$1^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le jeudi 11 octobre 2012

Soit ABCD un parallélogramme.
Soit I un point quelconque de la droite (AC) et M le point tel que I soit le milieu du segment [DM].
La parallèle à (AD) passant par M coupe (AB) en E.
La parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en F.

Faire la figure au brouillon.

Faire ensuite une figure sur *Geogebra* permettant de faire bouger le point I sur la droite (AC).
Observer la position des positions des points I, E, F.
Il n'est pas demandé d'imprimer la figure obtenue sur *Geogebra*.

On donnera toutes les équations de droites demandées sous forme réduite.

1°) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, D sur une même ligne.

On se placera dans ce repère dans toute la suite de l'exercice.

2°) Donner une équation de la droite (AC) (justifier très brièvement ; une phrase suffit).

3°) On appelle α l'abscisse de I. Exprimer l'ordonnée de I en fonction de α.

4°) En déduire les coordonnées de M en fonction de α.

5°) Donner une équation de la parallèle à (AD) passant par M en fonction de α.

6°) Donner une équation de la droite (AB).

7°) En déduire les coordonnées de E en fonction de α.

8°) Reprendre la démarche précédente pour déterminer les coordonnées de F en fonction de α.

9°) Démontrer que les points I, E, F sont alignés sur une droite parallèle à (BD).

Conseils

Ne pas faire la figure sur la copie.

Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.

L'ensemble du devoir doit tenir sur une copie simple.

Pour la plupart des questions, il est possible de répondre en une phrase (en particulier chaque fois que l'énoncé dit « Donner … ».

À partir de la question 3°), on travaille uniquement en littéral (avec α). Il n'y a pas de valeurs numériques.
Il ne faut pas s'en étonner. C'est l'un des objectifs de cet exercice.

Pour ce devoir, comme pour tous, deux objectifs sont visés : concision et précision.

Corrigé du DM pour le 11 octobre 2012

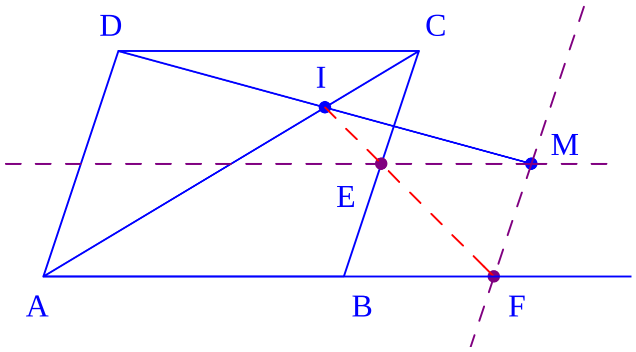
ABCD parallélogramme

I : point quelconque de (AC)

M : point tel que I soit le milieu du segment [DM]

E : point d'intersection de (AB) et de la parallèle à (AD) passant par M

F : point d'intersection de (BC) et de la parallèle à (AB) passant par M



On se place dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$).

C'est bien un repère du plan car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

1°) Dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$) :

A(0 ; 0) **B(1 ; 0)** **C(1 ; 1)** **D(0 ; 1)**.

2°) **Donnons une équation de la droite (AC).**

Une équation de la droite (AC) est $\boldsymbol{y = x}$ puisqu'elle passe par l'origine du repère O et par le point C(1 ; 1).

3°) $x_{\mathrm{I}} = \alpha$

Calculons l'ordonnée de I en fonction de α.

Comme I $\in$ (AC), ses coordonnées vérifient l'équation de la droite donc on a $y_{\mathrm{I}} = x_{\mathrm{I}}$ donc I a pour ordonnée α.
I a donc pour coordonnées **(α ; α)**.

4°) **Calculons les coordonnées de M en fonction de α.**

I est le milieu de [DM] donc $\begin{cases} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x_{\mathrm{D}} + x_{\mathrm{M}}}{2} \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y_{\mathrm{D}} + y_{\mathrm{M}}}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} \alpha = \dfrac{0 + x_{\mathrm{M}}}{2} \\ \alpha = \dfrac{1 + y_{\mathrm{M}}}{2} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_{\mathrm{M}} = 2\alpha \\ y_{\mathrm{M}} = 2\alpha - 1 \end{cases}$.

M(2α ; 2α − 1)

On aurait aussi pu écrire : $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IM}$.

5°) **Donnons une équation de la parallèle à (AD) passant par M.**

Une équation de la parallèle à (AD) passant par M est $x = x_M$ soit $\boldsymbol{x = 2\alpha}$.

6°) **Donnons une équation de la droite (AB).**

La droite (AB) est l'axe des abscisses donc elle a pour équation $\boldsymbol{y = 0}$.

7°) **Donnons les coordonnées de E.**

Le point E appartient à (AB) et à la parallèle à (AD) passant par M donc E a pour coordonnées **(2α ; 0)**.

8°) **Déterminons les coordonnées de F en fonction de α.**

(BC) a pour équation $x = 1$.

Une équation de la parallèle à (AB) passant par M est $y = y_M$ soit $y = 2\alpha - 1$.

Le point F appartient à (BC) et à la parallèle à (AB) passant par M donc ses coordonnées sont **(1 ; 2α – 1)**.

9°) **Démontrons que les points I, E, F sont alignés sur une droite parallèle à (BD).**

I (α ; α) E(2α ; 0) F(1 ; 2α – 1)

$\overrightarrow{IE}\begin{vmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{vmatrix}$ $\overrightarrow{IF}\begin{vmatrix}1-\alpha\\ \alpha-1\end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ -\alpha & \alpha-1\end{vmatrix} &= \alpha\times(\alpha-1)-(-\alpha)\times(1-\alpha)\\ &= \alpha\times(\alpha-1)+\alpha\times(1-\alpha)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires et par suite **les points I, E, F sont alignés**.

$\overrightarrow{IE}\begin{vmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{vmatrix}$ $\overrightarrow{DB}\begin{vmatrix}1\\ -1\end{vmatrix}$

On observe que $\overrightarrow{IE} = \alpha\overrightarrow{DB}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Par suite, les points **I, E, F sont alignés sur une droite parallèle à (BD)**.

Version allégée de ce devoir à refaire pour s'entraîner

Soit ABCD un parallélogramme.
Soit I un point quelconque de la droite (AC) et M le point tel que I soit le milieu du segment [DM].
La parallèle à (AD) passant par M coupe (AB) en E.
La parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en F.

Le but de l'exercice est de démontrer que les points I, E, F sont alignés sur une droite parallèle à (BD).

On munit le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

On note α l'abscisse de I dans ce repère.

1°) Calculer les coordonnées de I, M, E, F en fonction de α.

2°) Conclure.