TS Exercices sur la continuité (1)

Pour les exercices **6** et **8**, lire le complément sur les fonctions périodiques donné en appendice.

1 On note f la fonction définie sur l'intervalle $\text{I}=[0\,;7]$ par $f(x)=\dfrac{x}{2}$ sur $[0\,;4[$ et $f(x)=3$ sur $[4\,;7]$.

Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans un repère $(\text{O},\vec{i},\vec{j})$ (prendre un centimètre pour unité graphique).

On fera particulièrement attention à bien marquer les points d'arrêt.
La fonction f est-elle continue sur I ?

2 On note f la fonction définie sur l'intervalle $\text{I}=[0\,;8]$ par $f(x)=x$ sur $[0\,;4]$ et $f(x)=8-x$ sur $]4\,;8]$.

Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans un repère $(\text{O},\vec{i},\vec{j})$ (prendre un centimètre pour unité graphique).

La fonction f est-elle continue sur I ?

3 En physique, lors de l'étude de systèmes en automatique, intervient la fonction de Heaviside (ou fonction échelon-unité). Oliver Heaviside est un physicien anglais (1850-1925).

Cette fonction est notée H et est définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{H}(x)=0$ si $x<0$ et $\text{H}(x)=1$ si $x\geqslant 0$.

Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de H dans un repère $(\text{O},\vec{i},\vec{j})$ (prendre deux centimètres pour unité graphique).

La fonction H est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

4 Les tarifs postaux applicables en France métropolitaine peuvent être modélisés en juillet 2011 par une fonction f qui fait correspondre à la masse x d'une lettre, en grammes, le tarif $f(x)$ d'envoi, en euros, de ce courrier.

La fonction f est définie sur $]0\,;250]$ par :

$f(x)=0{,}60$ si $x\in\,]0\,;20]$;

$f(x)=1$ si $x\in\,]20\,;50]$;

$f(x)=1{,}45$ si $x\in\,]50\,;100]$;

$f(x)=2{,}4$ si $x\in\,]100\,;250]$.

Cette fonction est-elle continue sur $]0\,;250]$?

5 Rappeler la définition de la partie entière d'un réel x.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\text{E}(x)=1$ (1) ; $\text{E}(x)=-1$ (2) ; $\text{E}(x)=\dfrac{1}{3}$ (3).

On notera S_1, S_2, S_3 les ensembles de solutions respectifs.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\text{E}(2x)=3$ (4) ; $\text{E}(x+5)=3$ (5) ; $\text{E}(-x)=-3$ (6) ; $\text{E}(x^2)=0$ (7).

On notera S_4, S_5, S_6, S_7 les ensembles de solutions respectifs.

6 On considère la fonction $f : x \mapsto x\text{E}(x)$.

1°) Exprimer $f(x)$ en fonction de x pour $x\in[-1\,;3]$.

2°) Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-1\,;3]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O},\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm (ou un « gros » carreau).

Prendre une demi-page complète.
On soignera particulièrement les « points d'arrêt » de la représentation graphique.
On pourra vérifier à l'aide de la calculatrice graphique.

7 On considère la fonction $f : x \mapsto x-\text{E}(x)$.

La fonction f est appelée fonction **« partie décimale »**.
1°) Démontrer que f est périodique de période 1. À quel intervalle peut-on limiter l'étude de f ?
2°) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O},\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm ou 2 « gros » carreaux).
On soignera particulièrement les « points d'arrêt » de la représentation graphique.
On pourra vérifier à l'aide de la calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbe.

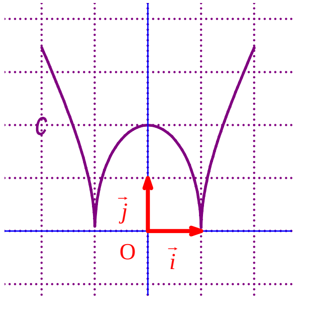
8 On considère la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\text{E}(x)\right)$.

1°) Démontrer que f est périodique de période 4. Donner un intervalle auquel on peut limiter l'étude de f.

2°) Tracer la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\text{O},\vec{i},\vec{j})$ en prenant pour unités graphiques 1 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée (ou 1 « gros » carreau en abscisse et 4 « gros » carreaux en ordonnée).
On soignera particulièrement les « points d'arrêt » de la représentation graphique.
On pourra vérifier à l'aide de la calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbe.

9 La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $\text{I}=[-2\,;2]$.

Reproduire la courbe $\mathcal{C}$ « à main levée ».
Le tracé permet-il de penser que :
- f est dérivable sur I ?
- f est continue sur I ?



Fonctions périodiques

Définition :

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **périodique de période T** $(\mathrm{T} > 0)$ pour exprimer que pour tout réel x on a : $f(x+\mathrm{T}) = f(x)$.

Exemple :

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

Propriété :

La représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ périodique de période T $(\mathrm{T} > 0)$ dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est globalement invariante par la translation de vecteur $\mathrm{T}\,\vec{i}$.

On a un motif qui se répète.

Conséquence :

On peut étudier une fonction périodique de période T sur un intervalle d'amplitude T (par exemple $\left[0\,;\mathrm{T}\right[$).

Remarque :

Cette année, la période sera toujours donnée.

Corrigé des exercices

Ces exercices portent sur l'approche graphique de la notion de continuité.

Tous les exercices sauf l'exercice $\boxed{5}$ portent sur des fonctions définies par intervalles (l'exercice $\boxed{4}$ montre un exemple de fonction non continue issue d'une situation concrète ; les exercices $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ utilisent la partie entière).

Les premiers exercices font appel aux compétences de rédaction suivantes :
- parler d'une fonction ;
- parler de la représentation graphique d'une fonction.

Les premiers exercices font appel à des fonctions définies par intervalles.

On dit qu'une fonction est définie par intervalles si :

- son ensemble de définition est une réunion d'intervalles disjoints * ;
- son expression est donnée sur chaque intervalle.

* On entend par « intervalle », intervalle non vide et non réduit à un singleton (sinon, toute fonction pourrait être définie par intervalles, en prenant des intervalles réduits à un élément).

$\boxed{1}$

***f* est définie sur $\mathrm{I}=[0\,;7]$ par $f(x)=\dfrac{x}{2}$ si $x\in[0\,;4[$ et $f(x)=3$ si $x\in[4\,;7]$**

La fonction *f* est définie par intervalles sur I (on peut dire d'une mauvaise manière, que « la fonction *f* est en deux parties »).

En effet :

- l'intervalle $[0\,;7]$ est la réunion des intervalles $[0\,;4[$ et $[4\,;7]$ qui sont disjoints ;

- l'expression de *f* sur l'intervalle $[0\,;4[$ est donnée par $f(x)=\dfrac{x}{2}$ (expression affine) ; l'expression de *f* sur l'intervalle $[4\,;7]$ est données par $f(x)=3$ (expression constante).

Autrement dit, la fonction est définie par deux expressions suivant l'intervalle auquel appartient *x*.

La fonction *f* est donc affine par intervalles.

$\mathrm{I}=[0\,;7]$

$\mathrm{I}_1=[0\,;4[$

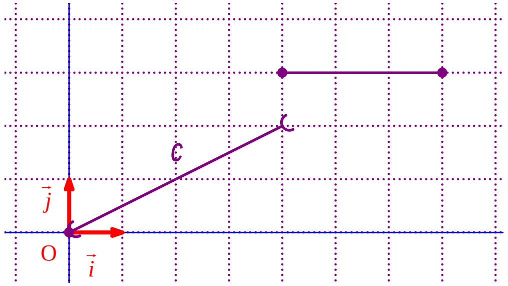
$\mathrm{I}_2=[4\,;7]$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{si } x\in\mathrm{I}_1\\[2mm] 3 & \text{si } x\in\mathrm{I}_2\end{cases}$$

Attention : $4\in\mathrm{I}_2$ donc $f(4)=3$.

Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de *f* dans un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ (prendre un centimètre pour unité graphique).

On fera particulièrement attention à bien marquer les points d'arrêt.
La fonction *f* est-elle continue sur I ?



La représentation graphique $\mathcal{C}$ de *f* est la réunion de deux segments : un segment semi-ouvert et un segment fermé (pour le premier segment, on utilise deux points).

Attention à bien mettre les points d'arrêt.
Les points d'arrêt (inclus ou non-inclus) sont placés par rapport aux intervalles.
On prendra garde que quand on dit « inclus » ou « non-inclus » c'est du mauvais vocabulaire.
On doit dire appartenant ou n'appartenant pas.

La fonction *f* n'est pas continue sur I (car il y a une rupture ou un « décrochement » au point d'abscisse 4).

$\boxed{2}$

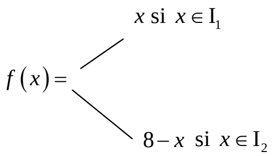
f est définie sur $\mathrm{I} = [0\,;8]$ par $f(x) = x$ si $x \in [0\,;4]$ et $f(x) = 8 - x$ si $x \in]4\,;8]$.

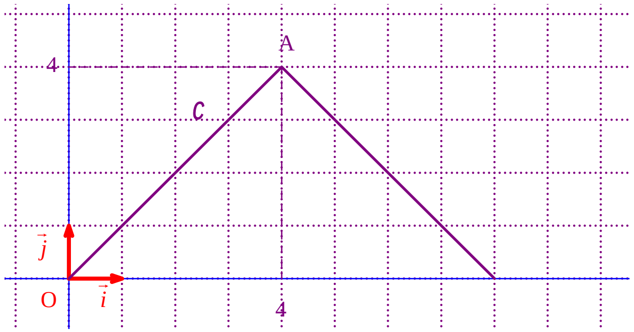
La fonction f est une fonction *affine par intervalles*.

$\mathrm{I} = [0\,;8]$

$\mathrm{I}_1 = [0\,;4]$

$\mathrm{I}_2 =]4\,;8]$





La représentation graphique $\mathcal{C}$ de f est la réunion de deux segments de droites : un segment fermé et un segment ouvert (pour tracer ces deux segments on utilise deux points).

Ces deux segments se raccordent au point $\mathrm{A}(4\,;4)$ (il y a un raccordement parfait).

La fonction f est continue sur I.

Cette année on ne peut pas démontrer mathématiquement qu'une fonction est continue sur un intervalle.

Peut-on déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x ?

On peut démontrer que f est définie par $f(x) = 4 - |x - 4|$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

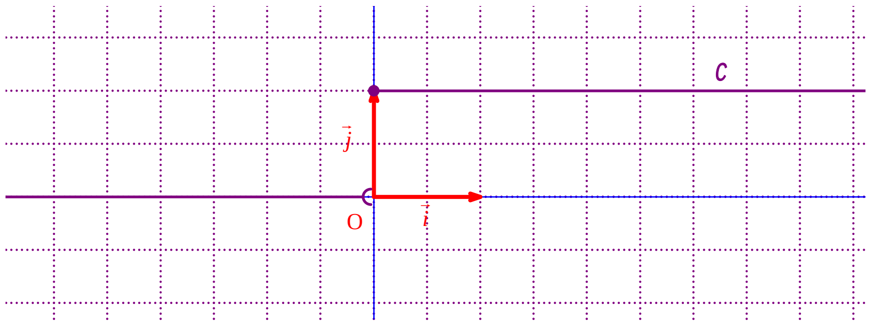
$\boxed{3}$ **Fonction de Heaviside (ou fonction échelon-unité)**

H est définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{H}(x) = 0$ si $x < 0$ et $\mathrm{H}(x) = 1$ si $x \geqslant 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad \mathrm{H}(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \mathrm{H}(x) = 1$

La fonction H est constante égale à 0 sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et constante égale à 1 sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
On dit que la fonction H est *constante par intervalles*.



La représentation graphique $\mathcal{C}$ de f est la réunion d'une demi-droite ouverte et d'une demi-droite fermée.

La fonction H n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (discontinuité en 0).

La fonction H n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (« décrochage » en 0).

En revanche, elle est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cette fonction intervient en physique (exemple : établissement d'un courant électricité d'intensité constante dans un circuit au moment où l'on ferme l'interrupteur ; en fait, il n'y a pas de discontinuité).

$\boxed{4}$ **Tarifs postaux**

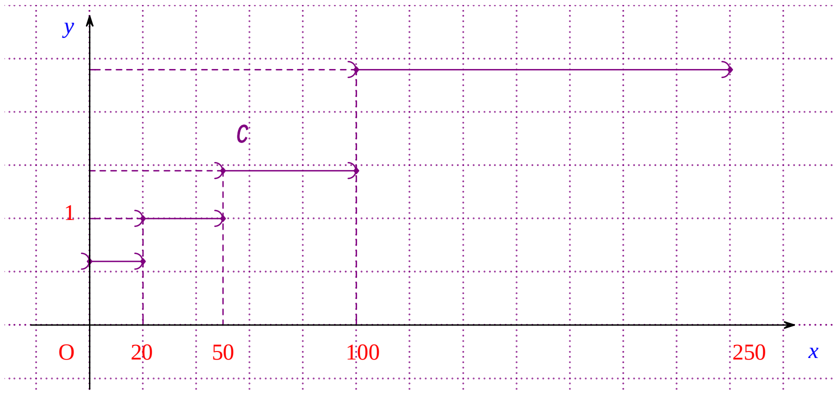
Il s'agit d'un exemple concret d'utilisation de la continuité.

La fonction f est définie sur $]0\,;250]$ par :
$f(x) = 0{,}60$ si $x \in]0\,;20]$;
$f(x) = 1$ si $x \in]20\,;50]$;
$f(x) = 1{,}45$ si $x \in]50\,;100]$;
$f(x) = 2{,}4$ si $x \in]100\,;250]$.

Les tarifs postaux peuvent être modélisés par une fonction constante par intervalles (tous les intervalles sont ouverts à gauche, fermés à droite).

On trace la représentation graphique de f dans un repère orthogonal du plan.

On ne représente pas les vecteurs unités sur les axes.
Par contre, on rajoute des flèches (au bout des axes).



La fonction *f* n'est pas continue sur $]0\,;250]$ (il y a trois discontinuités en 20, 50, 100).

On l'affirme sans le démontrer.
On pourrait le voir graphiquement en traçant la représentation graphique de *f*.

On notera le tarif postal n'est pas proportionnel à la masse. Il fonctionne par « tranches ».
Ce n'est pas très logique. La Poste a décidé cette tarification pour simplifier.

5 Équations et inéquations avec la partie entière

1°) $S_1=[1\,;2[$; $S_2=[-1\,;0[$; $S_3=\varnothing$.

2°) $S_4=\left[\frac{3}{2}\,;2\right[$; $S_5=[-2\,;-1[$; $S_6=]2\,;3]$; $S_7=]-1\,;1[$.

Solution détaillée :

On rappelle la définition.

La partie entière d'un réel *x* est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à *x*.

1°)

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x)=1$ (1).

On cherche les réels *x* dont la partie entière est égale à 1.
On cherche en fait les antécédents de 1 par la fonction « partie entière ».

$(1) \Leftrightarrow 1\leqslant x<2$

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1=[1\,;2[$.
On peut retrouver ce résultat graphiquement en utilisant la représentation graphique de la fonction « partie entière ».

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x)=-1$ (2).

$(2) \Leftrightarrow -1\leqslant x<0$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2=[-1\,;0[$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x)=\frac{1}{3}$ (3).

On cherche les nombres réels *x* éventuels dont la partie entière est égale à $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$

Or la partie entière d'un nombre est un entier relatif.
Donc l'équation (3) n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de (3) est $S_3=\varnothing$.

2°)

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(2x)=3$ (4).

$(4) \Leftrightarrow 3\leqslant 2x<4$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\leqslant x<2$

L'ensemble des solutions de (4) est $S_4=\left[\frac{3}{2}\,;2\right[$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x+5)=3$ (5).

$(5) \Leftrightarrow 3\leqslant x+5<4$

$\Leftrightarrow -2\leqslant x<-1$

L'ensemble des solutions de (5) est $S_5=[-2\,;-1[$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(-x)=-3$ (6).

$(6) \Leftrightarrow -3\leqslant -x<-2$

$\Leftrightarrow 3\geqslant x>2$ (on multiplie par – 1 les deux membres de l'inégalité précédente)

L'ensemble des solutions de (6) est $S_6=]2\,;3]$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x^2)=0$ (7).

$(7) \Leftrightarrow 0\leqslant x^2<1$ ($x^2\geqslant 0$ est toujours vraie donc on peut enlever cette inégalité)

$\Leftrightarrow x^2<1$

$\Leftrightarrow -1<x<1$

Commentaires sur les deux dernières lignes :
$0 \leqslant x^2$ est toujours vraie donc on laisse tomber cette condition.

Pour résoudre l'inéquation $x^2 < 1$, il y a quatre méthodes :

1$^{\text{ère}}$ méthode	**2$^{\text{e}}$ méthode**	**3$^{\text{e}}$ méthode**	**4$^{\text{e}}$ méthode (variante de la 2$^{\text{e}}$ méthode)**
$x^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1}$ $\Leftrightarrow \lvert x \rvert < 1$ $\Leftrightarrow -1 < x < 1$	$x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0$ $\Leftrightarrow -1 < x < 1$ en utilisant un tableau de signes	Graphiquement On utilise la parabole représentative de la fonction « carré ».	$x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0$ $x^2 - 1$ est un trinôme dont les racines sont – 1 et 1. On applique la règle du signe d'un trinôme.

L'ensemble des solutions de (7) est $S_7 = \left]-1\,;1\right[$.

Dans les exercices $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, on étudie des fonctions « bricolées » (ou « fabriquées ») à partir de la fonction « partie entière ».

$\boxed{6}$

$f : x \mapsto x\mathrm{E}(x)$

L'ensemble de définition de *f* est $\mathbb{R}$.

1°) **Expression de *f* sur l'intervalle $[-1\,;3]$**

- Si $x \in [-1\,;0[$, alors $\mathrm{E}(x) = -1$ et donc $f(x) = -x \quad (x \times (-1) = -x)$.
- Si $x \in [0\,;1[$, alors $\mathrm{E}(x) = 0$ et donc $f(x) = 0 \ (x \times 0 = 0)$.
- Si $x \in [1\,;2[$, alors $\mathrm{E}(x) = 1$ et donc $f(x) = x \ (x \times 1 = x)$.
- Si $x \in [2\,;3[$, alors $\mathrm{E}(x) = 2$ et donc $f(x) = 2x \ (x \times 2 = 2x)$.
- $f(3) = 3\mathrm{E}(3) = 3 \times 3 = 9 \qquad (\mathrm{E}(3) = 3$ car 3 est un entier relatif)

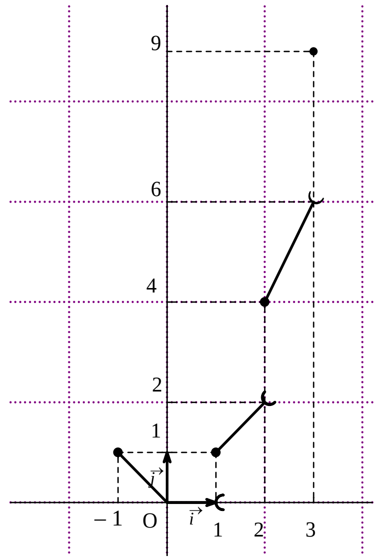
N.B. : La restriction de *f* à tout intervalle de la forme $[n\,;n+1[$ où n est un entier relatif est linéaire.
En effet, $\forall x \in [n\,;n+1[\quad f(x) = nx$.

La fonction *f* est une fonction *affine par intervalles*.

2°) **Tracé de la représentation graphique de *f* sur l'intervalle $[-1\,;3]$**

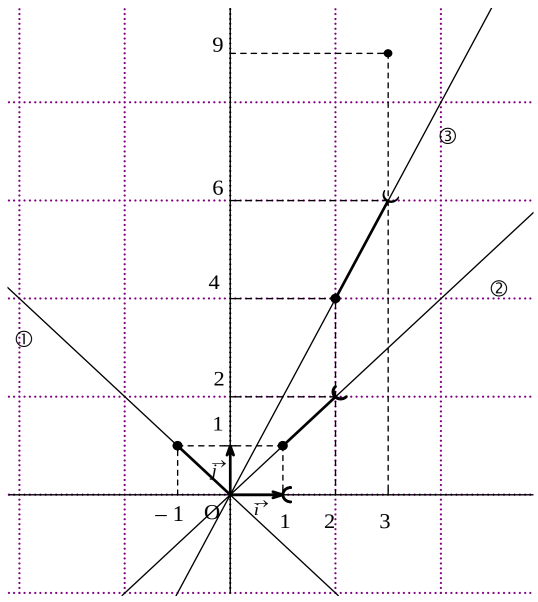
On trace la fonction intervalle par intervalle.

On trace les droites d'équations réduites $y = 2x$, $y = x$, $y = -x$.
Attention à bien « matérialiser » sur le graphique les extrémités des segments (ouvertes ou fermées).
La représentation graphique est constituée de segments de droites et d'un point.



N. B. : On retrouve un peu ici le même mode de raisonnement que pour les algorithmes.

Méthode :



① Pour $x \in [-1;0[$, $f(x) = -x$; on trace la droite D_1 d'équation $y = -x$ et on prend juste la partie pour $x \in [-1;0[$.

② Pour $x \in [1;2[$, $f(x) = x$; on trace la droite D_2 d'équation $y = x$ et on prend juste la partie pour $x \in [1;2[$.

③ Pour $x \in [2;3[$, $f(x) = 2x$; on trace la droite D_3 d'équation $y = 2x$ et on prend juste la partie pour $x \in [2;3[$.

Pour les tracés de droites, on a besoin de deux points.

D_1 : $y = -x$ passe par les points de coordonnées (0 ; 0), (1 ; – 1), (2 ; – 2) etc.
D_2 : $y = x$ passe par les points de coordonnées (0 ; 0), (1 ; 1), (2 ; 2) etc.
D_3 : $y = 2x$ passe par les points de coordonnées (0 ; 0), (1 ; 2) (pour $x = 1$, on a $y = 2 \times 1 = 2$), (2 ; 4) (pour $x = 2$, on a $y = 2 \times 2 = 4$), (3 ; 6) (pour $x = 3$, on a $y = 2 \times 3 = 6$) etc.

On observe un bon raccordement de la représentation graphique de *f* au point O. Cela explique que le point O ne présente aucune marque particulière. La fonction *f* est continue en 0.

La fonction *f* est discontinue en 1, en 2, en 3.
On peut cependant remarquer que *f* est continue en 1 à droite, mais n'est pas continue en 1 à gauche.
De même en 2.
On peut affirmer cela « intuitivement » en observant le graphique (car on est obligé de lever le crayon pour tracer la représentation graphique de *f*), mais on peut également le démontrer rigoureusement en étudiant la limite.

Regarder avec la calculatrice ce que donne la représentation graphique de la fonction *f*.

On ne va pas mettre de crochet ouvert en O (raccordement en O).

On peut tracer la représentation graphique de *f* sur la calculatrice en rentrant la fonction $\text{Y1} = \text{X} * \text{partEnt}(\text{X})$.
(partEnt s'obtient en tapant sur la touche $\boxed{\text{math}}$ puis NUM ou NBRE puis choix 5).

$\boxed{7}$

***f* : $x \mapsto x - \text{E}(x)$**

L'ensemble de définition de *f* est $\mathbb{R}$.

1°) **Démontrons que *f* est périodique de période 1.**

On démontre que pour tout réel *x*, on a : $f(x+1) = f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x+1) = x + 1 - \text{E}(x+1)$
$= x + 1 - \text{E}(x) - 1$ (on applique la propriété $\text{E}(x+n) = \text{E}(x) + n$ pour tout réel *x* et pour tout entier relatif *n*)
$= x - \text{E}(x)$
$= f(x)$

Donc la fonction *f* est périodique de période 1.
On limite l'étude de f à l'intervalle $[0;1[$ (intervalle d'amplitude 1).

2°) **Représentation graphique de *f***

Pour tout $x \in [0;1[$, on a $\text{E}(x) = 0$ donc $f(x) = x - \text{E}(x) = x - 0 = x$ (on remplace uniquement la partie entière par 0).

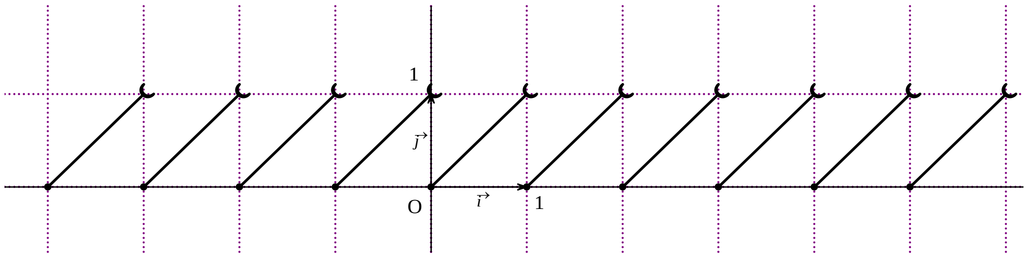
La fonction *f* est périodique de période 1 donc sa représentation graphique est globalement invariante par la translation de vecteur $\vec{i}$ (le vecteur $\vec{i}$ est le premier vecteur de base du repère).

La représentation graphique de *f* est constituée de segments de droite fermés à gauche, ouverts à droite.
On trace la représentation graphique de *f* sur $\mathbb{R}$ (pas seulement sur $[0;1[$).

Méthode pour le tracé :

On trace d'abord la portion de représentation graphique sur $[0;1[$.
On trace la droite Δ d'équation $y = x$. On sélectionne la partie de la droite pour $x \in [0;1[$.
On obtient le segment $[\text{OA}[$ où A est le point de coordonnées $(1;1)$ (ce segment est fermé en O, ouvert en A).

On effectue des translation de vecteur $k\vec{i}$ avec où $k \in \mathbb{Z}$.



f n'est pas continue en tout entier relatif (cependant, en tout entier relatif, *f* est continue à droite, mais n'est pas continue à gauche). On peut affirmer cela « intuitivement » en observant le graphique (car on est obligé de lever le crayon en tout entier relatif pour tracer la représentation graphique de *f*), mais on peut également le démontrer rigoureusement en étudiant la limite à gauche et la limite à droite en un entier relatif.

On peut tracer la représentation graphique de *f* sur la calculatrice en rentrant la fonction $\text{Y1} = \text{partEnt}(\text{X}) - \text{X}$.
On évite d'utiliser la fonction partie décimale de la calculatrice (partDéc) : sa représentation graphique diffère de celle que nous étudions dans l'exercice sur $\mathbb{R}_-$).
Pour afficher la représentation graphique d'une fonction avec une partie entière, il faut appuyer sur la touche $\boxed{\text{mode}}$ puis choisir Dot ou Non Relié.

$\boxed{\text{mode}}$ → Connected   <u>Dot</u>
Relié   Non<u>Relié</u>

8

$\boldsymbol{f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{E}(x)\right)}$

L'ensemble de définition de *f* est $\mathbb{R}$.

1°) **Démontrons que *f* est périodique de période 4.**

On vérifie que pour tout réel *x*, on a : $f(x+4)=f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+4)=\sin\left[\frac{\pi}{2}\mathrm{E}(x+4)\right]$

$=\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{E}(x)+4\right)\right]$ (propriété de la partie entière : $\mathrm{E}(x+p)=\mathrm{E}(x)+p$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $p\in\mathbb{Z}$)

$=\sin\left[\frac{\pi}{2}\mathrm{E}(x)+\frac{\pi}{2}\times 4\right]$

$=\sin\left[\frac{\pi}{2}\mathrm{E}(x)+2\pi\right]$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{E}(x)\right)$ (propriété de la fonction sinus : la fonction sinus est périodique de période 2π)

$=f(x)$

Donc la fonction *f* est périodique de période 4.

On peut limiter l'étude de *f* à un intervalle d'amplitude 4, par exemple $[0\,;4[$ (on observera que le crochet est fermé en 0 et ouvert en 4). On peut prendre n'importe quel intervalle d'amplitude 4 ; on peut prendre par exemple $[2\,;6[$, mais le plus « logique » est $[0\,;4[$.

2°) **Représentation graphique de *f***

On détermine l'expression de *f* sur $[0\,;4[$. Pour cela, on subdivise l'intervalle en 4 sous-intervalles.

Si $x\in[0\,;1[$, alors $f(x)=\sin 0=0$.

Si $x\in[1\,;2[$, alors $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

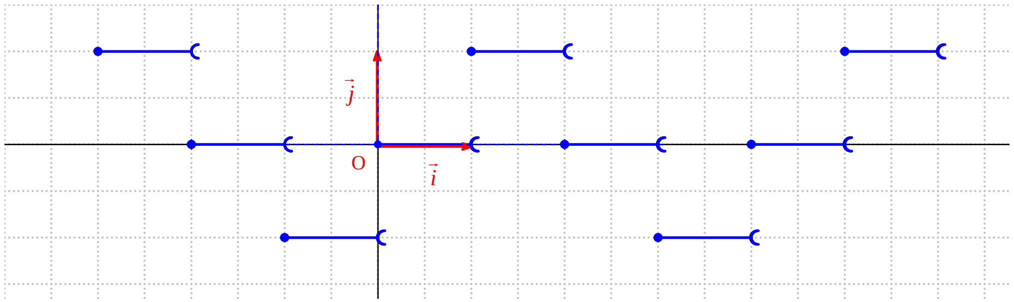
Si $x\in[2\,;3[$, alors $f(x)=\sin\pi=0$.

Si $x\in[3\,;4[$, alors $f(x)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$.

On utilise le cercle trigonométrique pour déterminer les valeurs suivantes du sinus :

$\sin 0=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\sin\pi=0$, $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$

La fonction *f* est périodique de période 4 donc $\mathcal{C}$ est globalement invariante par la translation de vecteur $4\vec{i}$.
Attention à bien « matérialiser » les extrémités des segments (ouvertes ou fermées).
On trace le « motif » sur l'intervalle [0 ; 4[(motif sur une période).
Pour obtenir la représentation graphique complète, on effectue des translations de 4 unités dans les deux sens (vers la droite et vers la gauche).



Vérification sur calculatrice graphique :

Il faut d'abord se mettre en mode radians.

Taper sin((π/2) ∗ Int (*x*)) pour un modèle TI.

Sur *Geogebra*, ne pas oublier que la partie entière d'un réel *x* est notée « floor(*x*) ».

On observe que la fonction est discontinue en tout entier relatif.

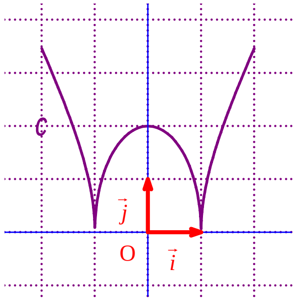
La représentation graphique de la fonction *f* fait penser à une onde.

Cette représentation graphique est dans le même esprit qu'une courbe observée sur un oscilloscope (avec les discontinuités en moins).

Si on ne met pas la calculatrice en mode Dot ou Non Relié, on observe des « créneaux ».

9

Le tracé permet de penser que la fonction *f* est continue sur I (courbe qui peut être tracée en un seul coup de crayon).
En revanche, *f* n'est pas dérivable sur I (elle ne semble pas dérivable en – 1 et en 1 car les points d'abscisses – 1 et 1 semblent être des points anguleux ; la courbe $\mathcal{C}$ semble admettre une demi-tangente verticale – ou plutôt deux demi-tangentes verticales confondues – en ces points).



Les points d'abscisses – 1 et 1 sont des points de rebroussement de 1ère espèce.

Rappel de la propriété fondamentale (implication) : dérivable ⇒ continue (réciproque fausse).

Le 6-2-2023

tangentes verticales

La fonction *f* n'est pas dérivable en 1 et en – 1 (une fonction est dérivable si le taux de variation … admet une limite finie, cette limite finie s'appelle le nombre dérivé) La courbe représentative admet donc une tangente dont le coefficient directeur est égal au nombre dérivé qui est donc fini.

Une droite « verticale » admet « un coefficient directeur infini ».

Pour justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle *I*, on peut dire qu'elle est dérivable sur *I*.
Ce n'est cependant en général pas comme cela que l'on fait.