire les extremums (c'est-à-dire que l'on doit mettre les valeurs).
Ici, la fonction f a deux extremums locaux $-\dfrac{22}{27}$ (maximum local) et -2 (minimum local).
Au pire, quand on des valeurs compliquées, on peut mettre $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ et $f(1)$.

2°) **Démontrons que l'équation $f(x) = 0 \quad (\mathrm{E})$ admet une unique solution α dans l'intervalle [1 ; 2].**

$f(x) = 0 \quad (\mathrm{E})$

Poser I …

C_1 : f est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est une fonction polynôme) donc, par restriction, sur l'intervalle $[1\,;2]$.

C_2 : $f(1) = -2$ et $f(2) = 1$ d'où $0 \in [-2\,;1]$ (0 est une valeur intermédiaire).

C_3 : f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ d'après la question 1°) donc, par restriction, sur l'intervalle $[1\,;2]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer ue l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;2]$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		1		α		2		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Aux extrémités du tableau, sur la dernière ligne, on n'est pas obligé de mettre les infinis $-\infty$ et $+\infty$ qui sont des limites. Il y aura un chapitre spécial qui expliquera comment on les trouver (« calculs de limite »).

3°) **Donnons un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 5 à l'aide de la calculatrice.**

Partie au brouillon (cachée) :

Comme f est une fonction polynôme, on peut utiliser directement l'application de la calculatrice qui permet de résoudre les équations polynomiales.

On obtient l'affichage $x_1 = 1{,}839286755$.

On a donc $\alpha = 1{,}83928675...$.

Partie rédigée :

On effectue deux calculs :

$f(1{,}83928) = -0{,}0000369532052...eee$
$f(1{,}83929) = 0{,}0000177501740...eeee$

On a $f(1{,}83928) < 0$ et $f(1{,}83929) > 0$.

Donc $1{,}83928 < \alpha < 1{,}83929$.

On peut utiliser la calculatrice pour effectuer la méthode de balayage.

Mal rédigé :

Sur [1,8 ; 1,9] on trouve $f(1{,}83) = -0{,}05 < 0$
$f(1{,}84) = 0{,}004 > 0$

Sur [1,83 ; 1,84] on trouve $f(1{,}839) = -\ \ldots < 0$
$f(1{,}84) = +\ \ldots > 0$

Sur [1,839 ; 1,840], on trouve $f(1{,}8392) < 0$

$f(1{,}8393)>0$

Sur [1,8392 ; 1,8393], on trouve $f(1{,}83928)<0$

$f(1{,}83929)>0$

Le 14-10-2013

Mieux de dire :

On a $f(1{,}8)<0$ et $f(1{,}9)>0$.

Donc $1{,}8<\alpha<1{,}9$

Sinon, on peut utiliser la commande de résolution d'une équation sur calculatrice (soit après tracé de la courbe en faisant $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (calculs) ou la commande de résolution d'une équation polynomiale dans les applications (PlySmlt2).

On obtient l'affichage 1,8392868.

Donc $1{,}83928<\alpha<1{,}83929$.

4°) **Démontrons à l'aide d'un logiciel de calcul formel que** $\alpha=\sqrt[3]{\dfrac{19+3\sqrt{33}}{27}}+\sqrt[3]{\dfrac{19-3\sqrt{33}}{27}}+\dfrac{1}{3}$.

On évalue le premier membre de l'équation pour $\sqrt[3]{\dfrac{19+3\sqrt{33}}{27}}+\sqrt[3]{\dfrac{19-3\sqrt{33}}{27}}+\dfrac{1}{3}$ (c'est-à-dire en remplaçant *x* par $\sqrt[3]{\dfrac{19+3\sqrt{33}}{27}}+\sqrt[3]{\dfrac{19-3\sqrt{33}}{27}}+\dfrac{1}{3}$).

On obtient 0.

Donc on a bien $\alpha=\sqrt[3]{\dfrac{19+3\sqrt{33}}{27}}+\sqrt[3]{\dfrac{19-3\sqrt{33}}{27}}+\dfrac{1}{3}$.

On notera bien que c'est la *valeur exacte* de α.

Cette expression résulte de la formule dite de Cardan qui donne l'expression de la solution d'une équation du troisième degré à l'aide de radicaux lorsque celle-ci n'en admet qu'une seule.

Comme $\sqrt[3]{27}=3$, on peut aussi écrire : $\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}}{3}+\dfrac{\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}}{3}+\dfrac{1}{3}$.

La notation $\sqrt[3]{x}$ désigne la **racine cubique** de *x*.
On utilise la même notation que pour la racine carrée d'un réel positif sauf que l'on ajoute un petit « 3 » qui signifie « cubique ».

Pour tout réel $x>0$, on a : $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.
Cette égalité permet d'obtenir la racine cubique d'un nombre sur calculatrice en utilisant l'exposant fractionnaire $\dfrac{1}{3}$.
On peut cependant noter que la racine cubique d'un nombre peut être obtenue à l'aide d'une fonction spéciale de la calculatrice.
Pour les calculatrices TI, appuyer sur la touche $\boxed{\text{math}}$, choisir MATH puis 5.

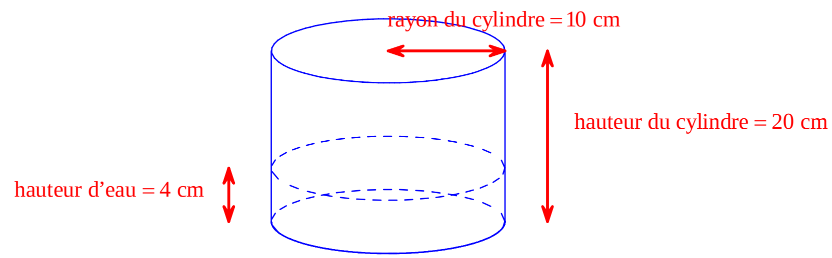
On peut démontrer que cette solution α un **nombre irrationnel**.

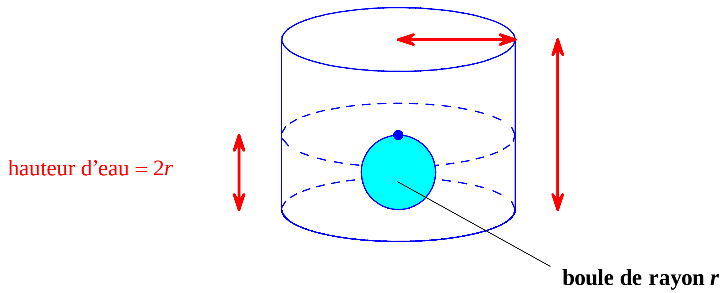
On peut noter que la calculatrice TI –Nspire donne : $\alpha=\dfrac{\left(19-3\sqrt{33}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left[\left(3\sqrt{33}+19\right)^{\frac{2}{3}}+\left(3\sqrt{33}+19\right)^{\frac{1}{3}}+4\right]}{12}$.

Cette expression est différente de celle qui a été donnée dans l'énoncé.
On peut démontrer que les deux expressions sont égales.
On notera que l'exposant 1/3 donne la racine cubique ; 2/3 : racine cubique au carré.

$\boxed{\textbf{12}}$

On commence par faire un schéma du dispositif.





On peut noter que la hauteur du cylindre n'interviendra pas dans la résolution de l'exercice.

Déterminons, à 0,1 mm près, le rayon de la boule.

Notons r le rayon de la boule en centimètres.

1°) Il faut tout d'abord noter que le rayon r de la boule est inférieur ou égal au rayon intérieur du cylindre donc $0 < r \leqslant 10$.

$r > 0$ car le volume d'une boule est strictement positif par définition (lorsque $r = 0$, la boule est réduite à un point ; on ne dit pas que c'est une boule).

Je détaille ci-dessous le calcul du volume du récipient bien que ce calcul ne soit pas nécessaire :

► Calcul du volume du récipient V_R (en cm^3) :

$$\begin{aligned} V_R &= \pi \times 10^2 \times 20 \\ &= 2000\pi \end{aligned}$$

La hauteur du récipient cylindrique donnée dans l'énoncé ne sert en fait à rien.

► Calcul du volume d'eau V_E (en cm^3) :

$$V_E = \pi \times 10^2 \times 4$$

$$V_E = 400\pi$$

► Calcul du volume de la boule V_B (en cm^3) :

$$V_B = \frac{4}{3}\pi r^3$$

► Calcul du volume final V_F (en cm^3) :

$$\begin{aligned} V_F &= V_E + V_B \\ &= 400\pi + \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Ce volume est égal au volume d'un cylindre de révolution de hauteur égale au diamètre de la boule et de rayon 10 cm.

► On peut donc écrire l'égalité $400\pi + \frac{4}{3}\pi r^3 = 200\pi r$ soit $\frac{4}{3}\pi r^3 - 200\pi r + 400\pi = 0$.

En divisant les deux membres par 4π, on obtient l'égalité équivalente à $\frac{r^3}{3} - 50r + 100 = 0$.

r est donc solution de l'équation $\frac{x^3}{3} - 50x + 100 = 0 \quad (E)$

• Il s'agit d'une équation polynomiale à une inconnue de degré 3.
Comme nous ne savons pas résoudre de manière exacte ce type d'équation, nous nous orientons vers une résolution approchée. On va donc considérer une fonction pour pouvoir appliquer le corollaire du TVI.
• On peut utiliser tout de suite la commande de résolution d'une équation polynomiale de la calculatrice.

2°) $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} - 50x + 100$

L'équation (E) s'écrit donc $f(x) = 0$.

On a intérêt à tracer tout de suite la représentation graphique de la fonction sur l'écran de la calculatrice.

On a intérêt à tracer tout de suite la représentation graphique de la fonction sur l'écran de la calculatrice.

Nous considérons la fonction f sur l'intervalle [0 ; 10] bien que nous ayons dit que $r > 0$.
En effet, cela nous rendra plus facile l'étude de la fonction.

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur l'intervalle [0 ; 10].

$\forall x \in [0\,;10] \qquad f'(x) = x^2 - 50$

La dérivée s'annule pour $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

x	0	α	$5\sqrt{2}$	10
Signe de $f'(x)$	$-$		0	$+$
Variations de f	100 ↘	0	$f(5\sqrt{2})$ ↗	$-\frac{200}{3}$

$f(10) = -\frac{200}{3}$

Le calcul de $f\left(5\sqrt{2}\right)$ n'est pas utile.
Je donne quand même le détail ci-dessous.

$$f\left(5\sqrt{2}\right)=\frac{4}{3}\times\left(5\sqrt{2}\right)^3-200\times5\sqrt{2}+400$$
$$=\frac{4}{3}\times250-1000\sqrt{2}+400$$
$$=\frac{1000\sqrt{2}}{3}-\frac{3000\sqrt{2}}{3}+\frac{1200}{3}$$
$$=\frac{1200-2000\sqrt{2}}{3}$$
$$=\frac{400\left(3-5\sqrt{2}\right)}{3}$$

$f\left(5\sqrt{2}\right)=-542,8090416...$

Rédaction :

On pose $\mathrm{I}=\left[0\,;5\sqrt{2}\right]$ et $\mathrm{J}=\left[5\sqrt{2}\,;10\right]$.

On étudie le nombre de solutions de l'équation (E) dans chacun de ces deux intervalles.

• On se place dans l'intervalle I.

(C_1) : La fonction *f* est une fonction polynôme donc elle est continue sur $[0\,;10]$ et, par restriction, sur I.

(C_2) : La fonction *f* est strictement décroissante sur I.

(C_3) : On a : $f(0)>0$ et $f\left(5\sqrt{2}\right)<0$ (la valeur $-\dfrac{200}{3}$ du tableau de variations nous permet de le dire tout de suite sans effectuer de calcul).

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle I.

• On se place dans l'intervalle J.

Sur l'intervalle J, la fonction *f* est à valeurs strictement négatives, donc l'équation (E) n'admet pas de solution dans cet intervalle.

Sur J, le problème est réglé sans utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Conclusion :

L'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;10]$.

Ancienne version de la rédaction : moins bonne car moins claire

On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $\left[0\,;5\sqrt{2}\right]$ (morceau d'intervalle où il y a un changement de signe).
$f(0)>0$ et $f\left(5\sqrt{2}\right)<0$
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[0\,;5\sqrt{2}\right]$.

$f(10)<0$ donc $f\left(5\sqrt{2}\right)<0$ (car *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left[5\sqrt{2}\,;10\right]$; il est donc inutile de se fatiguer à calculer $f\left(5\sqrt{2}\right)$)

On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $\left[0\,;5\sqrt{2}\right]$ (morceau d'intervalle où il y a un changement de signe).

$f(0)>0$ et $f\left(5\sqrt{2}\right)<0$
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[0\,;5\sqrt{2}\right]$.

Thomas Delamarre le 15-10-2013

On pourrait exclure les deux bornes de l'intervalle I auquel appartient α à chaque fois à cause du calcul.
Exemple : $\alpha\in\left]0\,;5\sqrt{2}\right[$.

On en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [0 ; 10] (car *f* ne prend que des valeurs strictement négatives sur l'intervalle $\left[5\sqrt{2}\,;10\right]$).

3°) On peut utiliser par exemple l'application de la calculatrice qui permet de résoudre des équations polynomiales.

D'après la calculatrice, on a : $\alpha=2,058\,119\,300\,266\ldots$.

On peut donc écrire $2,05<\alpha<2,06$.

Conclusion de l'exercice :

D'après ce résultat, $r\approx2,1$ (valeur arrondie au dixième).
Le rayon de la boule est environ égal à 2,1 cm.

On peut aussi déterminer un encadrement de α à l'aide de la méthode de balayage.

On aurait aussi pu considérer la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 50x + 100$ (en simplifiant directement dès le début l'équation par 4).

Avec la calculatrice TI –Nspire on trouve les expressions suivantes des 3 solutions dans :

$$-5\times\left(\cos\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{41}}{41}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{41}}{41}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\times\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}$$

$$\frac{6}{\cos\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{16\sqrt{41}}{123}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{16\sqrt{41}}{123}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\times\sqrt{3}+1}$$

$$\frac{5\left(\cos\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{16\sqrt{41}}{123}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{16\sqrt{41}}{123}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\times\sqrt{3}+1\right)\times\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{41}}{41}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{41}}{41}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\times\sqrt{3}}$$

Avec Cardan : l'équation se met sous la forme $x^3 - 150x + 300 = 0$.

Elle est donc de la forme $x^3 + px + q = 0$ avec $p = -150$ et $q = 300$.

On a : $4p^3 + 27q^2 < 0$.
Donc l'équation admet trois solutions réelles.

On ne peut appliquer la formule de Cardan.

Il serait intéressant de faire l'expérience réelle, ce qui nécessiterait quelque matériel.

Ce n'est pas à cause des π que l'on ne sait pas résoudre cette équation, comme me l'ont dit des élèves de Terminale le 17-10-2014.

Avec la calculatrice, on trouve 3 solutions :

X1=– 13,14611823
X2=11,08799893
X3=2,0581193

La racine douzième d'un nombre est utilisée dans les gammes : construction de la gamme de Pythagore à l'aide de 12 notes $\sqrt[12]{2}$.

Classification des exercices (par savoir-faire)

Isoler les zéros d'une équation polynomiale du 3^{e} degré

Savoir-faire annexes

Déterminer l'amplitude d'un encadrement (savoir calculer l'amplitude d'un encadrement).