$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 1^{er} octobre 2012 (50 minutes)

Prénom : ……………………………….

Nom : …………………………………

I. (4 points) Questions de cours ; présentation des calculs

Le plan est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Pour le a) de chaque question, écrire très lisiblement et sans rature la formule de cours sans justifier.
Pour le b) de chaque question, appliquer les formules en utilisant directement les valeurs et en respectant la présentation demandée.

1°) a) On considère les points $\text{E}(x_{\text{E}}\ ;\ y_{\text{E}})$ et $\text{F}(x_{\text{F}}\ ;\ y_{\text{F}})$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{EF}}$ a pour coordonnées (…………… ; ……………).

b) **Application :** $\text{U}\left|\begin{array}{l}5\\-2\end{array}\right.$ $\text{V}\left|\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.$

$\overrightarrow{\text{UV}}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$

2°) Dans cette question, on suppose que le repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthonormé.

a) On considère les points $\text{A}(x_{\text{A}}\ ;\ y_{\text{A}})$ et $\text{B}(x_{\text{B}}\ ;\ y_{\text{B}})$.

AB = ………………………………………………………………………….

b) **Application :** $\text{M}\left|\begin{array}{l}\sqrt{3}+2\\\sqrt{3}-2\end{array}\right.$

OM = ……………………………………… = ……………………………………………… = …...............

II. (9 points) Aucune figure n'est demandée. Il est demandé de ne pas utiliser un repère du plan.

Soit A, B, C trois points du plan deux à deux distincts et x un réel.

À chaque valeur de x, on associe les points E et F tels que $\overrightarrow{\text{AE}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}} + x\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{AF}} = x\overrightarrow{\text{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AC}}$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, $\overrightarrow{\text{EF}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\text{BC}}$.
2°) Pour quelle valeur de x a-t-on :
a) E et F confondus ?
b) BCEF parallélogramme ?

Rédiger selon le modèle donné au verso sous forme de chaînes d'équivalences (à recopier).

E et F sont confondus si et seulement si …………….

si et seulement si …………….

si et seulement si …………….

si et seulement si …………….

BCEF est un parallélogramme si et seulement si ……

si et seulement si ……

si et seulement si ……

si et seulement si ……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

III. (7 points) Aucune figure n'est demandée. On veillera à soigner la présentation des calculs.

Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points A(– 3 ; 0), B(– 1 ; – 3), C(4 ; 3), D(2 ; 6).

1°) Démontrer de la manière la plus concise possible que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
2°) Démontrer que les points O, B, D sont alignés.
3°) On note E le symétrique de C par rapport au point O.
Donner sans justifier les coordonnées de E puis démontrer que (BD) // (AE).

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

Corrigé

I. Questions de cours ; présentation des calculs

1°) a) Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées ($x_F - x_E$; $y_F - y_E$).

b) $U\left|\begin{array}{l}5\\-2\end{array}\right.$ $\qquad$ $V\left|\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.$

$$\overrightarrow{UV}\left|\begin{array}{l}3-5=-2\\ \\1-(-2)=3\end{array}\right.$$

2°) a) AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

b) $M\left|\begin{array}{l}\sqrt{3}+2\\\sqrt{3}-2\end{array}\right.$

OM = $\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2 + (\sqrt{3}-2)^2}$ = $\sqrt{3+4\sqrt{3}+4+3-4\sqrt{3}+4}$ = $\sqrt{14}$

II.

A, B, C : trois points du plan deux à deux distincts

$x \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

1°) **Démontrons que pour tout réel *x*, $\overrightarrow{EF}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} \\
&= \left(x\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}\right) \\
&= \left(x - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{AC} \\
&= -\left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{AC} \\
&= \left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

2°)

a) **Déterminons pour quelle valeur de *x* les points E et F sont confondus.**

E et F sont confondus si et seulement si $\overrightarrow{EF} = \vec{0}$

si et seulement si $\left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

si et seulement si $\frac{1}{3} - x = 0$ car B $\neq$ C donc $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$ *

si et seulement si $x = \frac{1}{3}$

Conclusion :

Pour que E et F soient confondus, il faut et il suffit que $x = \frac{1}{3}$.

ou

Une condition nécessaire et suffisante pour que E et F soient confondus est que *x* soit égal à $\frac{1}{3}$.

* Rappel :

$k\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

b) **Déterminons pour quelle valeur de x le quadrilatère BCEF est un parallélogramme.**

BCEF est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}$

si et seulement si $\left(\dfrac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$

si et seulement si $\dfrac{1}{3} - x = -1$

si et seulement si $x = \dfrac{4}{3}$

Conclusion :

Pour que BCCEF soit un parallélogramme, il faut et il suffit que $x = \dfrac{4}{3}$.

ou

Une condition nécessaire et suffisante pour que BCEF soit un parallélogramme est que x soit égal à $\dfrac{4}{3}$.

III.

$A\left|\begin{matrix}-3\\0\end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix}-1\\-3\end{matrix}\right.$ $C\left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right.$ $D\left|\begin{matrix}2\\6\end{matrix}\right.$

1°) **Démontrons que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.**

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$ $\overrightarrow{DC}\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme

2°) **Démontrons que les points O, B, D sont alignés.**

$\overrightarrow{OB}\left|\begin{matrix}-1\\-3\end{matrix}\right.$ $\overrightarrow{OD}\left|\begin{matrix}2\\6\end{matrix}\right.$

$$\begin{vmatrix}-1 & 2\\-3 & 6\end{vmatrix} = -1\times 6 - (-3)\times 2$$
$$= -6 + 6$$
$$= 0$$

ou

$\overrightarrow{OD} = -2\,\overrightarrow{OB}$

Les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.
Comme ils ont un point commun, on en déduit que les points O, B, D sont alignés.

3°) E : symétrique de C par rapport à O

Donnons les coordonnées de E puis démontrons que (BD) // (AE).

$$E\left| \begin{array}{l} -4 \\ \\ -3 \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{BD}\left| \begin{array}{l} 3 \\ \\ 9 \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{AE}\left| \begin{array}{l} -1 \\ \\ -3 \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 3\times(-3) - 9\times(-1)$$

$$= -9 + 9$$

$$= 0$$

ou

$$\overrightarrow{BD} = -3\,\overrightarrow{AE}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires donc (BD) // (AE).