$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 24 septembre 2012 (50 min)

Répondre très lisiblement et sans rature en écrivant au stylo à plume.
Ne rien écrire, ne rien surligner sur le sujet en dehors de ce qui est demandé.
L'utilisation du symbole $\Leftrightarrow$ n'est pas autorisée.

Prénom et nom : ....

Note :

...... /20

I. (1 point) Question de cours

Donner une expression de la distance entre deux réels quelconques x et y à l'aide de la valeur absolue.

d(x ; y) = ...

II. (5 points) QCM

Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule est exacte.
Compléter sans justifier le tableau ci-dessous avec les lettres (a, b, ou c) correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte un point.
Chaque réponse fausse enlève un point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) Pour tout réel x négatif ou nul, $x + |x|$ est égal à :

a. $2x$ b. 0 c. $-2x$

2°) Pour tout réel x quelconque, $|x| + |-x|$ est égal à :

a. $2|x|$ b. $2x$ c. 0

3°) Pour tout réel x quelconque, $\sqrt{(x+1)^2}$ est égal à :

a. $x + 1$ b. $|x + 1|$ c. $x^2 + 1$

4°) $2|\pi - 3| - |2\pi - 3|$ est égal à :

a. 3 b. -3 c. $4\pi - 9$

5°) Pour tout réel x quelconque, $\left|x^2 + 1\right|$ est égal à :

a. $x^2 - 1$ b. $1 - x^2$ c. $x^2 + 1$

Question	**1°)**	**2°)**	**3°)**	**4°)**	**5°)**	**Total**
Réponse	....	....	....	....	....	....

III. (6 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$|2x-3|=5$ (1) ; $|3x-4|=|6-x|$ (2) ; $|2-x|\leqslant 3$ (3) ; $|x+6|>3$ (4).

Une aide à la rédaction est donnée sur une feuille à part (rédaction à respecter scrupuleusement).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………..……..…..

………..……..…..

………..……..…..

………..……..…..

IV. (1 point) Traduire la phrase ouverte suivante portant sur un réel x à l'aide d'une valeur absolue :
« $x \in \,]-6\,;\,8[$ ». Répondre sans justifier.

………………………..……..…..

V. (1 point) Exprimer $|\,5 - x\,|$ sans barres de valeur absolue en fonction de x. Utiliser le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$ $+\infty$

VI. (4 points) Soit ABC un triangle quelconque. On note U et V les points définis par les égalités vectorielles
$3\overrightarrow{BU} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ (1) et $3\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ (2). Aucune figure n'est demandée.
1°) Exprimer $\overrightarrow{AU}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (c.-à-d. écrire une égalité de la forme $\overrightarrow{AU} = \ldots\overrightarrow{AB} + \ldots\overrightarrow{AC}$).
2°) Démontrer que U est le milieu du segment [AV].

………..……..…..

………..……..…..

………..……..…..

………..……..…..

………..……..…..

………..……..…..

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VII. (2 points) Algorithmique

On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel où x désigne un réel.
Répondre sans faire de phrase en donnant uniquement les résultats (calculs au brouillon).
Donner la valeur de y affichée en sortie lorsque la valeur de x en entrée est :

$-\sqrt{5}$ ………………….

3 ………………….

5 ………………….

-3 ………………….

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $|x| \leqslant 3$, alors
  y prend la valeur $2-x^2$
 Sinon
  y prend la valeur $\sqrt{x^2-9}$
FinSi

Sortie :
Afficher y

Bonus (à faire sur une feuille à part) :

Soit x et y deux réels tels que $|x-2| \leqslant 1$ et $|y-2| \leqslant 1$. Démontrer que l'on a : $|xy-5| \leqslant 4$.

Corrigé

I. Question de cours

$$\mathbf{d}(x\ ;\ y) = |x - y| = |y - x|$$

II. QCM

1°) x : réel négatif ou nul

$x + |x| = x - x = 0$

2°) x réel quelconque

$|x| + |-x| = |x| + |x| = 2|x|$

3°) x : réel quelconque

$\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

4°) $2|\pi - 3| - |2\pi - 3| = 2(\pi - 3) - (2\pi - 3) = -3$

5°) x réel quelconque

$\left|x^2+1\right| = x^2+1$ (car $x^2+1 \geqslant 0$)

Question	**1°)**	**2°)**	**3°)**	**4°)**	**5°)**
Réponse	**b**	**a**	**b**	**b**	**c**

III.

● **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\,2x - 3\,| = 5$ (1).**

(1) est successivement équivalente à :

$2x - 3 = 5$ ou $2x - 3 = -5$
$x = 4$ ou $x = -1$

L'ensemble des solutions de (1) est $\boldsymbol{S_1 = \{4\,;\,-1\}}$.

● **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\,3x - 4\,| = |\,6 - x\,|$ (2).**

(2) est successivement équivalente à :

$3x - 4 = 6 - x$ ou $3x - 4 = -6 + x$
$x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = -1$

L'ensemble des solutions de (2) est $\boldsymbol{S_2 = \left\{\dfrac{5}{2}\,;-1\right\}}$.

● **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\,2 - x\,| \leqslant 3$ (3).**

(3) est successivement équivalente à :

$-3 \leqslant 2 - x \leqslant 3$

$-1 \leqslant x \leqslant 5$

L'ensemble des solutions de (3) est $\boldsymbol{S_3 = [-1\,;5\,]}$.

● **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\,x + 6\,| > 3$ (4).**

(4) est successivement équivalente à :

$x + 6 < -3$ ou $x + 6 > 3$
$x < -9$ ou $x > -3$

L'ensemble des solutions de (4) est $\boldsymbol{S_4 =]-\infty\,;-9[\,\cup\,]-3\,;+\infty[}$.

IV. $x \in\,]-6\,;8[$ se traduit par $\boldsymbol{|\,x - 1\,| < 7}$.

En effet, le centre de l'intervalle $]-6\,;8[$ est 1 et son rayon est 7.

V. Exprimons | 5 – *x* | sans barres de valeur absolue en fonction de *x*.

x	$-\infty$ 5 $+\infty$
Signe de $5 - x$	+ 0 –
$\lvert 5 - x \rvert$	$5 - x$ 0 $-(5 - x) = x - 5$

VI.

ABC : triangle quelconque

$3\overrightarrow{BU} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ (1)

$3\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ (2)

1°) **Exprimons $\overrightarrow{AU}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.**

(1) donne $\overrightarrow{BU} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BU}$

$\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AU} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$

2°) **Démontrer que U est le milieu du segment [AV].**

L'égalité (2) donne $\overrightarrow{AV} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ (2).

L'égalité (1) donne $\overrightarrow{AV} = 2\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ (2).

Or $\overrightarrow{AU} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AU}$.

On en déduit que **U est le milieu du segment [AV]**.

VII. Algorithmique

$-\sqrt{5}$	**-3**
3	**-7**
5	**4**
-3	**-7**

Bonus

On suppose que $|x-2| \leqslant 1$ (1) et $|y-2| \leqslant 1$ (2).

Démontrons que l'on a : $|xy-5| \leqslant 4$.

(1) donne $1 \leqslant x \leqslant 3$.

(2) donne $1 \leqslant y \leqslant 3$.

On peut multiplier membres à membres les deux encadrements car ils ne comportent que des nombres positifs.
On obtient alors : $1 \leqslant xy \leqslant 9$.

Le centre de l'intervalle $[1 ; 9]$ est 5 et son rayon 4 donc on a : $|xy-5| \leqslant 4$.