TS La dérivation des fonctions

Objectifs :

- revoir et consolider les bases de 1ère

- apprendre de nouvelles formules de calcul

Précision :

Dans tout le chapitre, chaque fois que l'on parle d'intervalle de $\mathbb{R}$, on sous-entend « intervalle non vide et non réduit à un singleton ».

Partie A
Généralités

I. Fonction dérivable en un réel - nombre dérivé

1°) Définition 1 [fonction dérivable en un réel]

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ (I : intervalle de $\mathbb{R}$)
$a \in \mathrm{I}$
On dit que f est *dérivable* en a pour exprimer que le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

Le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le *taux de variation* de f entre a et $a+h$. On l'appelle parfois aussi le *rapport de Newton* de f en a.

2°) Définition 2 [nombre dérivé]

Avec les notations de la définition 1, la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0 est appelée le *nombre dérivé* de f en a.
On le note $f'(a)$ (notation de Lagrange).
On a donc $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

3°) Exemples

• On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ (fonction « carré »).

La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Si oui, quel est le nombre dérivé ?

$$\forall h \in \mathbb{R}^* \quad \frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$
$$=\frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h}$$
$$=\frac{2h+h^2}{h}$$
$$=\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} \quad \text{(le } h \text{ du numérateur se simplifie avec celui du dénominateur)}$$
$$=2+h$$

On a $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}2$.

Lorsque h tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ admet une limite et cette limite est finie égale à 2. On peut donc affirmer que f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 est égal à 2.

En écriture symbolique, on écrit $f'(1)=2$.

• On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ (fonction « racine carrée »).

La fonction f est-elle dérivable en 0 (à droite) ? Si oui, quel est le nombre dérivé ?

La fonction « racine carrée » est-elle dérivable en 0 ?

$\forall h \in \mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$= \dfrac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h}$

$= \dfrac{\sqrt{h}}{h}$ (cette forme ne permet pas de trouver la limite, on a une forme indéterminée)

$= \dfrac{\cancel{\sqrt{h}}}{\cancel{\sqrt{h}} \times \sqrt{h}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{h}}$

On a $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} +\infty$.

Lorsque h tend vers 0 par valeurs strictement positives, le quotient $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ admet une limite mais cette limite n'est pas finie. On peut donc affirmer que f n'est pas dérivable en 0 (on dit « à droite » car la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$).
Il n'y a donc pas de nombre dérivé de f en 0.

4°) À propos de l'étude pratique de la dérivabilité d'une fonction

On reprend les notations des définitions.

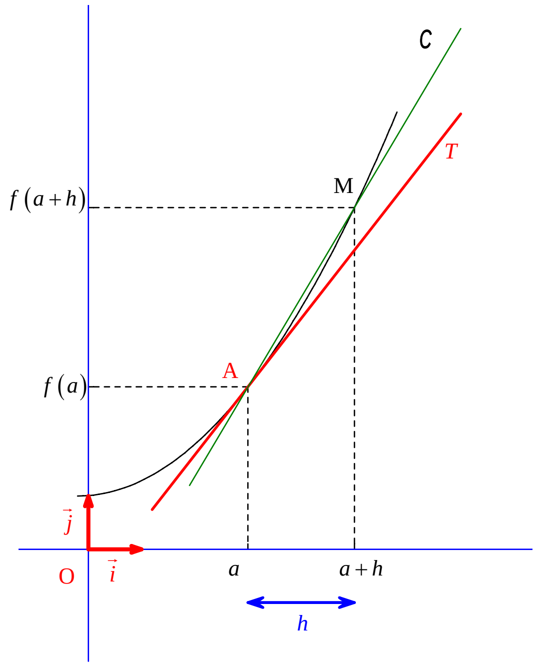
Lorsque h tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ fait apparaître une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$".
Cependant, il arrive que ce quotient tende vers une limite finie comme on le voit dans l'exemple de la fonction « carré » par l'évanouissement du h au dénominateur.
Cela a étonné les mathématiciens au XVII^{e} siècle.

II. Tangente à la courbe d'une fonction

1°) Approche graphique ; vision dynamique

Mêmes notations.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan et A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.



Lorsque h tend vers 0, la droite (AM) vient se confondre avec la droite T passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$ (« position limite »).

Les gestes associés en faisant pivoter une règle autour du point A permettent de bien retenir le principe (idée de Fermat).

2°) Définition [tangente]

Lorsque f est dérivable en a, la droite T passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la *tangente* à la courbe $\mathcal{C}$ en A.

Au XVII^{e} siècle, on parlait de « touchante ». Le mot tangente vient du verbe latin tango, tangis, tangere qui signifie toucher.

3°) Équation de la tangente

La tangente T en A à $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Cette formule provient de l'équation d'une droite de coefficient directeur donné passant par un point donné.

La droite passant par un point A et de coefficient directeur m a pour équation $y = m(x-x_{\text{A}})+y_{\text{A}}$.

T
- passe par le point A de coordonnées $x_A = a$ et $y_A = f(a)$
- a pour coefficient directeur $f'(a)$

D'où la formule.

4°) Tangente horizontale

Une tangente parallèle à l'axe des abscisses est appelée tangente horizontale.
Avec les notations précédentes, $\mathcal{C}$ présente une tangente horizontale au point d'abscisse a si et seulement si $f'(a)=0$.

III. Fonction dérivée

1°) Définition 1 [fonction dérivable sur un intervalle]

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ (I : intervalle)
On dit que f est *dérivable* sur I pour exprimer que f est dérivable en tout réel $a \in \mathrm{I}$.

2°) Définition 2 [fonction dérivée]

Avec les notations précédentes, on peut définir la fonction $f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

appelée *fonction dérivée* de *f*.

3°) Définition 3 [fonction dérivable sur une réunion d'intervalles]

$f : D \to \mathbb{R}$ avec D réunion d'intervalles

On dit que f est dérivable sur D pour exprimer que f est dérivable sur les intervalles qui constituent D.
On peut alors définir la dérivée de f définie sur D.

IV. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
$k \quad (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

On peut rajouter :
- la fonction exponentielle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est égale à elle-même :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \exp(x)$;
- la fonction logarithme népérien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ dont la dérivée est égale à la fonction « inverse » :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Les dérivées des fonctions cosinus et sinus sont admises provisoirement ; elles seront démontrées ultérieurement.

V. Opérations algébriques

1°) Formules

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I.

k est un réel quelconque.

Fonction	**Dérivée**
$u+v$	$u'+v'$
$k\times u$	$k\times u'$
$u\times v$	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}\quad (u\neq 0)$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}\quad (v\neq 0)$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$u^n\quad (n\in\mathbb{N}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u^n}\quad (n\in\mathbb{N}^*,\ u\neq 0)$	$-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}\quad (u>0)$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

On pourra s'étonner des notations utilisées ici.
Il s'agit de notations qui se réfèrent aux opérations sur les fonctions (somme de deux fonctions, produit d'une fonction par un réel, produit de deux fonctions, quotient de deux fonctions, inverse d'une fonction).
La notation $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ est juste un peu abusive.

• On retiendra particulièrement les formules de dérivation d'une puissance de fonction et de racine carrée d'une fonction, nouvelles cette année.

• On retient les formules sous la forme $(u+v)'=u'+v'$, $(ku)'=ku'$, …, $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

• Les formules $(\cos u)'=-u'\sin u$ et $(\sin u)'=u'\cos u$ s'obtiennent par application de la formule générale de dérivation d'une composée.

Le jeudi 30 septembre 2021 (T6 et 7 spécialité)

• On va s'intéresser à la formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

On peut la démontrer facilement.

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{\left(u^n\right)'}{\left(u^n\right)^2}=-\frac{nu'u^{n-1}}{u^{2n}}=-\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

• On va s'intéresser aux formules $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$ et $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

Dans la première formule, il s'agit de la dérivée de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^n}$.
Dans la deuxième formule, u est une fonction dérivable.

La deuxième formule permet de retrouver la première car $(x)'=1$.

• À propos des formules de dérivées des fonctions cosinus et sinus.

On a $(\sin x)'=\cos x$ et $(\cos x)'=-\sin x$.

Une primitive de la fonction cosinus est la fonction sinus.

Les fonctions cosinus et sinus sont liées par les dérivées et les primitives.

Questions :

$(-\cos x)'$?
$(-\sin x)'$?

• Dérivée de la fonction tangente

On s'intéresse à la fonction $f : x\mapsto\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Elle est définie sur l'ensemble des réels dont le cosinus est différent de 0 (cet ensemble est $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$).

Pour dériver f, on va utiliser la formule de dérivation d'un quotient $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'\times\cos x-\sin x\times(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x\times\cos x-\sin x\times(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}$$

On sait que quel que soit $\forall x\in\mathbb{R}\quad(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$.

On peut donc simplifier le résultat en $f'(x)=\dfrac{1}{(\cos x)^2}$.

On rappelle la notation particulière aux fonctions trigonométriques $(\cos x)^2=\cos^2 x$, $(\sin x)^2=\sin^2 x$ (notation valable pour n'importe quel exposant).

On peut reprendre à la ligne $f'(x)=\dfrac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}$ en séparant en deux quotients.

$$f'(x)=\frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2}+\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}$$

$\dfrac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2}$ se simplifie en 1.

$$=1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$$

$$=1+(\tan x)^2$$

On retiendra au passage la formule trigonométrique : $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Remarque sur la calculatrice Numworks où on peut avoir cos(6)^2.
Il s'agit du cosinus au carré.

Compléments :

● **Formule de dérivation du cosinus et du sinus d'une fonction à connaître :**

On donne dans le petit tableau ci-dessous les formules de dérivation d'une fonction du type $\cos u$ et $\sin u$ où u est une fonction dérivable.

$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$

On retient les formules sous la forme $(\cos u)'=-u'\sin u$ et $(\sin u)'=u'\cos u$.

On retiendra particulièrement ces formules de dérivation du cosinus ou du sinus d'une fonction, nouvelles cette année.

● **Formule de dérivation d'une fonction homographique intéressante à connaître :**

On rappelle que, par définition, une fonction homographique est le quotient de deux fonctions affines.

Soit a, b, c, d des réels tels que $c\neq 0$.
On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{ax+b}{cx+d}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

On a $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\quad f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Rappel : $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$ (déterminant)

La notion de déterminant est utilisée en géométrie pour la colinéarité des vecteurs dans le plan muni d'un repère.

On peut donc écrire : $f'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

On retient :

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

La démonstration est très facile.

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u : x \mapsto ax+b$ et $v : x \mapsto cx+d$.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ $f'(x)=\dfrac{a\times(cx+d)-(ax+b)\times c}{(cx+d)^2}$

$$=\frac{\cancel{acx}+ad-\cancel{acx}-bc}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$ (les x disparaissent au numérateur)

La formule est prête à l'emploi et permet de gagner du temps.

Exemple :

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+5}{x-2}$ définie $\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\,2\,\}$ $f'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{(x-2)^2}$

$$=\frac{3\times(-2)-1\times 5}{(x-2)^2}$$

$$=-\frac{11}{(x-2)^2}$$

• **Formules utiles à connaître :**

$\boxed{\left(\dfrac{u}{k}\right)'=\dfrac{u'}{k}}$ (u est une fonction dérivable sur I, k est un réel non nul)

$\boxed{\left(\dfrac{k}{u}\right)'=-\dfrac{ku'}{u^2}}$ (u est une fonction dérivable sur I, ne s'annulant pas sur I, k est un réel)

Ces formules proviennent des réécritures $\dfrac{u}{k}=\dfrac{1}{k}\times u$ et $\dfrac{k}{u}=k\times\dfrac{1}{u}$.

Exemples d'application de la formule $\left(\dfrac{u}{k}\right)'=\dfrac{u'}{k}$:

$\left(\dfrac{x^2}{3}\right)'=\dfrac{2x}{3}$

$\left(\dfrac{3}{x}\right)'=-\dfrac{3}{x^2}$ (on écrit en effet : $\dfrac{3}{x}=3\times\dfrac{1}{x}$ d'où $\left(\dfrac{3}{x}\right)'=3\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=3\times-\dfrac{1}{x^2}$).

L'application de ces deux formules est préférable à celle de la dérivée d'un quotient qui donne le même résultat après simplification.

Avec la formule de dérivée d'un quotient, on obtient : $\left(\dfrac{x^2}{3}\right)'=\dfrac{2x\times 3-x^2\times 0}{3^2}=\dfrac{2x\times 3}{3^2}=\dfrac{2x}{3}$.

On retrouve le même résultat mais le calcul est moins élégant.

2°) Calculs de dérivées

• On utilise les dérivées des fonctions de référence et les formules d'opérations.
Des exemples de calculs sont donnés dans la **partie B**.

• On peut utiliser l'application photomaths ou le site dcode pour vérifier les résultats.

La notation utilisée par photomaths est $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}...}(..............)$, notation dite de Leibniz qui sera expliquée dans la suite.

• Sur la calculatrice Numworks, on peut vérifier un calcul de dérivée avec l'astuce suivante :

Ouvrir fonction :

• inscrire la fonction principale
• inscrire la fonction dérivée trouvée
• aller sur « tableau »
• cliquer sur le tableau de la dérivée principale et activer la colonne de la fonction dérivée
• vérifier si les résultats entre la 2e et la 3e colonne sont concordants.

VI. Les grandes familles de fonctions

1°) Propriété 1

Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

2°) Propriété 2

Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Rappel :

On appelle fonction rationnelle le quotient de deux fonctions polynômes.

Cas particulier :

On appelle fonction homographique le quotient de deux fonctions affines $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c, d sont des réels.

VII. Sens de variation

1°) Théorème de Lagrange

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable sur I (I : intervalle)

- **Si $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.**
- **Si $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.**
- **Si $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.**

2°) Propriété sur la stricte monotonie (admise sans démonstration)

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable sur I (I : intervalle)

- **Si $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.**
- **Si $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.**

3°) Propriété

$f : [a\,;b] \to \mathbb{R} \quad (a < b)$
f continue sur $[a\,;b]$ (la notion de continuité sera précisée dans le chapitre suivant)
f dérivable sur $]a\,;b[$

- **Si $\forall x \in]a\,;b[\quad f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a\,;b]$.**
- **Si $\forall x \in]a\,;b[\quad f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $[a\,;b]$.**

4°) Application aux variations d'une fonction

L'étude du signe de la dérivée d'une fonction donne les variations de la fonction.
On consigne en général l'étude du signe de la dérivée de 1a fonction et ses variations dans un même tableau.
Ce tableau permet de lire les extremums de la fonction.
On doit bien penser à mettre les 0 sur la ligne du signe de la dérivée.

5°) Propriété sur la stricte monotonie

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I non réduit à un singleton.

• f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) \geqslant 0$ et f' ne s'annule sur aucun intervalle non réduit à un singleton.

• f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) \leqslant 0$ et f' ne s'annule sur aucun intervalle non réduit à un singleton.
Le cas le plus fréquent sera : « f' s'annule éventuellement en un nombre fini de valeurs » (exemple : « fonction cube » sur $\mathbb{R}$).

6°) Caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle

Il s'agit d'une propriété fondamentale (condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit constante sur un intervalle).

Énoncé

Soit f une fonction $\boxed{\text{définie sur un intervalle}}$ I non vide et non réduit à un singleton.
f est constante sur I si et seulement si f est dérivable sur I et sa dérivée est identiquement nulle sur I ($\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = 0$).

Commentaire :

L'hypothèse « f définie sur un intervalle » est fondamentale.

Démonstration :

On procède dans les deux sens.
Le sens « f est constante sur I implique f est dérivable sur I et sa dérivée est identiquement nulle sur I » est très facile.

Le sens « f est dérivable sur I et sa dérivée est identiquement nulle sur I implique f est constante sur I » se démontre en disant que d'après le théorème de Lagrange, f est à la fois croissante et décroissante sur I.
Donc f est constante sur I (les seules fonctions à la fois croissantes et décroissantes sur un intervalle sont les fonctions constantes sur cet intervalle).

VIII. Dérivées successives

1°) Définition

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Lorsque la fonction f' est dérivable sur I, alors on peut définir la **dérivée seconde** de f : $f'' = (f')'$.
Autrement dit, la dérivée seconde est la dérivée de la dérivée.

Lorsque la fonction f'' est dérivable sur I, alors on peut définir la **dérivée troisième** de f : $f''' = f^{(3)} = (f'')'$.
Autrement dit, la dérivée troisième est la dérivée de la dérivée seconde.

N.B. : L’ordre de dérivation se met entre parenthèses (pour ne pas confondre avec un exposant de puissance).

2°) Exemple

$f : x \mapsto x^3 + 5x^2 - 4x + 1$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Calculer les dérivées successives de *f*.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 + 10x - 4$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 6x + 10$

f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'''(x) = 6$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(4)}(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = 0 \ (n \geqslant 4)$ (« de proche en proche »)

Les fonctions polynômes sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions rationnelles sont infiniment dérivables sur leur ensemble de définition.

On peut dériver ces fonctions autant de fois qu’on le désire.
Ce n’est pas le cas de toutes les fonctions.

IX. Utilisation de la calculatrice (modèle TI)

1°) Tracer une tangente sur la calculatrice

① On entre notre fonction dans $\boxed{f(x)}$ (exemple : $x^2 + 2x - 1$).

② On appuie sur la touche $\boxed{\text{graphe}}$.

③ $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{prgm}}$ choix 5 : Tangente (

On retourne sur graphe.

④ On choisit le point en lequel on veut tracer la tangente. On peut « taper » soi-même la valeur de l’abscisse du point.

L’équation réduite de la tangente s’affiche en bas de l’écran.

2°) Obtenir le nombre dérivé d’une fonction

① On appuie sur la touche $\boxed{\text{2nde}}$ puis sur la touche représentant une barre de fraction.

② On choisit ensuite $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\square}(\square)\Big|_{\square=\square}$. On doit remplir tous les petits « carrés ».

Par exemple, pour obtenir le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x$ en 2 (c’est-à-dire $f'(2)$), on doit remplir les carrés de sorte que l’on ait l’affichage suivant :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\left(\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X}\right)\Big|_{\mathrm{X}=2}$$

Le résultat qui s’affiche est 1.

C’est bien la valeur exacte du nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x$ en 2 comme le montre un petit calcul mental de dérivées.

Remarque : La calculatrice ne calcule pas la dérivée de la fonction. Elle procède par approximation du nombre dérivée. On peut trouver que cela n’est pas précis. Il faut savoir que la calculatrice donne parfois la valeur exacte du nombre dérivé mais que plus souvent elle donne une valeur approchée.

Cela ne marche pas pour des grands nombres.
Même si cela n’est pas forcément très précis, cela peut être une aide précieuse en exercice.
Exemple : Pour calculer $f'(3)$, la calculatrice calcule $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$ pour une valeur de *h* proche de 0.

Elle utilise d’ailleurs une notion qui n’est pas au programme du lycée, la notion de dérivée symétrique.

3°) Calculer la dérivée d’une fonction avec Symbolic

X. Utilisation d’un logiciel de calcul formel

Le samedi 2 octobre 2022

• Pour une fonction polynôme ou rationnelle

ensemble de dérivation = ensemble de définition toujours ($\mathbb{R}$ si polynôme)

• $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$

ensemble de définition $u(x) \geqslant 0$

$\{\text{ensemble des } x \,/\, u(x) > 0\} \subset$ ensemble de dérivabilité

$\rightarrow$ il peut exister des réels *x* tels que $u(x) = 0$ en lesquels *f* est dérivable

Le 22 octobre 2022

ensemble de dérivation $\subset$ ensemble de définition

Plus précisément, on a :

ensemble de dérivation $\subset$ ensemble de continuité $\subset$ ensemble de définition

Partie B

Autour de la composition

I. Dérivée d'une puissance d'exposant entier naturel

1°) Propriété

> u est une fonction dérivable sur un intervalle I.
> n est un entier naturel non nul.
> La fonction u^n est dérivable sur I et la dérivée est donnée par la formule $\boldsymbol{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$.

2°) Démonstration

• Cas particuliers

Pour $n = 2$ $\quad (u^2)' = (u \times u)' = \underbrace{u' \times u + u \times u'}_{\text{formule de dérivation d'un produit}} = 2uu'$ (dérivée du carré d'une fonction)

Le cas particulier de l'exposant 2 est important ; on retient la formule : $\boxed{(u^2)' = 2uu'}$.

Pour $n = 3$ $\quad (u^3)' = (u \times u^2)' = u' \times u^2 + u \times (u^2)' = u' \times u^2 + u \times 2uu' = u' \times u^2 + 2u^2u' = 3u^2u'$

• Cas général :

Il faut faire une démonstration par récurrence sur l'entier naturel n.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la phrase $P(n)$: « $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ ».

Initialisation :

Vérifions que la phrase $P(1)$ est vraie.

D'une part, on a : $(u^1)' = u'$.

D'autre part, on a : $1u'u^{1-1} = u'u^0 = u'$.

D'où la phrase $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.

On a : $(u^{k+1})' = (u \times u^k)' = u'u^k + u \times ku'u^{k-1} = u'u^k + ku'u^k = (k+1)u'u^k$.

Donc la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que la phrase $P(1)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geqslant 1$, alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

3°) Exemples

• $f : x \mapsto (x^3 - x - 2)^4$

$D_f = \mathbb{R}$

On peut poser $u(x) = x^3 - x - 2$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4(3x^2 - 1)(x^3 - x - 2)^3$

On laisse le résultat sous cette forme sans chercher à arranger le résultat.

• $f : x \mapsto \sin^3 x = (\sin x)^3$

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3\cos x \times (\sin x)^2$

$= 3\cos x \times \sin^2 x$

4°) Lien avec une autre formule

Dans la formule, u désigne une fonction.

On va appliquer la formule dans le cas particulier où $u(x) = x$.

On suppose que u est la fonction définie par $u(x) = x$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = 1$.

On considère la fonction $f = u^n$.

On a donc $f(x) = [u(x)]^n = x^n$ pour tout réel x.

La formule donne $f' = nu'u^{n-1}$.

Donc $f'(x)=n\times 1\times nx^{n-1}=nx^{n-1}$.

On retrouve ainsi la dérivée de la fonction $x\mapsto x^n$.

II. Dérivée de l'inverse d'une puissance d'exposant entier naturel

1°) Propriété

u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I.
n est un entier naturel non nul.

La fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I

et la dérivée est donnée par la formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

2°) Cas particulier important : exposant 1 (déjà vue)

$\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}}$ (dérivée de l'inverse d'une fonction)

3°) Démonstration

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{\left(u^n\right)'}{\left(u^n\right)^2}=-\frac{nu'u^{n-1}}{u^{2n}}=-\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

3°) Exemple

$f:x\mapsto\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^5}$

$D_f=\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=-\dfrac{5\times 2x}{\left(x^2+1\right)^6}$

$=-\dfrac{10x}{\left(x^2+1\right)^6}$ (on laisse le résultat sous cette forme)

4°) Lien avec la formule précédente

En écrivant $\dfrac{1}{u^n}=u^{-n}$, on obtient la même formule que dans le **I**.

III. Dérivée de la racine carrée d'une fonction

1°) Propriété

u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u>0$ sur I (on dit que u est à valeurs strictement positives, on peut écrire u : I $\rightarrow\mathbb{R}_+^*$).

La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I

et la dérivée est donnée par la formule $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

2°) Démonstration

On doit travailler en littéral en utilisant la définition du nombre dérivé.

a est un élément fixé de I.

h est un réel non nul tel que $a+h\in$ I.

On cherche la limite du quotient $\dfrac{\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}}{h}$ lorsque h tend vers 0.

On ne peut trouver cette limite directement car on obtient une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$".

$$\frac{\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}}{h}=\frac{\left(\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}\right)\times\left(\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}\right)}{h\times\left(\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}\right)}$$

$$=\frac{u(a+h)-u(a)}{h\times\left(\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}\right)}$$

$$=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times\frac{1}{\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}}$$

Comme u est dérivable en a, on a : $\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}u'(a)$ (cette forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$" s'obtient bien souvent en pratique grâce à un « évanouissement » des h au numérateur et au dénominateur).

On admettra que $u(a+h)\xrightarrow[h\to 0]{}u(a)$ et que $\dfrac{1}{\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}}\xrightarrow[h\to 0]{}\dfrac{1}{2\sqrt{u(a)}}$ (on « remplace » h par 0).
Nous admettrons provisoirement que la limite d'un produit est égale au produit des limites.

On en déduit que : $\dfrac{\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \dfrac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$.

Par suite, on peut affirmer que la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable en a et que le nombre dérivé en a est égal à $\dfrac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$.

Comme le résultat est vrai pour tout réel $a \in \mathrm{I}$, on en déduit que u est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

3°) Lien avec la formule de dérivation da la puissance d'une fonction

On admettra qu'il est possible de définir l'exposant fractionnaire d'un réel quelconque positif ou nul et que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Plus généralement, la racine n-ième (n entier naturel supérieur ou égal à 2) d'un réel positif ou nul x peut s'écrire sous la forme d'un exposant fractionnaire : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

En admettant que la formule de dérivation de la puissance d'une fonction reste valable pour les exposants fractionnaires, on obtient $\left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}u'u^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}u' \times \dfrac{1}{u^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{u'}{2u^{\frac{1}{2}}}$.

On retrouve bien la formule de la racine carrée d'une fonction.

Cependant, cette année, nous éviterons d'utiliser un exposant $\dfrac{1}{2}$ pour les calculs de dérivées.

4°) Exemples

• $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2+1>0$

On peut poser $u(x) = x^2+1$.

D'après la propriété, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \textit{(on laisse le résultat sous cette forme)}$$

• $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

$D_f = [-1\,;1]$

$x^2-1>0 \Leftrightarrow -1<x<1$

D'après la propriété, f est dérivable sur $]-1\,;1[$.

$$\forall x \in]-1\,;1[\quad f'(x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \textit{(on laisse le résultat sous cette forme)}$$

On ne s'intéresse pas cette année à l'étude de la dérivabilité de la fonction en 1 et en – 1.

• $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$

$D_f = [2\,;+\infty[$

$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

D'après la propriété, f est dérivable sur $]2\,;+\infty[$.

$$\forall x \in]2\,;+\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

Dans les trois exemples, on voit qu'il faut faire particulièrement attention aux intervalles.

5°) Cas particulier

> a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$.
> On note I l'ensemble des réels x tels que $ax+b \geqslant 0$ et I′ l'ensemble des réels x tels que $ax+b>0$.
> f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{ax+b}$.
> f est définie sur I.
> f est dérivable sur I′.
> $\forall x \in \mathrm{I'} \quad f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

On retient la formule sous la forme : $\boldsymbol{\left(\sqrt{ax+b}\right)' = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}}$.

6°) Condition d'existence de la racine carrée d'une expression

> La racine carrée d'une expression existe si et seulement si cette quantité est positive ou nulle.

En revanche, lorsque nous voudrons dériver une fonction dont l'expression est de la forme $\sqrt{u(x)}$, nous n'appliquerons la propriété de dérivation que pour les valeurs de x pour lesquelles $u(x)>0$ sans nous intéresser aux valeurs de x pour lesquelles $u(x)=0$.

IV. Dérivée de la composée d'une fonction affine suivie d'une fonction dérivable

1°) Propriété (admise sans démonstration)

a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$.
I et J sont deux intervalles tels que $\forall x \in \mathrm{I} \quad ax+b \in \mathrm{I}$.
u est une fonction définie et dérivable sur J.
f est la fonction définie par $f(x)=u(ax+b)$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[r] & \mathrm{J} \arrow[r] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "f"'] & ax+b \arrow[r, mapsto] & u(ax+b) \end{tikzcd}$$

La fonction f est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x)=\underline{\underline{a}}\times u'(ax+b)$.

2°) Autre écriture

On retient $\left[u(ax+b)\right]'=\underline{\underline{a}}\times \underbrace{u'(ax+b)}_{\text{image de } ax+b \text{ par la fonction } u}$.

3°) Application de la formule à la fonction « racine carrée » (dérivée d'une fonction du type $x \mapsto \sqrt{ax+b}$)

$$u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

$$u' : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Le domaine de dérivabilité est plus petit que le domaine de définition ; u est définie en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

On retrouve la formule : $\left(\sqrt{ax+b}\right)'=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

4°) Application de la formule aux fonctions « cosinus » et « sinus »

a et b sont deux réels quelconques.

$$\left(\cos(ax+b)\right)'=-a\sin(ax+b)$$

$$\left(\sin(ax+b)\right)'=a\cos(ax+b)$$

V. Formule générale de la dérivée de la composée de deux fonctions

Les formules précédentes peuvent être vues comme applications d'une formule plus générale que l'on va admettre sans démonstration.

1°) Propriété – Formule unificatrice (admise sans démonstration)

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur des intervalles.

On note f la fonction définie par $f(x)=v\left[u(x)\right]$.

On suppose que f est définie sur un intervalle I.

La fonction f est alors dérivable sur I et la dérivée de f est donnée par $f'(x)=u'(x)\times v'\left[u(x)\right]$.

$v'\left[u(x)\right]$ désigne l'image de $u(x)$ par la fonction v'.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend left, "f"] & u(x) & \\ & X \arrow[r, mapsto, "v"] & v(X) \end{tikzcd}$$

Il serait intéressant de donner une propriété avec le nombre dérivé en un réel.

2°) Cas particuliers

- La formule de dérivation de u^n s'obtient par application de la formule générale en prenant la fonction $v : x \mapsto x^n$.

- La formule de la dérivation de $\dfrac{1}{u^n}$ s'obtient par application de la formule générale en prenant la fonction $v : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$.

- La formule de la dérivation de $\sqrt{u}$ (u étant une fonction définie sur un intervalle I à valeurs strictement positives) s'obtient par application de la formule générale en prenant la fonction $v : x \mapsto \sqrt{x}$.

En effet, la fonction $f=\sqrt{u}$ s'écrit $f=v\circ u$. On a donc :

$$\forall x\in \mathrm{I}\quad f'(x)=u'(x)\times v'\left[u(x)\right]$$

$$=u'(x)\times\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

On retrouve bien la formule $f'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

• La formule de la dérivation de la fonction $x\mapsto g(ax+b)$ s'obtient par application de la formule générale en prenant les fonctions $u:x\mapsto ax+b$ et $v=g$.

• Les formules de dérivation $(\cos u)'=-u'\sin u$ et $(\sin u)'=u'\cos u$ s'obtiennent par application de la formule générale.
Ces formules seront étudiées ultérieurement dans le chapitre sur les fonctions cosinus et sinus.

3°) Vocabulaire et notation

Lorsque *u* et *v* sont deux fonctions, la fonction *f* définie par $f(x)=v\left[u(x)\right]$ est appelée la **composée** de *u* suivie de *v*.

On note parfois $\boldsymbol{f=v\circ u}$ et on lit « *v* rond *u* ».

Cette notation est contraire à l'ordre « *u* suivie de *v* » mais elle respecte l'ordre des parenthèses.

L'expression de la fonction *f* dépend évidemment de l'ordre de composition « *u* suivie de *v* » (qui est bien sûr différent de « *v* suivie de *u* »).
On retiendra la formule :

$$(v\circ u)(x)=v\left[u(x)\right]$$

Le terme de composée pour les fonctions est seulement employé dans ce sens très précis et ne peut être employé que dans ce sens.

Pour définir la composée de la fonction *u* suivie de la fonction *v*, on peut aussi considérer le programme de calcul suivant :

• On choisit un réel *x*.

• On calcule son image par *u*.

• On calcule l'image du résultat par *v*.

Lorsque *u* et *v* sont dérivables, la formule de dérivation de leur composée sous la forme suivante que l'on a intérêt à retenir :

$$(v\circ u)'(x)=u'(x)\times v'\left[u(x)\right].$$

4°) Le mot « composée »

Nous venons de voir la notion de composée de fonctions.
Le mot « composée » ne doit être employé exclusivement que dans ce contexte et uniquement dans ce sens-là.

5°) Exemples de calculs de composées

On considère les fonctions
$u:x\mapsto 2x-1$
$v:x\mapsto x^2$.

Calculer $(v\circ u)(x)$ et $(u\circ v)(x)$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad (v\circ u)(x)&=v(X)\quad\text{avec } X=u(x)\\&=X^2\\&=(2x-1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad (u\circ v)(x)&=u(X)\quad\text{avec } X=v(x)\\&=2X-1\\&=2x^2-1\end{aligned}$$

On observe que les fonctions $u\circ v$ et $v\circ u$ sont différentes.
On dit que l'opération de composée des fonctions n'est pas commutative.

6°) Écriture de la formule de dérivation d'une composée

• On peut écrire la formule de dérivation d'une composée sous la forme :

$$(f\circ g)'(x)=g'(x)\times(f'\circ g)(x).$$

• On peut même écrire cette formule sous la forme :

$$(f\circ g)'=g'\times(f'\circ g).$$

7°) La notion de composée dans le programme

• La notion de composée ne sera pas beaucoup utilisée cette année. Malgré tout, c'est une notion de première importance en mathématiques.

• Du coup, la notation $\circ$ sera peu utilisée cette année.

• La notion de composée réapparaîtra cependant ultérieurement cette année au moment des limites.

Résumé :

Dans le cadre des fonctions, le mot « composée » aura un sens très précis.

Le 8-10-2020

La composée de deux fonctions consiste à « mettre » une fonction dans une autre fonction.

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ (image de $f(x)$ par g).

La notation $v \circ u$ doit être lue d'un bloc « v rond u » sans décortiquer.
Le rond désigne la composée de deux fonctions. Il ne faut pas chercher à comprendre cette notation.

La notion de composée s'emploie dans le cadre des fonctions et dans le cadre géométrique avec les composées de transformations.

Exemple :

Étant trois points A, B, C du plan, la composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ est égale à la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
En écriture symbolique, on écrit : $t_{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} \circ t_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = t_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$.
Cette relation donne lieu à la relation de Chasles pour les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

À quoi servent concrètement les composées ?

C'est une question bien légitime. Une grosse application concerne les sens de variations des fonctions.

Propriété

Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur E à valeurs dans F.
Soit g une fonction définie sur F à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est croissante sur E et g est croissante sur F, alors $g \circ f$ est croissante sur E.
Si f est décroissante sur E et g est croissante sur F, alors $g \circ f$ est décroissante sur E.
Si f est décroissante sur E et g est décroissante sur F, alors $g \circ f$ est croissante sur E.
Si f est croissante sur E et g est décroissante sur F, alors $g \circ f$ est décroissante sur E.

On a une propriété qui ressemble à la règle des signes.

La démonstration est basée sur la définition d'une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle.

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• On dit que f est croissante sur E pour exprimer que pour tout couple $(a\,;b)$ d'éléments de E,
$a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$.

• On dit que f est décroissante sur E pour exprimer que pour tout couple $(a\,;b)$ d'éléments de E,
$a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$.

Idem fonction strictement croissante / strictement décroissante.
La propriété permet de trouver très facilement des sens de variation de fonctions.

Exemples :

Soit u une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonctions u^2, u^3, $\frac{1}{u}$, $\sqrt{u}$

Cas particuliers :

Cas particulier 1 [exponentielle d'une fonction]

On note $\exp \circ u = \mathrm{e}^u$.

Si u est croissante sur E, alors la fonction e^u est croissante sur E.
Si u est décroissante sur E, alors la fonction e^u est décroissante sur E.

Autrement dit, e^u a le même sens de variation que u.

Cas particulier 2 [logarithme népérien d'une fonction]

On note $\ln \circ u = \ln u$.

Soit u une fonction définie sur une partie E de E à valeurs strictement positives.

Si u est croissante sur E, alors la fonction $\ln u$ est croissante sur E.
Si u est décroissante sur E, alors la fonction $\ln u$ est décroissante sur E.

Autrement dit, $\ln u$ a le même sens de variation que u.

Le 9 octobre 2020

$(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "u"] \arrow[drr, bend right, "v \circ u"'] & u(x) & \\
& X \arrow[r, "v"] & v(X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & \underbrace{x^2+x+1} & \\
& X \arrow[r, mapsto, "v"] & \ln X
\end{tikzcd}$$

Partie C
Quelques notions sur les primitives

La notion de primitive est utilisée en mathématiques et en physique.
Un chapitre spécial sera consacré plus tard aux primitives. Leur intérêt et leur utilisation sera également vue ultérieurement.
Dans ce paragraphe, on se contente de donner quelques notions sur les primitives utilisées en physique.
On notera que les fonctions qui interviennent en physique dépendent de la variable t.
Toutes les fonctions n'admettent pas en général de primitives.

Certaines fonctions ne sont pas dérivables ; certaines fonctions n'admettent pas de primitive mais lorsque tout se passe bien :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{F} \arrow[r, bend left, "\textbf{Dériver}"] & \boldsymbol{F' = f} \arrow[l, bend left, "\textbf{Chercher une primitive}"]
\end{tikzcd}$$

« Primitiver »

En physique, on dit fréquemment « intégrer » au lieu de « primitiver ».

En physique, on est souvent amené à faire une double intégration.

1°) Définition [primitive d'une fonction sur un intervalle]

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.

On dit qu'une fonction F définie sur I est une *primitive* de f sur I pour exprimer qu'elle vérifie les conditions C_1 et C_2 suivantes :
C_1 : F est dérivable sur I ;
C_2 : $F' = f$.

Le vendredi 10 septembre 2021

Cours en T1

On a souligné l'analogie entre image et antécédent.

2°) Remarque de notation

On a coutume de noter une primitive par la même lettre que la fonction mais en majuscule ($f \to$ F, $g \to$ G, etc…).

3°) Remarque sur les primitives d'une fonction

Propriété [ajout d'une constante à une primitive]

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.
Pour tout réel k, la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x)+k$ est aussi une primitive de f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I.

Conséquence : Dès lors qu'une fonction admet une primitive, elle en admet une infinité : toutes celles obtenues en ajoutant une constante à la primitive.

On démontre que si f est une fonction qui admet une primitive sur un intervalle, alors toutes les primitives de f sur I s'obtiennent en ajoutant un réel k à l'une quelconque des primitives.

4°) Théorème admis (théorème de Darboux)

Toute fonction continue (cf. chapitre suivant) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton admet des primitives sur cet intervalle.

5°) Exemples

Exemple 1 : On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F : $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$.

En effet, $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \mathrm{F}'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2 = f(x)$.

On peut aussi rajouter une constante. Par exemple, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{3}x^3+5$, $x \mapsto \frac{1}{3}x^3-2$, $x \mapsto \frac{1}{3}x^3+20$ …

sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{3}x^3+k$ où k est une constante sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : On considère la fonction $f : x \mapsto x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F : $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Exemple 3 : On considère la fonction $f : x \mapsto C$ définie sur $\mathbb{R}$ où C est un réel fixé (constante).

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F : $x \mapsto Cx$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F_k : x \mapsto Cx + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Exemple 4 : On considère la fonction $f : x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F : $x \mapsto e^x$.

Les primitives de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F_k : x \mapsto e^x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Exemple 5 : On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Actuellement, nous ne connaissons pas de primitives de f sur $]0\,;+\infty[$.
Nous verrons néanmoins plus tard qu'une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ est la fonction F : $x \mapsto \ln x$ où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.

La condition « $k \in \mathbb{R}$ » se lit « k décrivant $\mathbb{R}$ ».

♦ Utilisation en physique : on connaît la dérivée d'une fonction et on cherche la fonction.

6°) Primitives prenant une valeur donnée en un réel

• *Exemple :*

Déterminer la primitive F de la fonction $f : x \mapsto x^2$ prenant la valeur 3 en 1.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F : $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + k \quad (k \in \mathbb{R})$.
On trouve la valeur de k avec la condition de l'énoncé $F(1) = 3 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{3} + k = 3$

$(1) \Leftrightarrow k = \frac{8}{3}$

La primitive cherchée est la fonction F : $x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{8}{3}$.
♦ Utilisation en physique : conditions initiales

7°) « Doubles primitives »

♦ Utilisées en physique quand on connaît l'accélération (équation horaire de mouvement).

8°) Calculs de primitives

Hormis les cas simples où l'on peut déterminer aisément une primitive comme par exemple dans le cas des fonctions polynômes, il n'est pas toujours facile de trouver l'expression d'une primitive.
Nous verrons quelques techniques de calculs de primitives dans un chapitre ultérieur spécial.

On peut aussi utiliser le site dcode.

Partie D (non dérivabilité)

Deux exemples à connaître :

• La fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

• La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 (à droite). La courbe représentative admet une demi-tangente verticale à l'origine.

Partie E (approximation affine tangente)

Les dérivées vont nous permettre de déterminer des formules d'approximation.

I. Formule d'approximation affine tangente

1°) Quelques « formules » d'approximation affines importantes en physique (justifiées ensuite)

Formule 1

Pour h « proche » de 0, on a : $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$.

Commentaires :
Attention, cette formule n'est valable que pour h « proche » de 0.
On a bien un signe $\approx$ et non un signe d'égalité. Il y a uniquement égalité lorsque $h = 0$.
On lit bien de gauche à droite (orientation).
Le mot proche est écrit entre guillemets car la notion de « proche » de 0 est très subjective.
On comprend bien le 1. On a 1 + quelque chose et dans notre cas, le quelque chose vaut $\frac{h}{2}$.
On peut dire que $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$ lorsque h est « proche » de 0.

Formule 2

Pour h « proche » de 0, on a : $\frac{1}{\sqrt{1+h}} \approx 1 - \frac{h}{2}$.

Cette propriété est d'ailleurs plutôt utilisée sous la forme suivante (dans le cours sur la relativité par exemple) :

Pour h « proche » de 0, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{1-h}} \approx 1+\dfrac{h}{2}$.

Formule 3

Pour h « proche » de 0, on a : $\dfrac{1}{1+h} \approx 1-h$.

Formule 4

Pour h « proche » de 0, on a : $\sin h \approx h$.

Formule 5

Pour h « proche » de 0, on a : $\tan h \approx h$.

Cette formule est utilisée en physique par exemple avec le demi-angle de diffraction.

Il s'agit de formules d'approximations.

On parle d'approximation affine ou d'ordre 1 car les expressions du second membre sont toutes des expressions affines de *h*.

2°) Utilisation – application

La première application évidente est liée au calcul mental.

Exemple avec la formule d'approximation $\sqrt{1+h}$.

Cette formule est fabuleuse pour le calcul mental.

• Déterminer de tête une valeur approchée de $\sqrt{1{,}0002}$.

On écrit $\sqrt{1{,}0002}=\sqrt{1+0{,}0002}$.

On applique la formule $\sqrt{1+h}\approx 1+\dfrac{h}{2}$ avec $h=0{,}0002$ que l'on considère comme proche de 0.

On obtient $\sqrt{1{,}0002}\approx 1+\dfrac{0{,}0002}{2}$ soit $\sqrt{1{,}0002}\approx 1+0{,}0001$ ou encore $\sqrt{1{,}0002}\approx 1{,}0001$.

On constate avec la calculatrice que l'approximation est assez bonne.

• On peut essayer d'appliquer la formule d'approximation pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

On écrit $\sqrt{2}=\sqrt{1+1}$.

On applique la formule $\sqrt{1+h}\approx 1+\dfrac{h}{2}$ avec $h=1$ que l'on considère comme proche de 0, ce qui est plus discutable.

On obtient $\sqrt{2}\approx 1+\dfrac{1}{2}$ soit $\sqrt{2}\approx 1+0{,}5$ ou encore $\sqrt{2}\approx 1{,}5$.

Or $\sqrt{2}=1{,}414\ldots$

L'approximation obtenue par la formule n'est pas trop mauvaise. On a une erreur de l'ordre de un dixième.

3°) Justification de la formule 1

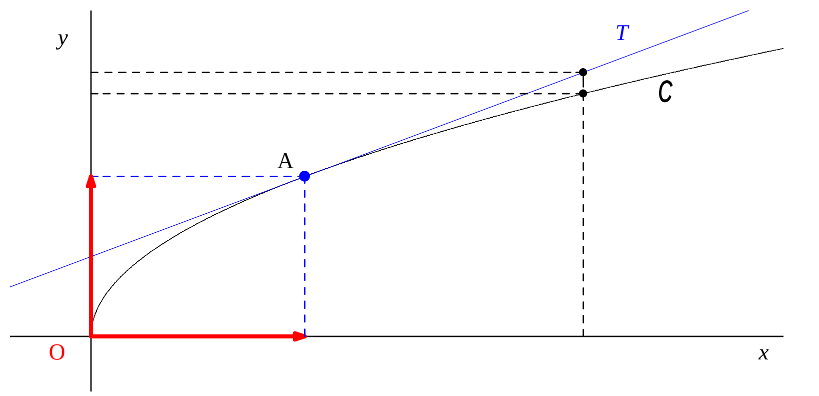
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Il y a trois aspects, les deux premiers étant liés entre eux.

● 1^er^ aspect : graphique

On trace la courbe représentative $\mathcal{C}$ de *f*.

Graphique à faire



$\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère et le point A de coordonnées (1 ; 1).

On trace ensuite la tangente *T* au point d'abscisse 1.

T a pour équation $y=\dfrac{x+1}{2}$.

Pour *h* proche de 0, $f(1+h)\approx\dfrac{1+1+h}{2}$ soit $f(1+h)\approx 1+\dfrac{h}{2}$ ce qui nous donne la formule d'approximation.

On peut faire apparaître l'erreur sur le graphique, c'est-à-dire l'écart entre la tangente et la courbe.

Ce type de graphique apparaît dans les ouvrages du XVII^{e} siècle sur les dérivées (« triangle infinitésimal »).

● 2^{e} aspect : limite

Par définition du nombre dérivé de *f* en 1, on a $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(1)$.

On peut donc considérer que $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \approx f'(1)$ pour *h* « proche » de 0.

Or on sait que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Par conséquent, $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \approx \dfrac{1}{2}$ pour *h* « proche » de 0.

On peut donc écrire $\sqrt{1+h}-1 \approx \dfrac{h}{2}$ (simple produit en croix), ce qui donne immédiatement $\sqrt{1+h} \approx 1+\dfrac{h}{2}$.

Il s'agit de la meilleure approximation affine en un sens que nous n'expliciterons pas cette année.

On remarquera que c'est ce que fait la calculatrice pour calculer un nombre dérivé.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \approx f'(a)$$

● 3^{e} aspect : algébrique

Du point de vue algébrique, on élève au carré les deux membres.

D'une part, $\left(\sqrt{1+h}\right)^2 = 1+h$.

D'autre part, $\left(1+\dfrac{h}{2}\right)^2 = 1+h+\dfrac{h^2}{4}$ (par identité remarquable).

Lorsque *h* est proche de 0, on considère que h^2, et par conséquent $\dfrac{h^2}{4}$ aussi, est « négligeable » devant *h*.

On en déduit que $\left(1+\dfrac{h}{2}\right)^2 \approx 1+h$ pour *h* proche de 0.

Par conséquent, $\sqrt{\left(1+\dfrac{h}{2}\right)^2} \approx \sqrt{1+h}$ d'où $\left|1+\dfrac{h}{2}\right| \approx \sqrt{1+h}$.

Or pour h proche de 0, $1+\dfrac{h}{2}>0$ (il suffit de prendre $h>-2$).

On en déduit que pour *h* proche de 0, on a $\sqrt{1+h} \approx 1+\dfrac{h}{2}$.

4°) Formule générale des fonctions puissances en 1

Formule à savoir par cœur :

Soit α un réel fixé.

Pour *h* « proche » de 0, on a : $(1+h)^\alpha \approx 1+\alpha h$.

Étude pour α entier naturel

→ $\alpha = 1$

Il y a égalité. La formule est vraie mais sans intérêt.

→ $\alpha = 2$

$(1+h)^2 = 1+2h+h^2$

Lorsque *h* est proche de 0, on peut considérer que h^2 est encore plus proche de 0 que *h*. On peut considérer qu'il est « négligeable » devant *h*.

On obtient l'approximation du premier degré $(1+h)^2 \approx 1+2h$.

→ $\alpha = 3$

$(1+h)^3 = 1+3h+3h^2+h^3$

Lorsque *h* est proche de 0, on peut considérer que h^2 et h^3 sont encore plus proches de 0 que *h*. On peut considérer que ces termes sont « négligeables » devant *h*.

On obtient l'approximation du premier degré $(1+h)^3 \approx 1+3h$.

Si on garde le terme en h^2, on obtient l'approximation $(1+h)^3 \approx 1+3h+3h^2$.

→ α entier naturel quelconque

On utilise la formule du binôme de Newton.

Pour $\alpha=-1$, on retrouve la formule $\dfrac{1}{1+h} \approx 1-h$.

Application pour des valeurs fractionnaires de α :

→ $\alpha=\dfrac{1}{2}$

$(1+h)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+h}$

Pour h « proche » de 0, on a : $\sqrt{1+h}\approx 1+\dfrac{h}{2}$.

→ $\alpha=-\dfrac{1}{2}$

$(1+h)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}$

Pour h « proche » de 0, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}\approx 1-\dfrac{h}{2}$.

Formule générale

Pour h « proche » de 0, on a : $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$.

La formule s'écrit aussi de manière équivalente :

Pour h « proche » de 0, on a : $f(a+h)-f(a)\approx hf'(a)$.

La différence $f(a+h)-f(a)$ qui apparaît dans le premier membre est fondamentale dans les dérivées.
C'est elle qui a donné son nom au calcul différentiel de Newton et au calcul infinitésimal de Leibniz.

Justification :

D'après la définition du nombre dérivé de f en a, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)$.

Pour h proche de 0, on peut donc écrire $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\approx f'(a)$ ce qui donne $f(a+h)-f(a)\approx hf'(a)$ par « produit en croix ».

Application : On retrouve les formules d'approximation données dans le paragraphe 1°) en choisissant chaque fois une « bonne » fonction f et une bonne valeur de a ($a=0$ ou $a=1$ suivant les cas).

On peut prendre d'autres valeurs de a que 0 ou 1.

II. Erreur

On peut estimer la qualité (précision) d'une approximation en calculant l'erreur.
Approximation affine tangente
Il est possible de préciser l'erreur en faisant une étude spécifique pour chaque fonction.

III. Approximation d'ordre supérieur

Il est possible de donner des approximations d'ordre supérieur en utilisant les dérivées première, seconde, troisième… c'est-à-dire des approximations polynomiales de degré supérieur ou égal à 2.
Avec davantage de termes, on obtient une meilleure approximation (la qualité d'une approximation dépend du nombre de termes que l'on garde).
Celles-ci sont étudiées au niveau post-bac.

Le 27-9-2021

Limites

Fonction	Nombre dérivé	Limite du taux de variation	Approximation au voisinage de 0
exp	en 0 : 1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$e^x\approx 1+x$
ln	en 1 : 1	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$	$\ln(1+x)\approx x$
sin	en 0 : 1	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$	$\sin x\approx x$
x^α	en 0 : α	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^\alpha-1}{h}=\alpha$	$(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$
tan	en 0 : 1	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\tan h}{h}=1$	$\tan x\approx x$

Partie F (dérivées en physique)

I. Notation de Leibniz (différentielle)

1°) Notation

$f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ (Newton : $\dot{f}(x)$)

Commentaire :

Attention, il ne faut pas comprendre cette notation comme un quotient.

2°) Exemples

$\dfrac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{\mathrm{d}x}=2x$ qui correspond à la formule $\left(x^2\right)'=2x$ écrite avec la notation de Lagrange.

$\dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x}=-\sin x$ (se lit dérivée de « cos *x* par rapport à *x* »).

$\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}=\cos x$

En physique, la variable qu'on utilise le plus souvent est *t* (le temps).

3°) Intérêt

En physique, on considère des fonctions de la variable *t*, le temps.
On travailler cependant fréquemment avec des expressions littérales comportant beaucoup de constantes.
Donc il est intéressant de savoir par rapport à quelle variable on dérive.

Vitesse volumique de réaction : $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\times\dfrac{1}{\mathrm{V}}$

Intensité : $i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ (dérivée de la charge par rapport au temps)

Intérêt en physique :
La notation de Leibniz fait clairement apparaître la variable par rapport à laquelle on dérive (en physique, on a de nombreuses constantes).

Autres exemple en chimie :

Dans le cadre d'une réaction chimique, on note :

Vitesse volumique de consommation d'un réactif à un instant *t* : $v_{\mathrm{c,\,R}}(t)=-\dfrac{\mathrm{d}[\mathrm{R}]}{\mathrm{d}t}$.

Vitesse volumique de formation d'un produit à un instant *t* : $v_{\mathrm{f,\,P}}(t)=\dfrac{\mathrm{d}[\mathrm{P}]}{\mathrm{d}t}$.

Voir livre de Physique-Chimie pages 79 et 80

En physique, on a vu la notion de vecteur vitesse en seconde et en 1$^{\text{ère}}$.
La notion est reprise de manière mathématique en Terminale avec la définition précise du vecteur vitesse instantanée.
Ce vecteur est tangent à la trajectoire.
Voir livre de Physique-Chimie page 254 « Point maths ».

4°) Lien avec le nombre dérivé calculé sur la calculatrice

Nous avons déjà rencontré la notation de Leibniz sur la calculatrice.

Calculatrice TI-83 Plus.fr

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\left(\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}\right)\Big|_{\mathrm{X}=4}$ désigne le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto x^2+3x$ en 4 (c'est-à-dire $f'(4)$).

On obtient 11.

La calculatrice calcule une estimation du nombre dérivé.

Attention, dans la notation $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}(...)\Big|_{\mathrm{X}=...}$, il ne s'agit pas d'un produit (l'expression entre parenthèses n'est pas un facteur).

5°) Origine de la notation

On considère une fonction *f* définie sur un intervalle I (non vide, non réduit à un singleton) et *a* un réel fixé dans I.

Leibniz considère un réel *x* différent de *a* et il considère le taux de variation de *f* entre *x* et *a* (au lieu de *a* et $a+h$) puis il fait tendre *x* vers *a*.

Le taux de variation de *f* entre *x* et *a* est donné par $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

$x\to a \Leftrightarrow \Delta x\to 0$

On a alors : $\Delta f(x)\to 0$.

La lettre Δ est remplacée par la lettre d qui donne la notation $\dfrac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}=f'(a)$.

6°) Dérivées d'ordre supérieur

Dérivée seconde : $f''(x)=\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$ (attention, on ne met pas de parenthèses autour du d*x* car il ne s'agit pas un carré).
Il ne s'agit pas du tout d'un quotient, il ne faut pas chercher à comprendre.

Exemple : $\dfrac{\mathrm{d}^2\cos x}{\mathrm{d}x^2}=-\cos x$

Dérivée troisième : $f^{(3)}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3}$

Dérivée *n*-ième : $f^{(n)}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$

II. Vitesse instantanée et accélération

François Varignon au XVII^e^ siècle définit la vitesse moyenne.
Newton définit la vitesse instantanée et l'accélération.

$v'(t)=x'(t)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ (dérivée de x par rapport à t)

$a(t)=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=x''(t)=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ (dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2 de x par rapport à t)

Résumé :

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ce qui donne $a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

Le 21-9-2023

Lien avec la physique : vecteur vitesse = vecteur tangent à la trajectoire

Partie G (approche des équations différentielles) Généralités sur les équations différentielles ; vocabulaire

1°) Définition

Une équation différentielle est une équation
- dont l'inconnue est une fonction ;
- qui fait intervenir cette fonction, sa dérivée (ce qui suppose qu'elle est dérivable), sa dérivée seconde (ce qui suppose qu'elle est deux fois dérivable)…

Le vendredi 10 septembre 2021

L'adjectif *différentiel* se réfère à la notion de dérivée.
Il provient du mot différence. On parle de « calcul différentiel ».

La notation y est ancienne, elle date d'un temps où les fonctions étaient fréquemment notées y.
On peut y voir une analogie avec le y des équations de droites.

2°) Exemple

$y'+y=2x+1 \quad (\mathrm{E})$

Résoudre l'équation différentielle (E) c'est déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)+f(x)=2x+1$.

On observera l'écriture peu rigoureuse, héritée de temps anciens, mais adoptée par tout le monde d'une équation différentielle.
La fonction inconnue est notée y.

On écrit y et y' au lieu de $y(x)$ et $y'(x)$.

On va vérifier que la fonction $f : x \mapsto 2x-1$ est une solution de (E).

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction affine) et $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=2$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)+f(x)&=2+2x-1\\ &=1+2x\end{aligned}$$

Donc f est une solution $\boxed{\text{particulière}}$ de (E).

Nous apprendrons plus tard à résoudre ce type d'équation différentielle.

Nous verrons qu'il y a une infinité de solutions et que les solutions de (E) sont les fonctions $x\mapsto k\mathrm{e}^{-x}+2x-1$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Nous apprendrons plus tard à résoudre des équations différentielles dans des cas simples.