TS — Exercices sur les dérivées

1 Écrire une équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f au point A d'abscisse a.

1°) $f(x)=2x^2-5x+1$ sur $\mathbb{R}$; $a=-2$.

2°) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; $a=1$.

2 On considère la fonction $f : x \mapsto x-\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2.
1°) Écrire une équation de T.
2°) À l'aide d'une étude de signe, étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.
Vérifier graphiquement en traçant $\mathcal{C}$ à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes.

3 Dans chaque cas, calculer $f'(x)$.

a. $f(x)=\dfrac{-3x^2+7x-1}{x-4}$ b. $f(x)=-\dfrac{4}{x^2+1}$

4 Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ (résultat sous forme factorisée).

a. $f(x)=\left(x^2-2x\right)^4$ b. $f(x)=(1-3x)^5$ c. $f(x)=x^2(1-x)^3$

d. $f(x)=(3x-1)^2(1-2x)^3$ e. $f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$ f. $f(x)=3\cos^5 x$

Pour la dérivée du d., la forme factorisée attendue pour $f'(x)$ est un produit de facteurs du premier degré.
Cette forme est utile si l'on s'en servait dans la suite.

5 Dans chaque cas, calculer $f'(x)$.

a. $f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)^3}$

b. $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^2}$

c. $f(x)=\dfrac{2}{(3x+1)^4}$

d. $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$

6 Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour $x\in \text{I}$ (l'intervalle I est précisé à chaque fois).
On donnera tous les résultats sauf celui du d. sous la forme d'un seul quotient avec un radical au dénominateur.

a. $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$ $\text{I}=]0\,;+\infty[$

b. $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ $\text{I}=\mathbb{R}$

c. $f(x)=x\sqrt{4-x}$ $\text{I}=]-\infty\,;4[$

d. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\text{I}=]-1\,;1[$

e. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\text{I}=\mathbb{R}$

On ne cherchera pas à « enlever » le radical au dénominateur.

7 On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x^2}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point M_0 d'abscisse $x_0\in\mathbb{R}^*$.

8 Soit ABC un triangle isocèle en A dont le périmètre est égal à 20.
On pose $\text{BC}=x$ $(x>0)$.

Faire une figure.
1°) Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\dfrac{x}{2}\sqrt{100-10x}$ avec $0<x<10$.
2°) Étudier les variations de la fonction $f : x\mapsto \dfrac{x}{2}\sqrt{100-10x}$ sur l'intervalle $[0\,;10]$.
En déduire pour quelle valeur de x l'aire de ABC est maximale.
Que peut-on dire de la nature du triangle ABC dans ce cas ?

9 On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y=x^3-3x+1$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1°) Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite D d'équation $y=3x$? Si oui, préciser les abscisses des points de contact de ces tangentes.
2°) Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point $\text{I}(2\,;-5)$? Si oui, préciser les abscisses des points de contact de ces tangentes et écrire une équation de ces tangentes.

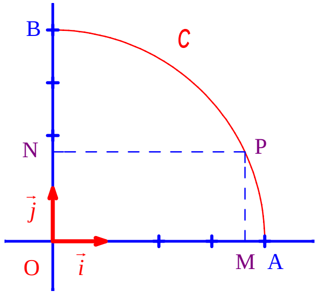
10 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 4 ainsi que A et B les points de coordonnées respectives $(4\,;0)$ et $(0\,;4)$.

Soit P un point variable appartenant au quart du cercle $\mathcal{C}$ d'extrémités A et B.

On note M et N les projetés orthogonaux respectifs de P sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Reproduire la figure ci-dessous.



On s'intéresse à l'aire du rectangle ONPM (on notera qu'il s'agit d'un « vrai » rectangle lorsque P est distinct de A et B).

1°) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (par exemple, Geogebra), réaliser la figure en faisant en sorte que P soit un point mobile. Conjecturer la position de P pour laquelle le rectangle ONPM a une aire maximale.

2°) a) On pose $x = \mathrm{OM}$.

À quel intervalle I appartient x ?

b) Démontrer que l'aire de ONPM est $\mathcal{A}(x) = x\sqrt{16 - x^2}$.

c) Étudier les variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur I.

d) Démontrer la conjecture émise à la question 1°).

11 Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sin 4x$.

12 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+3}$.

Calculer, pour $x \neq -3$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.

Ne pas développer les dénominateurs.

13 Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x-1}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ sur l'intervalle $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$.

- Commencer par écrire la phrase suivante : « F est dérivable sur I comme … .».
- Faire ensuite le calcul directement sans phrase introductive.

$\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{F}'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- Rédiger ensuite une phrase de conclusion sur le modèle suivant [on notera que l'on écrit F et non $\mathrm{F}(x)$, f et non $f(x)$] : « On en déduit que F est une primitive de f sur I. »

14 On considère l'équation différentielle $\dfrac{y'}{3} + y = x^3$ (E).

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{9}$ est une solution particulière de (E).

15 On considère l'équation différentielle $y' = -y^2$ (E).

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ est une solution particulière de (E).

16 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto 1 - \dfrac{x}{3}$ et $g : x \mapsto 2x - 1$.

Exprimer $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$ en fonction de x (x étant un réel quelconque).

On donnera les résultats sous forme simplifiée.

On présentera les calculs sous la forme :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$

$= \ldots$

$= \ldots$

$= \ldots$

$= \ldots$

Corrigé

$\boxed{1}$ Équations de tangentes

La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
On applique cette formule en situation.

1°) $f : x \mapsto 2x^2 - 5x + 1$
$\mathcal{C}$: courbe représentative de f dans un repère du plan

Déterminons une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $a = -2$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4x - 5$.

$f(-2) = 2\times(-2)^2 - 5\times(-2)+1 = 19$
$f'(-2) = 4\times(-2)-5 = -13$

T a pour équation $y = f'(-2)(x+2)+f(-2)$ soit $y = -13x - 7$.

On vérifie cette équation sur la calculatrice graphique (commande spéciale pour tracer une tangente).

2°) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$
$\mathcal{C}$: courbe représentative de f dans un repère du plan

Déterminons une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $a = 1$.

On commence par calculer la dérivée de f.

Il y a deux méthodes :

① On applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

② On applique la formule de dérivation d'une fonction homographique (quotient de deux fonctions affines) :

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$ (formule prête à l'emploi).

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} \quad f'(x) = -\dfrac{7}{(x-3)^2}$

$f(1) = -\dfrac{3}{2}$
$f'(1) = -\dfrac{7}{4}$

T a pour équation $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ soit $y = \dfrac{-7x+1}{4}$.

On vérifie cette équation sur la calculatrice graphique (commande spéciale pour tracer une tangente).

$y = \dfrac{-7x+1}{4}$ est l'équation réduite de T.

Si on le désire, on peut donner $\boxed{\text{une}}$ équation cartésienne de T à coefficients entiers : $7x + 4y - 1 = 0$.

$\boxed{2}$

$f : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$
$D_f = \mathbb{R}^*$
$\mathcal{C}$: courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$
A : point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2
T : tangente à $\mathcal{C}$ en A

On notera que $\mathcal{C}$ est une courbe en 2 morceaux.

1°) **Déterminons une équation de T.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

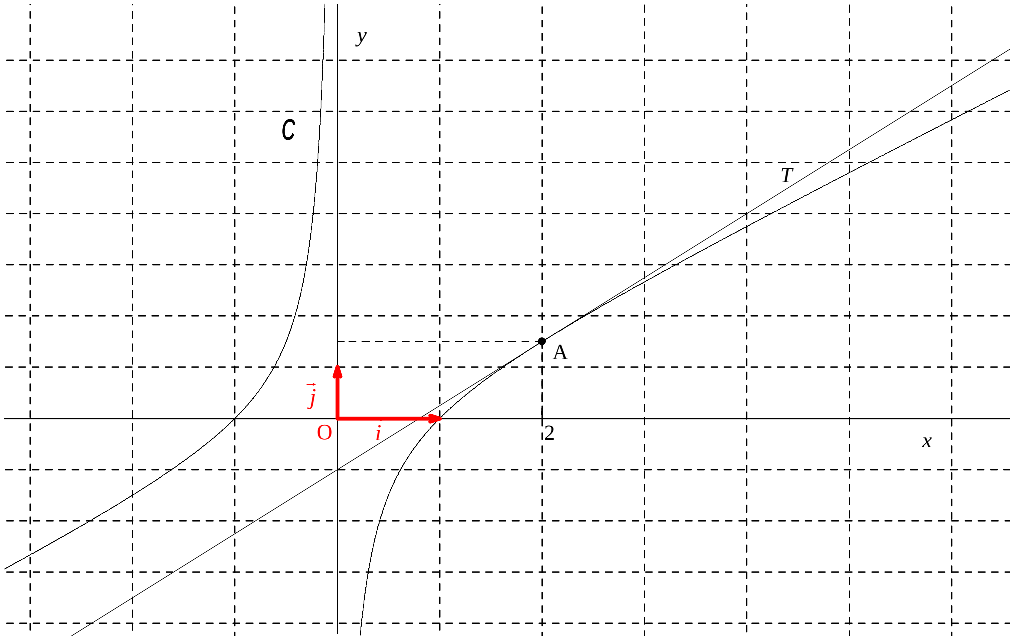
$f(2) = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$
$f'(2) = 1 + \dfrac{1}{2^2} = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$

T a pour équation $y = f'(2)(x-2)+f(2)$ [formule en situation] soit $y = \dfrac{5}{4}(x-2)+\dfrac{3}{2}$ ce qui donne finalement $y = \dfrac{5}{4}x - 1$.

On peut vérifier cette équation grâce à la calculatrice.

2°) **Étudions la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.**

Il s'agit d'une seule courbe en 2 morceaux.



Pour cela, étudions le signe de $g(x) = f(x) - \left(\frac{5}{4}x - 1\right)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g(x) = f(x) - \left(\frac{5}{4}x - 1\right)$$
$$= x - \frac{1}{x} - \frac{5}{4}x + 1$$
$$= -\frac{x}{4} - \frac{1}{x} + 1$$
$$= \frac{-x^2 + 4x - 4}{4x}$$
$$= \frac{-\left(x^2 - 4x + 4\right)}{4x}$$
$$= \frac{-(x-2)^2}{4x}$$
$$= -\frac{(x-2)^2}{4x}$$

Si on ne voit pas l'identité remarquable, on considère le polynôme $-x^2 + 4x - 4$.
On calcule le discriminant (réduit). On s'aperçoit qu'il vaut 0.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $-(x-2)^2$		$-$		$-$	0	$-$	
Signe de $4x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

- $\forall x \in \left]-\infty\,;0\right[\quad g(x) > 0$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de T sur $\left]-\infty\,;0\right[$.
- $\forall x \in \left]0\,;2\right[\cup \left]2\,;+\infty\right[\quad g(x) < 0$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de T sur $\left]0\,;2\right[\cup \left]2\,;+\infty\right[$.
- $\mathcal{C}$ et T sont sécantes au point A.

On sait que A a pour abscisse 2. On n'est pas obligé de donner ici son ordonnée.

On vérifie graphiquement en traçant $\mathcal{C}$ et la tangente T à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes.

$\boxed{3}$ Calculs de dérivées

Rappel : On ne développe jamais le dénominateur d'une dérivée.

a. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{-3x^2 + 7x - 1}{x - 4}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\ 4\ \}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\} \quad f'(x) = \frac{(-6x+7)(x-4) - \left(-3x^2 + 7x - 1\right) \times 1}{(x-4)^2} \quad \text{(on laisse la trace de la formule utilisée)}$$
$$= \frac{-6x^2 + \cancel{7x} + 24x - 28 + 3x^2 - \cancel{7x} + 1}{(x-4)^2}$$
$$= \frac{-3x^2 + 24x - 27}{(x-4)^2}$$

On peut éventuellement mettre 3 en facteur au numérateur mais ce n'est pas très utile.

b. $\boldsymbol{f(x) = -\dfrac{4}{x^2 + 1}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -4 \times \dfrac{1}{x^2+1}$ (principe de réécriture, préalable au calcul de la dérivée)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -4 \times \left[-\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} \right]$ (principe de « sous-dérivée »)

$$= \frac{8x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

On ne développe jamais le dénominateur d'une dérivée.

Pour le a., il n'est pas intéressant de chercher à factoriser le numérateur.

On peut dire qu'une fonction polynôme ou rationnelle est toujours infiniment dérivable sur son ensemble de définition.

4 Calculs de dérivées

On applique la formule $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$.

On ne cherche pas à développer les expressions obtenues.

a. $f(x) = \left(x^2 - 2x\right)^4$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4(2x-2)\left(x^2-2x\right)^3$

$= 4 \times 2(x-1)\left(x^2-2x\right)^3$ (ligne à sauter éventuellement)

$= 8(x-1)\left(x^2-2x\right)^3$

On pourrait éventuellement mettre *x* en facteur.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 8(x-1)\left[x(x-2)\right]^3$

$= 8(x-1)x^3(x-2)^3$

$= 8x^3(x-1)(x-2)^3$

b. $f(x) = (1-3x)^5$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 5 \times (-3)(1-3x)^4$

$= -15(1-3x)^4$

c. $f(x) = x^2(1-x)^3$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

La formule principale est $U \times V$ (formule de dérivation d'un produit) : $(UV)' = U'V + UV'$ avec $U(x) = (3x-1)^2$ et $V(x) = (1-2x)^3$.

Pour dérivée *U* et *V*, on applique la formule $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$.

Pour *U*, c'est la formule pour $n = 2$ qui s'écrit $\left(u^2\right)' = 2uu'$.

Pour *V*, c'est la formule pour $n = 3$ qui s'écrit $\left(u^3\right)' = 3u'u^2$.

$U'(x) = 2 \times (3x-1) \times 3$

$V'(x) = 3 \times (-2) \times (1-2x)^2$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x \times (1-x)^3 + x^2 \times 3 \times (-1) \times (1-x)^2$ (formule de la dérivée d'un produit et « sous-dérivée »)

$= 2x(1-x)^3 - 3x^2(1-x)^2$ (étape de réarrangement)

$= 2 \times \underbrace{x(1-x)^2} \times (1-x) - 3 \times x \times \underbrace{x(1-x)^2}$ (étape de réécriture pour faire apparaître un facteur commun ; cette étape est facultative)

$= x(1-x)^2\left[2(1-x) - 3x\right]$ [$x(1-x)^2$ est un facteur commun]

$= x(1-x)^2(2-5x)$

d. $f(x) = (3x-1)^2(1-2x)^3$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2 \times 3 \times (3x-1) \times (1-2x)^3 + (3x-1)^2 \times 3 \times (-2) \times (1-2x)^2$

$= 6(3x-1)(1-2x)^3 - 6(3x-1)^2 \times (1-2x)^2$

$= \underbrace{6(3x-1)(1-2x)^2} \times (1-2x) - \underbrace{6(3x-1)(1-2x)^2} \times (3x-1)$ phase de réécriture facultative

$= 6(3x-1)(1-2x)^2\left[(1-2x) - (3x-1)\right]$

$= 6(3x-1)(1-2x)^2(2-5x)$

e. $f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$

On applique la formule $\left(U^2\right)' = 2UU'$ avec la fonction $U : x \mapsto \dfrac{x+2}{x-1}$.

La fonction U est une fonction homographique. Elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
On peut appliquer directement la formule de la dérivée d'une fonction homographique (gain de temps).

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\quad f'(x)=2\times\frac{x+2}{x-1}\times\frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2}$$
$$=2\times\frac{x+2}{x-1}\times\left(-\frac{3}{(x-1)^2}\right)$$
$$=-6\times\frac{x+2}{(x-1)^3}\quad\text{(on garde plutôt cette forme factorisée)}$$

f. $\boldsymbol{f(x)=3\cos^5 x}$

$$f(x)=3(\cos x)^5$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=3\times5\times(-\sin x)\times(\cos x)^4$$
$$=-15\sin x\times\cos^4 x$$

On vérifie tous les résultats à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

$\boxed{5}$ Calculs de dérivées

On applique la formule $\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{nu'}{u^{n+1}}$.

Pour chaque calcul, on utilise le principe de « sous-dérivée ».

a. $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{(1-2x)^3}}$

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\quad f'(x)=-\frac{3\times(-2)}{(1-2x)^4}$$
$$=\frac{6}{(1-2x)^4}$$

b. $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{(x^2-1)^2}}$

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\,;-1\}\quad f'(x)=-\frac{2\times2x}{(x^2-1)^3}$$
$$=-\frac{4x}{(x^2-1)^3}$$

c. $\boldsymbol{f(x)=\frac{2}{(3x+1)^4}}$

On « démembre » préalablement l'expression de f : $f(x)=2\times\frac{1}{(3x+1)^4}$ pour ne pas appliquer la formule de dérivation d'une fonction de la forme $\frac{u}{v}$ (néanmoins, si l'on applique la formule, on retrouverait bien sûr le même résultat, les calculs seraient juste un peu plus longs).

On applique la formule $(kU)'=kU'$ avec $k=2$ et $U:x\mapsto\frac{1}{(3x+1)^4}$.

« On mélange 2 formules ».

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}\quad f'(x)=2\times\left[-\frac{4\times3}{(3x+1)^5}\right]$$
$$=-\frac{24}{(3x+1)^5}$$

d. $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^3}}$

On effectue la réécriture du quotient en produit qui va faciliter le calcul de la dérivée (on dérive comme un produit).
On évite de dériver f comme un quotient.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\quad f(x)=x^2\times\frac{1}{(x-1)^3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \quad f'(x) = 2x \times \frac{1}{(x-1)^3} + x^2 \times \left(-\frac{3\times 1}{(x-1)^4}\right)$$

$$= \frac{2x}{(x-1)^3} - \frac{3x^2}{(x-1)^4}$$

On a deux quotients ayant pour dénominateurs $(x-1)^3$ et $(x-1)^4$.
Pour trouver le dénominateur commun le plus simple, on observe que $(x-1)^4$ est un multiple de $(x-1)^3$.
On va donc choisir $(x-1)^4$ pour dénominateur commun.
On ne fait pas le produit des deux qui donnerait $(x-1)^7$.

$$= \frac{2x(x-1) - 3x^2}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x}{(x-1)^4}$$

On peut aussi écrire $f'(x) = -\dfrac{x^2 + 2x}{(x-1)^4}$.

On retiendra la réécriture : $\dfrac{x^2}{(x-1)^3} = x^2 \times \dfrac{1}{(x-1)^3}$ pour des dérivées de fonctions du type $\dfrac{u}{v^n}$.

On vérifie tous les résultats à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

$\boxed{6}$ Calculs de dérivées

Les expressions de toutes les fonctions de cet exercice comportent des racines carrées.
Ce sont des fonctions irrationnelles.

Note sur les intervalles :
Les intervalles donnés sont tels que le radicande soit strictement positif.
On peut le vérifier aisément.
Du coup, on peut appliquer la formule de dérivation d'une fonction de la forme $\sqrt{u}$.

Note (28-9-2015) :

a) On ne cherche pas à enlever les racines au dénominateur.

b) On applique la formule $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

c) Dans chaque cas, l'intervalle I a été donné de telle sorte que le radicande soit strictement positif.

a. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}}$ $\qquad \mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$ (on simplifie par 2 numérateur et dénominateur)

b. $\boldsymbol{f(x) = x\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

La formule principale est celle de la dérivée d'un produit.

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = 1 \times \sqrt{x^2+1} + x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$ (on simplifie par 2 numérateur et dénominateur)

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$ (ligne facultative de mise au même dénominateur)

$$= \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

c. $f(x)=x\sqrt{4-x}$ $\qquad$ $\mathrm{I}=\left]-\infty\,;4\right[$

$$\forall x\in \mathrm{I}\quad f'(x)=1\times\sqrt{4-x}+x\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}\right)$$

$$=\sqrt{4-x}-\frac{x}{2\sqrt{4-x}}$$

$$=\frac{\sqrt{4-x}\times 2\sqrt{4-x}-x}{2\sqrt{4-x}}\quad\text{(mise au même dénominateur)}$$

$$=\frac{2(4-x)-x}{2\sqrt{4-x}}$$

$$=\frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$$

d. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\qquad$ $\mathrm{I}=\left]-1\,;1\right[$

On peut séparer les calculs et commencer par calculer la dérivée de la fonction qui figure sous le radical.

On pose $u(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$.

On a alors $\forall x\in \mathrm{I}\quad u'(x)=\dfrac{1\times(1-x)-(1+x)\times(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2}$.

On peut aussi appliquer directement la formule de dérivation d'une fonction homographique.

$$\forall x\in \mathrm{I}\quad f'(x)=\frac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}\quad\text{(on applique le principe des « sous-dérivées »)}$$

$$=\frac{2}{(1-x)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}\times\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

On peut remarquer que $\forall x\in \mathrm{I}\quad \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ mais cette dernière écriture où l'on « sépare » les radicaux n'est pas vraiment utile. Elle permet cependant d'obtenir la dérivée sous la forme $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ (cf. encadré ci-après).

$$\forall x\in \mathrm{I}\quad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\times\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}\times\frac{\sqrt{1-x}\times\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\times\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}\times\frac{1-x}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}$$

$$=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

Pour passer de l'avant-dernière ligne, on utilise l'égalité : $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{a}{b}}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ (pour $a>0$ et $b>0$).

Démonstrations :

① $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{a}{b}}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{\dfrac{a}{b}}}=\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{a}{b}}}=\sqrt{1\times\dfrac{b}{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

② Autre démonstration

$$\frac{1}{\sqrt{\dfrac{a}{b}}}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

③ Autre démonstration possible avec la puissance $\dfrac{1}{2}$

Remarques :

L'égalité $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{a}{b}}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ est encore valable pour $a<0$ et $b<0$.

La première démonstration est la meilleure car elle est valable pour $a<0$ et $b<0$ ce qui n'est pas le cas des deux autres.

e. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad$ $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

$$\forall x\in \mathrm{I} \quad f'(x)=\frac{1\times\sqrt{x^2+1}-x\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

(on applique la formule de dérivation d'une fonction de la forme $\dfrac{u}{v}$)

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

On utilise l'égalité $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}=\dfrac{1}{bc}$ où a, b, c sont des réels tels que b et c ne soient pas nuls.

Autres écritures possibles du résultat :

①

$$f'(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\times\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

②

$$f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\times\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$ (utilisation d'exposants fractionnaires)

$$=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$\boxed{7}$

$\mathcal{C}$: $y=\dfrac{1}{x^2}$

M_0 : point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x_0\in\mathbb{R}^*$

T : tangente à $\mathcal{C}$ en M_0

Écrivons une équation de *T*.

Version rédigée complètement :

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

On a une fonction dont l'expression est de la forme $\dfrac{1}{x^n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

On peut appliquer directement la formule du cours : $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$.

Une équation de T s'écrit $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ soit $y=-\dfrac{2}{(x_0)^3}(x-x_0)+\dfrac{1}{(x_0)^2}$ ou encore

$y=-\dfrac{2x}{(x_0)^3}+\dfrac{2x_0}{(x_0)^3}+\dfrac{1}{(x_0)^2}$ ce qui donne $y=-\dfrac{2x}{(x_0)^3}+\dfrac{2}{(x_0)^2}+\dfrac{1}{(x_0)^2}$ et finalement $y=-\dfrac{2x}{(x_0)^3}+\dfrac{3}{(x_0)^2}$.

Version rapide :

T a pour équation $y=-\frac{2}{(x_0)^3}(x-x_0)+\frac{1}{(x_0)^2}$ soit $y=-\frac{2x}{(x_0)^3}+\frac{2}{(x_0)^2}+\frac{1}{(x_0)^2}$ ou encore $y=-\frac{2x}{(x_0)^3}+\frac{3}{(x_0)^2}$.

On pourrait introduire la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$. On a : $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ (formule du cours : $\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}$).
Nous ne l'avons pas fait pour ne pas alourdir inutilement la rédaction.

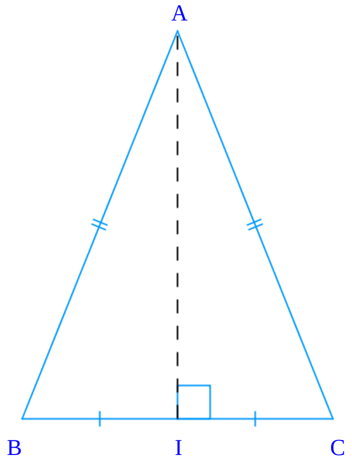
8 Problème d'optimisation géométrique (aire maximale)

Il s'agit d'un problème d'optimisation.
Un problème d'optimisation est un problème où l'on cherche à maximiser ou à minimiser une grandeur mathématique ou physique (longueur, périmètre, aire, volume, angle, temps…).

ABC : triangle isocèle en A de périmètre 20

$BC=x$

On commence par faire une figure codée.



1°) **Démontrons que $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{x}{2}\sqrt{100-10x}$.**

On va commencer par expliquer pourquoi $x<10$.

Notons I le milieu de [BC].

Comme le triangle ABC est isocèle en A, I est aussi le pied de la hauteur issue de A (c'est-à-dire le projeté orthogonal de A sur la droite (BC)) et par suite, le triangle AIB est rectangle en I.

On a $BI=\frac{x}{2}$ car I est le milieu de [BC].

$\mathcal{P}_{ABC}=AB+BC+CA$

On sait que $\mathcal{P}_{ABC}=20$.

De plus, $AB=AC$ donc $AB=AC=\frac{20-x}{2}=10-\frac{x}{2}$.

Or $BI<BA$.

Par conséquent, $\frac{x}{2}<10-\frac{x}{2}$.

On en déduit que $x<10$.

Comme I est le pied de la hauteur issue de A, on a $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{BC\times AI}{2}$.

On va calculer AI en fonction de x.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AIB rectangle en I, on a : $AB^2=AI^2+IB^2$.

Par conséquent, $AI^2=AB^2-IB^2$

$$\begin{aligned}&=\left(10-\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2\\&=\frac{400-40x+x^2-x^2}{4}\\&=100-10x\end{aligned}$$

D'où $AI=\sqrt{100-10x}$.

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{x\times\sqrt{100-10x}}{2}$$

2°) **Étudions les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2}\sqrt{100-10x}$ sur l'intervalle [0 ; 10].**

$\forall x\in[0\,;10]\qquad f(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{100-10x}$

f n'est pas une fonction rationnelle. C'est une fonction irrationnelle.

La dérivation fait intervenir des « sous-dérivées » qu'on peut calculer à part pour ne pas se tromper.

On considère les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \sqrt{100-10x}$.

On peut écrire $f=\frac{1}{2}uv$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)=1$.

v est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;10[$ et $\forall x \in]-\infty\,;10[\quad v'(x)=\dfrac{-10}{2\sqrt{100-10x}}$.

On en déduit que f est dérivable sur $[0\,;10[$.

$$\forall x \in [0\,;10[\quad f'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{100-10x}+x\times\frac{-10}{2\sqrt{100-10x}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{100-10x}-\frac{5x}{2\sqrt{100-10x}}$$

*

$$=\frac{100-15x}{2\sqrt{100-10x}}$$

On dresse le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;10]$.

On cherche les valeurs charnières.

La valeur d'annulation de $100-15x$ est $\dfrac{100}{15}=\dfrac{20}{3}$.

X	0		$\frac{20}{3}$		10
Signe de $100-15x$		+	0	–	
Signe de $2\sqrt{100-10x}$		+		+	0
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variations de f	0	↗	$f\left(\frac{20}{3}\right)$	↘	0

Déduisons-en pour quelle valeur de x l'aire du triangle ABC est maximale.

D'après le tableau de variation, f admet un maximum en $x=\dfrac{20}{3}$.

L'aire de ABC est donc maximale pour $x=\dfrac{20}{3}$.

Pour cette valeur de x, on a $\text{AB}=\text{AC}=10-\dfrac{\frac{20}{3}}{2}=10-\dfrac{10}{3}=\dfrac{20}{3}$.

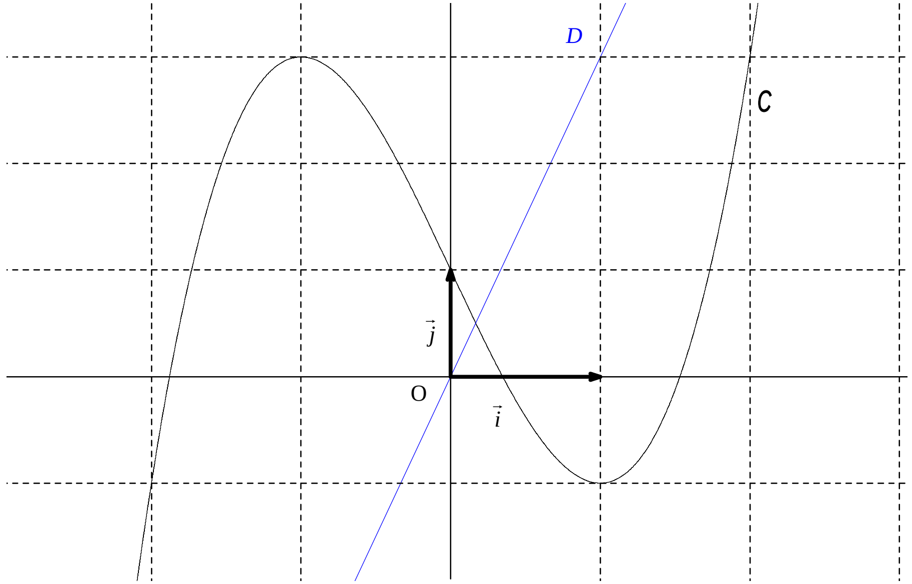
On en déduit que, dans ce cas, le triangle ABC est équilatéral.

On peut retenir que, parmi les triangles isocèles de périmètre donné, ceux qui ont la plus grande aire sont les triangles équilatéraux.

9 Problèmes de tangentes

$\mathcal{C}$: $y=x^3-3x+1$

On peut tracer $\mathcal{C}$ sur l'écran de la calculatrice.



1°) Déterminons s'il existe des tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite D d'équation $y=3x$.

Le coefficient directeur de D vaut 3.

On sait que deux droites dans un repère du plan non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles entre elles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.

Le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ en un point quelconque d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ est égal à $3a^2-3$ (nombre dérivé en a de la fonction $f : x \mapsto x^3-3x+1$).

On a donc l'équivalence suivante : $T \,//\, D \Leftrightarrow T$ a pour coefficient directeur 3.

On cherche donc les réels a tels que $3a^2-3=3 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 3a^2=6$

$\Leftrightarrow a^2=2$

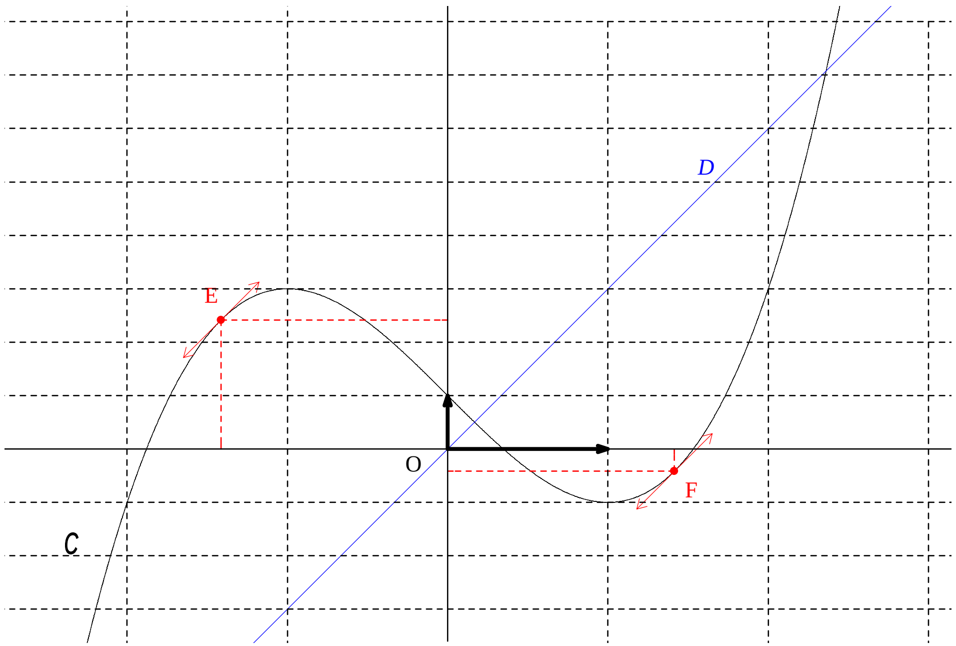
$\Leftrightarrow a=\sqrt{2}$ ou $a=-\sqrt{2}$

On en conclut que $\mathcal{C}$ admet deux tangentes parallèles à D aux points d'abscisses $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Autre rédaction possible : Il existe deux tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à D aux points E et F d'abscisses respectives $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

On retiendra que pour ce type de question on n'a pas besoin d'une équation de la tangente.

On peut vérifier le résultat graphiquement.



$\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(0\,;1)$ pour centre de symétrie (se démontre).

On peut calculer les ordonnées de E et F :

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{E}} &= {x_{\mathrm{E}}}^3 - 3x_{\mathrm{E}} + 1 \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^3 - 3\times\sqrt{2} + 1 \\ &= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1 \\ &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{F}} &= {x_{\mathrm{F}}}^3 - 3x_{\mathrm{F}} + 1 \\ &= -2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 1 \\ &= 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

2°) **Déterminons s'il existe des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point I(2 ; – 5).**

Méthode : On commence par écrire l'équation générale d'une tangente en un point d'abscisse quelconque.

La tangente T à $\mathcal{C}$ en un point quelconque d'abscisse a a pour équation $y = \left(3a^2 - 3\right)\left(x - a\right) + a^3 - 3a + 1$.

Dans la ligne qui suit, x_{I} et y_{I} désignent respectivement l'abscisse et l'ordonnée de I.

$$\begin{aligned} \mathrm{I} \in T \;&\Leftrightarrow\; y_{\mathrm{I}} = \left(3a^2 - 3\right)\left(x_{\mathrm{I}} - a\right) + a^3 - 3a + 1 \\ &\Leftrightarrow\; -5 = \left(3a^2 - 3\right)\left(2 - a\right) + a^3 - 3a + 1 \\ &\Leftrightarrow\; -5 = 6a^2 - 3a^3 - 6 + \cancel{3a} + a^3 - \cancel{3a} + 1 \\ &\Leftrightarrow\; -5 = 6a^2 - 2a^3 - 5 \\ &\Leftrightarrow\; 6a^2 - 2a^3 + = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 2a^2\left(3 - a\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; a = 0 \text{ ou } a = 3 \end{aligned}$$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ admet deux tangentes passant par I aux points A et B d'abscisses respectives 0 et 3.

On reprend l'équation réduite générale de la tangente T à $\mathcal{C}$ en un point quelconque d'abscisse a [$y = \left(3a^2 - 3\right)\left(x - a\right) + a^3 - 3a + 1$].

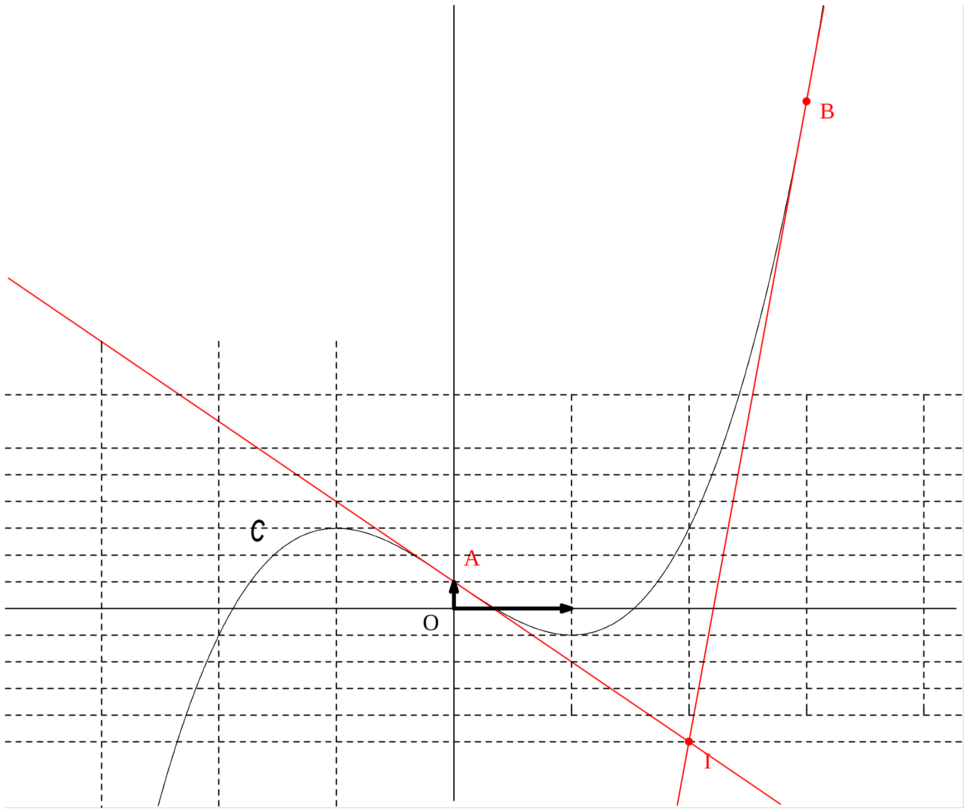
La tangente en A a pour équation $y = -3x + 1$.
La tangente en B a pour équation $y = 24x - 53$.

Pour la tangente en A, on remplace a par 0 dans l'équation générale ($y = \left(3\times0^2 - 3\right)\left(x - 0\right) + 0^3 - 3\times0 + 1$).

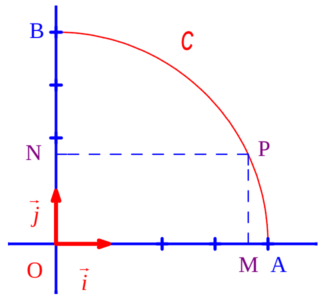
Pour la tangente en A, on remplace a par 3 dans l'équation générale ($y = \left(3\times3^2 - 3\right)\left(x - 3\right) + 3^3 - 3\times3 + 1$).

Retenir (point-méthode) :

1°) ⟶ équation de tangente non utile
2°) ⟶ équation de tangente non seulement utile mais obligatoire



$\boxed{10}$ **Problème d'optimisation géométrique (aire maximale)**



Il s'agit d'un problème de rectangle inscrit dans un quart de cercle.
On cherche la position de P sur le quart de cercle pour que l'aire de OMPN soit maximale.

1°) **À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturons la position de P pour laquelle ONPM a une aire maximale.**

On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 4.
On « crée » les points A et B.
On « crée » un point P sur l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$.
On crée les points M et N en traçant les parallèles aux axes passant par le point P.
On crée le polygone (rectangle) OMPN.
On demander que l'aire de ce polygone s'affiche.
On déplace ensuite le point P sur le quart de cercle et l'on observe comment varie l'aire de OMPN.

On peut penser que OMPN a une aire maximale lorsque P est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$.

Réponse de Baptiste Vivent le 10-9-2020 :

On peut penser que lorsque le point P est à équidistance de A et de B sur $\mathcal{C}$; alors $\mathcal{A}_{\text{OMPN}}$ est maximale.

2°) a) $x = \text{OM}$
Lorsque P décrit l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$, x décrit l'intervalle $\text{I} = [0\,;4]$.

On peut observer que lorsque x est égal à 0 ou à 4 on n'a pas un vrai rectangle (on a un rectangle « aplati » d'aire nulle).

b) **Démontrons que l'aire de ONPM est $\mathcal{A}(x) = x\sqrt{16 - x^2}$.**

On a $\mathcal{A}(x) = \text{OM} \times \text{ON}$.

Dans le triangle ONP rectangle en N (on peut faire une figure à part), on a $\text{ON}^2 + \text{NP}^2 = \text{OP}^2$.

Or $\text{P} \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est un quart de cerce de centre O de rayon 4 donc $\text{OP} = 4$.
Par ailleurs, OMPN est un rectangle donc $\text{NP} = \text{OM} = x$.
On a donc $\text{ON}^2 = 4^2 - x^2$ soit $\text{ON}^2 = 16 - x^2$.
D'où $\text{ON} = \sqrt{16 - x^2}$.
On en déduit que $\mathcal{A}(x) = x\sqrt{16 - x^2}$.

On a : $\text{OM} = x$ et $\text{ON} = \sqrt{16 - x^2}$ (théorème de Pythagore dans le triangle ONP).

c) **Étudions les variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur I.**

$\mathcal{A}$ n'est pas une fonction rationnelle. C'est une fonction irrationnelle.

Version longue :

On considère les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \sqrt{16-x^2}$.

On ne dit que $\mathcal{A}$ est composée des fonctions u et v (le verbe composer n'est pas valable dans ce cas).

On peut écrire $\mathcal{A} = uv$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = 1$.

v est dérivable sur l'intervalle $]-4\,;4[$ et $\forall x \in]-4\,;4[\quad v'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$.

On en déduit que $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[0\,;4[$.

Version courte :

$\mathcal{A}$ est dérivable sur [0 ; 4[comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\forall x \in [0\,;4[\quad \mathcal{A}'(x) = 1 \times \sqrt{16-x^2} + x \times \left(\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}\right) \qquad \text{(« sous-dérivée »)}$$

$$= \sqrt{16-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$= \frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

Pour trouver le signe de $16-2x^2$, on observe que $16-2x^2$ est un polynôme du second degré (incomplet en x) dont les racines sont $2\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{2}$ (on peut éventuellement écrire $16-2x^2 = 2\left(8-x^2\right) = 2\left(\sqrt{8}-x\right)\left(\sqrt{8}+x\right)$ pour le voir). On applique ensuite la règle du signe d'un polynôme du second degré.

Pour le signe de $\sqrt{16-x^2}$, on n'oublie pas que l'expression s'annule pour $x=4$.

x	0		$2\sqrt{2}$		4
Signe de $16-2x^2$		+	0	–	
Signe de $\sqrt{16-x^2}$		+		+	0
Signe de $\mathcal{A}'(x)$		+	0	–	
Variations de $\mathcal{A}$	0	↗	8	↘	0

$\mathcal{A}\left(2\sqrt{2}\right) = 8$

d) **Démontrons la conjecture émise à la question 1°).**

Grâce au tableau de variations de la question précédente, on voit que l'aire de OMPN est maximale pour $x = 2\sqrt{2}$.

Dans ce cas, on a : $\text{OM} = 2\sqrt{2}$ et $\text{ON} = \sqrt{16-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$.

On a donc $\text{OM} = \text{ON} = 2\sqrt{2}$.
OMPN est donc un rectangle qui admet deux côtés consécutifs de même longueur.
On en déduit que c'est un carré.
On a $\text{P}\left(2\sqrt{2}\,;2\sqrt{2}\right)$ donc $\text{P} \in \Delta$ avec $\Delta : y = x$ (première bissectrice du repère).

On en déduit que P est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$.

Commentaires :

• Ce problème sera repris ultérieurement lors des études des fonctions cosinus et sinus.
Nous prendrons alors comme variable la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$ (variable naturelle du problème).

• On peut également résoudre cet exercice en utilisant un « dérivé » de la règle du produit maximal.
Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte.
On pose $\text{OM} = x$ et $\text{ON} = y$.
On a : $x^2 + y^2 = 16$ (théorème de Pythagore).
L'aire de OMPN est égale à xy.
On cherche x et y pour que le produit xy soit maximal sous la contrainte $x^2 + y^2 = 16$.
On sait que le produit xy est maximal lorsque $x = y$.

• Le tableau de variations de la question précédente permet de voir que l'aire de OMPN est maximale lorsque $x = 2\sqrt{2}$.
Cette position correspond bien à celle qui avait été conjecturée dans la question 1°) lors des essais avec un logiciel de géométrie dynamique.

• Nous reprendrons ce problème plus tard avec les fonctions trigonométriques.

$\boxed{11}$ **Calculons la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sin 4x$.**

f est définie sur $\mathbb{R}$.

D'après le cours, comme la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4\cos 4x$ (formule du cours)

• On applique la formule du cours sur la « dérivée de $\sin(ax+b)$ » : $\left(\sin(ax+b)\right)' = a\cos(ax+b)$.

• Cette formule qui marche avec la formule sur la « dérivée de $\cos(ax+b)$ » : $\left(\cos(ax+b)\right)' = -a\sin(ax+b)$ est un cas particulier de la formule du cours sur la « dérivée de $u(ax+b)$ ».

On peut aussi appliquer la formule $(\sin u)' = u'\cos u$.

Ancienne version :

On applique la formule du cours sur la « dérivée de $u(ax+b)$ ».

La dérivée de la fonction $f : x \mapsto u(ax+b)$ est donné par : $f'(x) = a \times u'(ax+b)$.

On applique ce résultat à la fonction $u : x \mapsto \sin x$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = \cos x$.

$\boxed{12}$ Calculs de dérivées successives

Cet exercice n'a d'autre intérêt que de faire calculer des dérivées successives sans se poser la question de l'utilité.

On verra cette année l'intérêt des dérivées successives à l'occasion de quelques exercices d'études de fonctions, essentiellement avec les dérivées seconde et troisième.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

• Dérivée première :

On peut appliquer la formule de dérivation d'un quotient ou la formule de dérivation d'une fonction homographique (plus rapide).

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad f'(x) = \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{7}{(x+3)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad f'(x) = \frac{2 \times 3 - 1 \times (-1)}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{7}{(x+3)^2}$$

• Dérivée seconde :

On écrit $f'(x) = 7 \times \dfrac{1}{(x+3)^2}$.

On applique la formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad f''(x) = 7 \times \left[-\frac{2 \times 1}{(x+3)^3}\right]$$
$$= -\frac{14}{(x+3)^3}$$

• Dérivée troisième :

On écrit $f''(x) = -14 \times \dfrac{1}{(x+3)^3}$.

On applique la formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad f^{(3)}(x) = -14 \times \left[-\frac{3}{(x+3)^4}\right]$$
$$= \frac{42}{(x+3)^4}$$

• Dérivée quatrième :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad f^{(4)}(x) = 42 \times \left[-\frac{4}{(x+3)^5}\right]$$
$$= -\frac{168}{(x+3)^5}$$

On peut conjecturer puis démontrer aisément par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de f est donnée par $f^{(n)}(x) = \dfrac{7 \times (-1)^{n+1} \times n!}{(x+3)^{n+1}}$.

$n!$ désigne la factorielle de n.

Pour $n \geqslant 2$, $n!$ est égal au produit de tous les entiers naturels de 1 à n (compris).

On pose $1! = 1$ et $0! = 1$.

$\boxed{13}$

Démontrons que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x-1}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ sur l'intervalle $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$.

F est une fonction homographique donc F est dérivable sur I.

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{F}'(x) = \frac{2 \times (x-1) - (2x-3) \times 1}{(x-1)^2}$$

On peut aussi appliquer directement la formule de dérivation d'une fonction homographique.

$$= \frac{\cancel{2x} - 2 \cancel{-2x} + 3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$= f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f sur I.

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{F}'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2\times(-1)-1\times(-3)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{-2+3}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}$$

$\boxed{14}$

$$\frac{y'}{3}+y=x^3 \quad (\mathrm{E})$$

Démontrons que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}$ est une solution particulière de (E).

Méthode : On commence par dériver *f*.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=3x^2-2x+\frac{2}{3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{f'(x)}{3}+f(x)=\frac{3x^2-2x+\frac{2}{3}}{3}+x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}$$

$$=\cancel{x^2}-\cancel{\frac{2}{3}x}+\frac{2}{9}+x^3\cancel{-x^2}+\cancel{\frac{2}{3}x}-\frac{2}{9}$$

$$=x^3$$

Donc la fonction *f* est une solution particulière de (E).

Attention à ne pas dire :
« $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ » ou « $f(x)$ est une solution particulière de (E) ».

$\boxed{15}$

$$y'=-y^2 \quad (\mathrm{E})$$

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$

Démontrons que *f* est une solution particulière de (E).

f est dérivable sur I comme fonction de référence (fonction rationnelle).

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

On peut écrire $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x)=-\left(\frac{1}{x}\right)^2$ et donc $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x)=-\left[f(x)\right]^2$.

On en déduit que *f* est une solution particulière de (E).

16

$f : x \mapsto 1 - \frac{x}{3}$ $\qquad$ $g : x \mapsto 2x - 1$

On cherche les expressions de $g \circ f$ et de $f \circ g$ (il s'agit d'expressions de composées : composée de *f* suivie de *g* et composée de *g* suivie de *f*).

On veut une expression sous la forme d'un seul quotient à chaque fois.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]$

$= g\left(1 - \frac{x}{3}\right)$

$= 2\left(1 - \frac{x}{3}\right) - 1$ (voir note après sur le changement de variable)

$= 2 - \frac{2x}{3} - 1$

$= 1 - \frac{2x}{3}$

La méthode s'apparente à un changement de variable.

On peut d'ailleurs poser $\mathrm{X} = f(x)$ soit $\mathrm{X} = 1 - \frac{x}{3}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$

$= f(2x - 1)$

$= 1 - \frac{2x - 1}{3}$

$= \frac{3 - (2x - 1)}{3}$

$= \frac{4 - 2x}{3}$