Calcul de la somme ou du produit des termes consécutifs d'une suite sur calculatrice

Le 23-12-2015

Exemple tiré du DM pour le 4-1-2016 en TS

$$u_n = \prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

$\text{nMin} = 1$

$\text{u}(n) = \text{prod}\left(\text{suite}\left(1+\left(1/\text{K}^2\right), \text{K}, 1, n\right)\right)$

Pour le modèle TI-83 « évolués » (par exemple, TI 83 Premium CE), on doit remplir :

Suite :
Expr : $1+\left(1/\text{K}^2\right)$
Variable : K
Début : 1
Fin : n
Pas : 1
Coller

Ça se remplit alors automatiquement c'est-à-dire que l'on obtient directement

$\text{u}(n) = \text{prod}\left(\text{suite}\left(1+\left(1/\text{K}^2\right), \text{K}, 1, n\right)\right)$.

Le 22-9-2015

Pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=50}\frac{1}{k}$:

Clément Duveau

TI-83 Plus.fr et TI-83 Premium CE (n'existe pas pour les calculatrices TI bleues)

MATH $\rightarrow$ 0 : sommation Σ ([calculatrice en français]   ou   0 : summation Σ ([calculatrice en anglais]

$\rightarrow$ On remplit avec K, 1, 50, 1/K

$\boxed{\text{entrer}}$

Attention, il n'y a pas de commande équivalente pour le produit.

À noter :

Cette commande permet d'effectuer des sommes de complexes.

Exemples :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{k=50} \text{i}^k \quad \rightarrow \quad -1+1\text{i}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{k=100} \text{i}^k \quad \rightarrow \quad 0$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{k=15} \text{i}^k \quad \rightarrow \quad -1$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{k=25} \text{i}^k \quad \rightarrow \quad -5\text{E}-13+1\text{i}$

La méthode des listes sur calculatrice TI-83 Plus.fr

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{stats}}$ (listes) → MATH → somme

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{stats}}$ (listes) → OPS → suite

Expr : $\dfrac{1}{n}$

Variable : n

Start : 1

End : 50

Step : 1

1ère méthode :

2e méthode : on rentre la suite préalablement

1. Suite définie de manière explicite

Exemple :

On veut calculer $\sum_{k=1}^{20} \sqrt{k}$.

• Calculatrice TI :

On doit afficher sur l'écran :

somme(suite(√ K, K, 1, 20)) ou sum(seq(√ K, K, 1, 20))

ou

somme(suite(√ (K), K, 1, 20)) ou sum(seq(√ (K), K, 1, 20)) (sur les modèles TI 83 Plus bleu, les parenthèses sont obligatoires).

On obtient :
- *somme* (ou *sum* en anglais) par Listes (2nde stats), choix MATH, puis *somme* ;
- *suite* (ou *seq* avec une parenthèse lorsque la calculatrice est en anglais) par Listes, OPS puis suite(.

Il est possible d'obtenir *somme* et *suite* en allant dans le catalogue (pour cela, taper 2nde 0) et on cherche dans la liste.

Bilan des instructions :

Somme :

2nde stats (listes) MATH 5 : som(2nde listes → 5 écrire la formule, variable, borne inférieure, borne supérieure

Produit :

2nde stats (listes) MATH 6 : prod(→ 5 écrire la formule, variable, borne inférieure, borne supérieure

On ne met pas de guillemets.

N.B. : Sur la calculatrice, on n'est pas obligé de fermer les parenthèses (du moins pour les calculatrices TI)

Somme et produit : dans listes MATH

Suite : dans listes OPS

Pour s'entraîner :

Calculer les sommes et produits suivants : $\sum_{k=1}^{k=30} \sqrt{k}$; $\sum_{k=1}^{k=100} \frac{1}{k}$; $\prod_{k=2}^{k=100} \left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Solution :

$$\sum_{k=1}^{k=30} \sqrt{k} = 112,0828452...$$

$$\sum_{k=1}^{k=100} \frac{1}{k} = 5,187377518...$$

$$\prod_{k=2}^{k=100} \left(1-\frac{1}{k}\right) = 0,01$$

On obtient les premières décimales (sauf pour le dernier produit où l'on a effectivement la valeur exacte, ainsi que l'on peut le vérifier en simplifiant directement le produit).

Avec calculatrice TI 83-Plus modèle noir et blanc avec un boîtier noir (touche $\boxed{\text{2nde}}$, touche $\boxed{\text{alpha}}$) verte)

Le remplissage de la somme (ou du produit) est différent. On obtient l'affichage suivant à l'écran.

Suite :
Expr : ………………..
Variable : …………..
Start : …………..
End : …………..
Step : …………..
Paste

Step désigne le « pas » (c'est-à-dire l'écart entre deux valeurs consécutives de K).

Si on ne met rien, la calculatrice mettra 1 par défaut ; sinon mettre 1 ici (pour cet exemple-là).

Avec la TI-nspire CX Cas, on peut calculer des sommes plus « grandes » (ce qui n'est pas possible sur une calculatrice TI normale), par exemple :

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k} = 7,48547\ldots\ .$$

• Calculatrice CASIO GRAPH 35 + :

On doit afficher sur l'écran : $\boxed{\sum_{k=1}^{20} \sqrt{k}}$.

On fait : Menu Math (F4) puis F6 : il s'affiche le symbole Σ.

2. Suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$

Exemple :

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -10$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2$ pour tout entier naturel *n*.

On veut calculer $S = \sum_{k=0}^{k=20} u_k$.

L'exemple est volontairement simple – il s'agit d'une suite arithmétique, on a une formule permettant de calculer la somme des termes consécutifs – pour comprendre le fonctionnement.

→ Calculatrice TI

• On va d'abord définir la suite en mode récurrent dans la calculatrice (réglée en mode suite) : on va dans $\boxed{f(x)}$, on rentre la valeur minimale de n (ici 0), la relation de récurrence (écrite sous la forme $u_n = u_{n-1} + 2$), la valeur du premier terme (ici – 10).

• Ensuite, on tape la séquence :

$$\boxed{\text{somme (suite (u}(n)\text{), } n\text{, 0, 20)}}$$

On obtient $S = 210$, ce que l'on peut aisément vérifier avec la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

La même méthode s'applique pour le produit.

En analyse, la somme des termes consécutifs d'une suite à partir du premier définit une nouvelle suite que l'on appelle une *série*.

Pour des produits ou des sommes pour lesquels on atteint les limites de capacité de la calculatrice :

On veut calculer $\prod_{k=1}^{k=1000}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

En faisant $\text{prod}\left(\text{suite}\left(1+\left(1/\text{K}^2\right),\text{K},1,1000\right)\right)$, la calculatrice n'arrive pas à faire le produit.

Message à l'écran : ERR : DIM INVALIDE

L'idée est de décomposer. On coupe le produit en 2.

On écrit : $\prod_{k=1}^{k=1000}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=1}^{k=500}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \times \prod_{k=501}^{k=1000}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

Pour calculer $\prod_{k=1}^{k=500}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, la calculatrice met environ 40 secondes.

Pour calculer $\prod_{k=501}^{k=1000}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, la calculatrice met environ 20 secondes.

$\text{prod}\left(\text{suite}\left(1+\left(1/\text{K}^2\right),\text{K},501,1000\right)\right)$

1,000998999

$\text{Rep* prod}\left(\text{suite}\left(1+\left(1/\text{K}^2\right),\text{K},1,500\right)\right)$

Affichage : 3,672405506.

On peut démontrer que la suite de terme général $\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ converge.

À priori, sa limite ne peut être calculée (on ne peut savoir si elle rationnelle ni irrationnelle, ni si elle peut s'exprimer à l'aide de constantes mathématiques célèbres telles que π ou e).

Le 16-9-2015

Calculer $\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 20 \\ k \text{ pair}}} \sqrt{k}$.

TI-83 bleue

On rajoute que le « pas » est de 2 comme suit :

$\boxed{\text{somme(suite(}\sqrt{\ }\text{K, K, 0, 20, 2))}}$ ou $\boxed{\text{sum(seq(}\sqrt{\ }\text{K, K, 1, 20, 2))}}$

TI blanche et noire (boîtier noir)

Rajouter Step : 2