TS1

Contrôle du jeudi 4 octobre 2012 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………….

Note : ……/20

I. (1 point) Soit x un réel strictement positif fixé.
Lire et comprendre le raisonnement par récurrence suivant permettant d'établir la propriété

« Pour tout entier naturel n, on a : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ ».

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ ».

Initialisation :
Vérifions que $P(0)$ est vraie.
On a : $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \times x$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :
Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $(1+x)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)x$.

On a : $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x)$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$.
Or $x > 0$ donc $1 + x > 0$.
Par conséquent, en multipliant les deux membres de l'inégalité par $1 + x$, on obtient :
$(1+x)^{k+1} \geqslant (1 + kx)(1 + x)$

Donc $(1+x)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)x + kx^2$ (*) et par suite, $(1+x)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)x$ (**).

On en déduit que $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :
On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie. Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Justifier brièvement (une ligne suffit) le passage entre les inégalités (*) et (**).

……

II. (1 point) À l'aide de la calculatrice (en utilisant la commande spéciale permettant de calculer une somme), déterminer la valeur arrondie au millième de $A = \sum_{k=0}^{k=30} \sqrt{k}$.

A ≈ ……………………………….. (valeur arrondie au millième)

III. (8 points) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{p=1}^{p=n} p(p+1).$$

1°) Compléter l'égalité suivante :

$S_4 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2°) Compléter l'algorithme suivant qui permet pour une valeur de n donnée en entrée d'afficher la valeur de S_n.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour p allant de 1 à n **Faire**
  S prend la valeur ……..……………
FinPour

Sortie :
Afficher S

3°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a : $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (2 points) Déterminer une expression simplifiée de $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 3^{2k}$ $(n \in \mathbb{N})$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (2 points) Répondre sans justifier.

1°) (u_n) est une suite géométrique strictement croissante telle que $u_0 = 4$. Que peut-on dire de sa raison q ?
2°) (u_n) est une suite géométrique strictement croissante telle que $u_0 = -3$. Que peut-on dire de sa raison q ?

1°) ………………………………   2°) ………………………………

VI. (6 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{1}{4}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1+\sqrt{u_n}}{2}$.

1°) Démontrer par récurrence que la phrase $P(n)$: « $u_n \leqslant 1$ » est vraie pour tout entier naturel n.
Traduire le résultat ainsi démontré en utilisant un terme précis du vocabulaire des suites.
2°) Rentrer la suite sur la calculatrice et donner sans justifier la troncature au millième de u_8.
3°) **Bonus :** Étudier la monotonie de la suite (u_n).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé

I.
$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x+kx^2$ (*) et par suite, $(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$

$k \in \mathbb{N}$ et $x^2>0$ donc $kx^2 \geqslant 0$

II. $A = \sum_{k=0}^{k=30} \sqrt{k}$

A ≈ **112,083** (valeur arrondie au millième)

III. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} p(p+1)$

1°) $\boldsymbol{S_4 = 1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5=40}$

2°)

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour *p* allant de 1 à *n* **Faire**
   S prend la valeur S + *p* (*p* +1)
FinPour

Sortie :
Afficher S

3°) **Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel *n* non nul on a :** $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$: « $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(1)$ est vraie.

On a : $S_1 = 1\times 2 = 2$ et $\dfrac{1\times(1+1)\times(1+2)}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

donc on peut écrire $S_1 = \dfrac{1\times(1+1)\times(1+2)}{3}$.

D'où $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k non nul tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $S_k = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

$$S_{k+1} = \sum_{p=1}^{p=k+1} p(p+1)$$
$$= \sum_{p=1}^{p=k} p(p+1) + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

IV. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 3^{2k}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 3^{2k}$$
$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 9^k$$

$S_n = \dfrac{9^{n+1}-1}{8}$ (formule sommatoire du cours ou somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)

V.

1°) (u_n) est une suite géométrique strictement croissante telle que $u_0 = 4$.

2°) (u_n) est une suite géométrique strictement croissante telle que $u_0 = -3$.

1°) $q > 1$ 2°) $0 < q < 1$

VI. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{u_n}}{2} \end{cases}$

1°) **Démontrons par récurrence que la phrase $P(n)$: « $u_n \leqslant 1$ » est vraie pour tout entier naturel n.**

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$u_0 = \dfrac{1}{4}$ par hypothèse (définition de la suite).

Or $\dfrac{1}{4} \leqslant 1$ donc $u_0 \leqslant 1$

D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k \leqslant 1$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k + 1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \leqslant 1$.

On a : $u_k \leqslant 1$.

Donc $\sqrt{u_k} \leqslant \sqrt{1}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[.

Donc $\sqrt{u_k} + 1 \leqslant 2$.

Donc $\dfrac{\sqrt{u_k}+1}{2} \leqslant \dfrac{2}{2}$.

Donc $\dfrac{\sqrt{u_k}+1}{2} \leqslant \dfrac{2}{2}$.

Donc $u_{k+1} \leqslant 1$.

Donc $P(k + 1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k + 1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Le résultat ainsi démontré peut se formuler en disant que **la suite (u_n) est majorée par 1.**

2°) $u_8 \approx$ **0,999 (troncature au millième)**

3°) **Bonus :**

Étudions la monotonie de la suite (u_n).

Il y a trois méthodes :

1ère méthode : différence
2e méthode : quotient
3e méthode : récurrence

1ère méthode :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+\sqrt{u_n}}{2} - u_n = \frac{1+\sqrt{u_n}-2u_n}{2} = \frac{\left(1-\sqrt{u_n}\right)\left(1+2\sqrt{u_n}\right)}{2}$$

On étudie ensuite le signe de chaque facteur.

2e méthode :

On doit commencer par dire que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1+\sqrt{u_n}}{2}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{u_n}}{2u_n} = \frac{1}{2u_n} + \frac{\sqrt{u_n}}{2u_n} = \frac{1}{2u_n} + \frac{1}{2\sqrt{u_n}}$$

$u_n \leqslant 1$ donc $\dfrac{1}{2u_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{u_n}} \geqslant \dfrac{1}{2}$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$