TS1

Contrôle du jeudi 18 octobre 2012 (50 minutes)

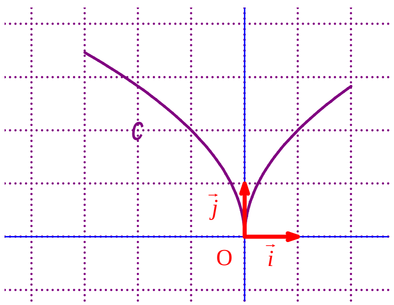
Prénom et nom : ……………………………….

Note : ……/20

• Écrire très lisiblement, au stylo à plume, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

• Ne rien écrire d'autre que ce qui est demandé, ne rien surligner sur l'énoncé.

I. (2 points) La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left[-3\,;2\right]$ dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.



On répondra sans justifier.

Le tracé permet-il de penser que :

• f est dérivable sur I ? ☐ oui ☐ non

• f est continue sur I ? ☐ oui ☐ non

II. (5 points) Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f définie sur un intervalle I.
Compléter la colonne de droite donnant l'expression de $f'(x)$ dans chaque cas.
Écrire un seul résultat à chaque fois (faire les calculs au brouillon).

1°)	$f(x)=\sqrt{5x+1}$	$\mathrm{I}=\left]-\dfrac{1}{5}\,;+\infty\right[$	$f'(x)=$ ……………………………………………………
2°)	$f(x)=\sin(3x)$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=$ ……………………………………………………
3°)	$f(x)=\sin^3(4x)$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=$ ……………………………………………………
4°)	$f(x)=\left(x^5+1\right)\left(3x^2-1\right)$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=$ ……………………………………………………
5°)	$f(x)=\dfrac{5x-4}{x^2+1}$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=$ ……………………………………………………

III. (5 points) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

1°) Calculer $f'(x)$ en donnant le résultat sous forme simplifiée et factorisée.

2°) Dresser un tableau récapitulatif donnant le signe de la dérivée et les variations de la fonction f.

3°) On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point O (inutile de détailler).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

………

………

………

………

………

………

IV. (4 points) On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;10]$ par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 15$.
On donne ci-dessous son tableau de variation.

x	0		1		5		10
Variations de *f*	15	↗	22	↘	– 10	↗	265

1°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle [1 ; 5].
2°) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de x_0 par deux décimaux consécutifs d'ordre 5 (aucune explication n'est demandée).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

V. (4 points) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Compléter l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel qui demande une valeur de *n* à l'utilisateur et qui affiche la valeur de S_n en sortie.

Bonus :
Trouver et démontrer une formule simplifiée de S_n en fonction de *n*.

Entrée :

……………………………………………

Initialisation :

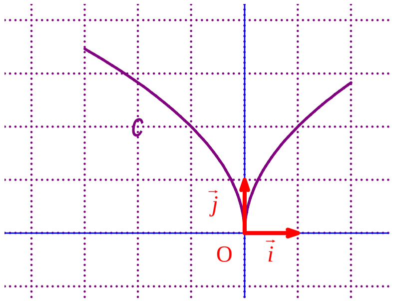
……………………………………………

Traitement :
Pour ……………………………… **Faire**
  ………………………………………………
FinPour

Sortie :
Afficher …………

Corrigé du contrôle du 18-10-2012

I.



• f est dérivable sur I ? ☐ oui ☒ **non** (à cause du point O en lequel il semble que la courbe admette deux demi-tangentes verticales confondues)

• f est continue sur I ? ☒ **oui** ☐ non

II.

1°)	$f(x)=\sqrt{5x+1}$	$\mathrm{I}=\left]-\dfrac{1}{5};+\infty\right[$	$f'(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}$
2°)	$f(x)=\sin(3x)$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=3\cos(3x)$
3°)	$f(x)=\sin^3(4x)$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=12\sin^2(4x)\times\cos(4x)$
4°)	$f(x)=(x^5+1)(3x^2-1)$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=21x^6-5x^4+6x$
5°)	$f(x)=\dfrac{5x-4}{x^2+1}$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=\dfrac{-5x^2+8x+5}{(x^2+1)^2}$

III. $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

1°) **Calculons $f'(x)$.**

f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\quad f'(x)=1\times\frac{1}{(x+1)^2}+x\times\left(-\frac{2\times1}{(x+1)^3}\right)$$
$$=\frac{x+1-2x}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{1-x}{(x+1)^3}$$

Pour calculer la dérivée, on a écrit $f(x)$ en produit.

2°) **Dressons un tableau récapitulatif donnant le signe de la dérivée et les variations de la fonction *f*.**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1-x$		+		+	0	–	
Signe de $(x+1)^3$		–	0	–	0	+	
Signe de $f'(x)$		–	‖	+	0	–	
Variations de f		↘	‖	↗	$\frac{1}{4}$	↘	

3°) $\mathcal{C}$: représentation graphique de f dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$

Déterminons une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point O.

T a pour équation $y = x$.

IV. $f(x)=x^3-9x^2+15x+15$

x	0		1		5		10
Variations de f			22				265
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	15				-10		

1°) **Démontrons que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle [1 ; 5].**

f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et, par restriction, sur l'intervalle [1 ; 5].

f est strictement décroissante sur l'intervalle [1 ; 5].

$f(1)=22$ et $f(5)=-10$

$0\in\left[f(5)\,;\,f(1)\right]$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle [1 ; 5].

2°) **Déterminons un encadrement de x_0 par deux décimaux consécutifs d'ordre 5.**

Avec la calculatrice, on obtient $x_0=3,51112743816...$.

On en déduit l'encadrement : $3,51112<x_0<3,51113$.

J'aurais dû demander le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [1 ; 5] suivant les valeurs de x.

V. Algorithmique

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+1)}\quad\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

Entrée :

Saisir n (entier naturel non nul)

Initialisation :

S prend la valeur 0

Traitement :

Pour k allant de 1 à n **Faire**

  S prend la valeur $S+\dfrac{1}{k(k+1)}$

FinPour

Sortie :

Afficher S

Commentaire :

On nomme une variable S dont le contenu final aura pour valeur la somme S cherchée.

La variable S doit initialisée à 0 avant la boucle (c'est-à-dire que l'initialisation sera : « S prend la valeur 0 »).

La variable k n'apparaît ni avant ni après la boucle « Pour ».

Autre proposition (Vincent Espérance) :

Cette solution, assez maladroite dans le traitement de la boucle « Pour » (et donc à éviter), marche cependant lorsqu'on réalise le programme sur calculatrice.

Entrée :

Saisir n (entier naturel non nul)

Initialisation :

S prend la valeur 0
k prend la valeur 1

Traitement :
Pour i allant de 1 à n **Faire**

S prend la valeur $S+\dfrac{1}{k(k+1)}$

k prend la valeur k + 1

FinPour

Sortie :
Afficher S

Bonus :

Trouvons une formule explicite de S_n en fonction de n.

Il ne s'agit pas de la somme des termes d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.

Il faut donc chercher en effectuant quelques calculs à la main ou en utilisant un programme sur calculatrice (ou la commande de calcul d'une somme sur calculatrice).

Les essais permettent de penser $S_n=\dfrac{n}{n+1}$.

On peut alors démontrer cette formule de plusieurs manières.

Le plus simple est d'utiliser une récurrence.

$S_1=\dfrac{1}{2}$, $S_2=\dfrac{2}{3}$, $S_3=\dfrac{3}{4}$ …

Il semble que l'on puisse penser $S_n=\dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n>0$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $S_k=\dfrac{k}{k+1}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(1)$ est vraie.

On a : $S_1=\dfrac{1}{2}$.

Donc on peut $S_1=\dfrac{1}{1+1}$.

D'où $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k non nul tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $S_k=\dfrac{k}{k+1}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $S_{k+1}=\dfrac{k+1}{k+2}$.

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= \sum_{p=1}^{p=k+1} \frac{1}{p(p+1)} \\ &= \sum_{p=1}^{p=k} \left(\frac{1}{p(p+1)}\right) + \frac{k+1}{k+2} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2}\end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Autre façon :

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

On écrit les égalités pour $p \in \{1\,;2\,;\ldots;n\}$ les unes en dessous des autres.

$$\frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

…

$$\frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

On simplifie ensuite la somme (méthode de télescopage).