Formule fondamentale de l'algèbre

1. Formule

Pour tout couple de réels $(a\,;b)$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

2. Autre écriture pour mieux comprendre comment s'écrit la formule

On écrit les termes d'exposants 0 et 1 (y compris les termes sous-entendus).

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1}\right)$$

On comprend ainsi mieux la logique d'écriture des termes placés dans la deuxième parenthèse.

L'expression $a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1}$ entre parenthèses est une somme dont chaque terme est un monôme en a et b c'est-à-dire le produit d'une puissance de a par une puissance de b. La somme des exposants de a et de b est égale à $n-1$.
Cette somme est écrite dans l'ordre décroissant des puissances de a et dans l'ordre croissant des exposants de b.
Les exposants de a décroissent de 1 à chaque fois et les exposants de b croissent de 1 à chaque fois.

3. Exemples

$n=2 \quad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ (on retrouve l'identité remarquable bien connue)

$n=3 \quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$n=4 \quad a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$n=5 \quad a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

On peut vérifier toutes ces formules en développant et en simplifiant le second membre de chaque égalité.

4. Autre écriture de la formule (plus compliquée mais plus claire)

$$a^n-b^n=(a-b)\left(\sum_{k=0}^{k=n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$$

5. Démonstration dans le cas général

On va développer et simplifier le second membre de la formule (en travaillant en littéral).

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1})=a(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1})-b(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

$a(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2 \quad + \quad ... \quad +a^3b^{n-3}+a^2b^{n-2}+a^1b^{n-1}$ (on ajoute 1 à chaque exposant de a)

$-b(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})= \quad -a^{n-1}b-a^{n-2}b^2-a^{n-3}b^3 \quad - \quad ... \quad -a^2b^{n-2}-a^1b^{n-1}-b^n$ (on ajoute 1 à chaque exposant de b)

$$a\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^{2}+\ldots+a^{2}b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)=a^{n}+\cancel{a^{n-1}b}+\cancel{a^{n-2}b^{2}}+\ldots+\cancel{a^{3}b^{n-3}}+\cancel{a^{2}b^{n-2}}+\cancel{ab^{n-1}}$$

$$-b\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^{2}+\ldots+a^{2}b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)=-\cancel{a^{n-1}b}-\cancel{a^{n-2}b^{2}}-\cancel{a^{n-3}b^{3}}-\ldots-\cancel{a^{2}b^{n-2}}-\cancel{ab^{n-1}}-b^{n}$$

$$(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^{2}+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)=a^{n}-b^{n}$$

Les termes s'annulent deux à deux sauf le premier et le dernier (« simplification en cascade », par « télescopage » ou « en dominos »).

Cette formule n'a pas de lien avec le triangle de Pascal.

Cas particulier :

$$(1-q)\left(1+q+q^{2}+\ldots+q^{n}\right)=1-q^{n+1}$$

Remarque : Si n est un entier naturel pair, alors on peut écrire $a^{n+1}+b^{n+1}=a^{n+1}-(-b)^{n+1}=(a+b)\left(a^{n}-a^{n-1}b+\ldots-ab^{n-1}+b^{n}\right)$.

6. Applications algébriques

Factoriser $x^{3}-8$, $27x^{3}-1$, $x^{3}+125$.

$$\begin{aligned} x^{3}-8 &= x^{3}-2^{3} \\ &= (x-2)\left(x^{2}+2x+4\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27x^{3}-1 &= (3x)^{3}-1^{3} \\ &= (3x-1)\left(9x^{2}+3x+1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3+125 &= x^3+5^3 \\ &= x^3-(-5)^3 \\ &= (x+5)\left(x^2-5x+25\right) \end{aligned}$$

On retiendra qu'il est possible de factoriser une expression de la forme a^n+b^n lorsque n est un entier naturel impair comme nous l'avons dit dans la remarque du paragraphe précédent.

8. Une application importante en arithmétique

● Exemple : Démontrer à l'aide de la relation fondamentale de l'algèbre que pour tout entier naturel n le nombre $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.

Solution :

$$\begin{aligned} 3^{2n}-2^n &= \left(3^2\right)^n-2^n \\ &= 9^n-2^n \\ &= (9-2)\left(9^{n-1}+9^{n-2}\times 2+9^{n-3}\times 2^2+\ldots+9\times 2^{n-2}+2^{n-1}\right) \\ &= 7\times\underbrace{\left(9^{n-1}+9^{n-2}\times 2+9^{n-3}\times 2^2+\ldots 9\times 2^{n-2}+2^{n-1}\right)}_{\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Ainsi, $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.

● Résultat général :

Soit a et b sont deux entiers relatifs.
Soit n un entier naturel quelconque.
a^n-b^n est divisible par $a-b$.

La démonstration est évidente grâce à la formule fondamentale de l'algèbre.

9. Application fondamentale à la factorisation des polynômes

Définition :

On dit qu'un polynôme $A(x)$ est divisible par un polynôme $B(x)$ s'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $A(x)=B(x)\times Q(x)$.

Théorème :

Soit $P(x)$ un polynôme de degré $n\geqslant 1$.

$P(x)$ est divisible par $x-a$ si et seulement si $P(a)=0$.

$P(a)=0$ signifie que a est racine de $P(x)$.

Démonstration :

• Supposons que $P(x)$ soit divisible par $x-a$.

On peut donc écrire $P(x)=(x-a)\times Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme.
$P(a)=(a-a)\times Q(a)=0\times Q(a)=0$

• Supposons que $P(a)=0$.

Posons $P(x)=b_n\times x^n+b_{n-1}\times x^{n-1}+...+b_1\times x+b_0$ (b_0, b_1, …, b_{n-1}, b_n étant des réels tels que $b_n\neq 0$).

On a alors : $P(a)=b_n\times a^n+b_{n-1}\times a^{n-1}+...+b_1\times a+b_0$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(a) \\ &= b_n \times \left(x^n - a^n\right) + b_{n-1} \times \left(x^{n-1} - a^{n-1}\right) + ... + b_1 \times (x - a) \end{aligned}$$

D'après la formule fondamentale de l'algèbre, toute expression de la forme $x^k - a^k$ est factorisable par $x - a$.

On en déduit que $P(x) = (x - a) \times Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme.

Application :

On pose $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$.

Démontrer que $P(x)$ est factorisable par $x - 1$ et déterminer une factorisation.

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 + 2 \times 1^2 + 1 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $P(x)$ est factorisable par $x - 1$.

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$$

$$P(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 + 1 - 4$$

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(1) \qquad \text{car } P(1) = 0 \\ &= \left(x^3 - 1^3\right) + 2\left(x^2 - 1^2\right) + x - 1 \\ &= (x - 1)\left[\left(x^2 + x + 1\right) + 2(x + 1) + 1\right] \\ &= (x - 1)\left(x^2 + 3x + 4\right) \end{aligned}$$

Le dimanche 6 août 2017 (00 h 16)

Dans l~~'expression~~ a^{n-1}

Dans la somme $a^{n-1}+a^{n-2}b+...$, chaque terme (chaque monôme) est constitué d'un produit d'une puissance de a et de b.