**TS**

# Le raisonnement par récurrence, un outil puissant de démonstration

## Le 17 novembre 2022

Symbole Π sur la calculatrice Numworks

calculette → boîte à outils → analyse ou calculs → Π

## Le 14 novembre 2022

À propos de l'exercice $\boxed{7}$ :
Remettre symboles Σ et Π sur la calculatrice.
« On n'a jamais vraiment vu » m'a dit une élève.

## Le quinze novembre 2022

Matthieu L'Épine

Lors de la récurrence, y a-t-il un ordre logique des opérations à effectuer avant certaines (par exemple, la racine carrée puis la soustraction) ?

$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$
On a commencé par ajouter 12 puis racine carrée.
On procède par inégalités successives.

Calculer $\sqrt{x+12}$ pour $x = 3$.
On commence par faire l'addition puis la racine carrée.

## Le 17-11-2021

Retour sur la philosophie des mathématiques :
Faire la différence entre définition et propriété
axiome-postulat
définition
propriété

déf ≠ propriété

retour sur un mot : le mot hypothèse en mathématiques

- hypothèse : donnée
- hypothèse de récurrence

## Le 8 décembre 2022

Cours avec Mazyle Mouzzaoui
Récurrence
L'hérédité avec égalité se traite différemment que celle avec une inégalité.
● égalité : → On remplace directement …
● inégalité : → On procède par inégalités successives.



## Introduction :

Vidéo Blaise Pascal hist-math.fr « Et ainsi de suite jusqu'à l'infini ».

## Introduction : rappels de logique

### Quantificateurs

Il y a **deux quantificateurs** en mathématiques :

$\forall$ « pour tout » / **« quel que soit »**

$\exists$ **« il existe au moins un »**

Le quantificateur $\forall$ est un A à l'envers. Il provient du mot « alle » qui signifie « tous » en allemand.

Le quantificateur $\exists$ est un E retourné. Il provient du verbe « existieren » qui signifie exister en allemand.

Ces deux symboles se correspondent par la négation.

On considère un ensemble $E$ (appelé référentiel).

On note $p(x)$ un prédicat énoncé pour les éléments $x$ de $E$.

On peut fabriquer deux types d'énoncés qui sont des propositions.

| | | négation |
|---|---|---|
| **Type 1** | « $\forall x \in E \quad p(x)$ » | « $\exists x \in E$ / non $p(x)$ » |
| **Type 2** | « $\exists x \in E$ / $p(x)$ » | « $\forall x \in E$ non $p(x)$ ». |

Pour démontrer qu'une proposition de type 1 est vraie, on ne peut pas utiliser d'exemple.

Pour démontrer qu'une proposition de type 2 est vraie, on utilise un exemple.

Pour démontrer qu'une proposition de type 1 est fausse, on utilise un contre-exemple.

*Exemple :*
Pour démontrer que la proposition « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant x$ » est fausse, on démontre que la négation « $\exists x \in E \quad x^2 < x$ » est vraie.
On utilise un contre-exemple. On peut prendre par exemple $x = 0,5$. N'importe quel réel dans l'intervalle $]0\,;1[$ convient.

Un autre aspect consiste à chercher l'ensemble des réels $x$ tels que la phrase (ouverte) « $x^2 \geqslant x$ » est vraie.
On doit alors résoudre l'inéquation $x^2 \geqslant x$. On trouve $]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[$.

Dans ce chapitre, on choisit $E=\mathbb{N}$ ou $E=\mathbb{N}^*$ ou $E=[\![a\,;+\infty[\![$ où $a$ est un entier naturel (cette notation désigne l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à $a$).

**Exemples de propositions :**

1. On se demande si la proposition « $\forall n\in\mathbb{N}\quad 2^n\geqslant n$ » est vraie ou fausse.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n\geqslant n$ | V | V | V | V | V | V | V | V |

Il semble que l'inégalité $2^n\geqslant n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

On peut démontrer que l'inégalité $2^n\geqslant n$ est vraie pour tout entier naturel $n$ en utilisant un raisonnement par récurrence.

2. On se demande si la proposition « $\forall n\in\mathbb{N}\quad 2^n\geqslant n^2$ » est vraie ou fausse.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n\geqslant n^2$ | V | V | V | F | V | V | V | V |

Il semble que l'inégalité $2^n\geqslant n^2$ est vraie à partir de 4.

On peut démontrer que l'inégalité $2^n\geqslant n^2$ est vraie pour tout entier naturel $n\geqslant 4$ en utilisant un raisonnement par récurrence.

*Remarques :*

$\boxed{1}$ La récurrence n'est pas utile pour démontrer certaines propositions.
Par exemple, « $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \dfrac{1}{n}\leqslant 1$ ».

$\boxed{2}$ Au début, on dit toujours « démontrer par récurrence » dans les énoncés d'exercices.

On peut parler d'« effet domino » (expression employée par Hugo Eremeef en T1 spécialité le vendredi 6 novembre 2020).

Phrase ouverte :
Notion de phrase vraie à partir d'un certain rang (lycée Jeanne d'Albret pour se préparer à la classe préparatoire).



**Le 7 novembre 2022**

récurrence

Rentrer la suite $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n-1$

Que peut-on penser des termes ?

termes égaux à – 2 à partir d'un certain rang ?

Le raisonnement par récurrence va permettre de trancher.

## I. Rappels sur les implications

Dans tout ce paragraphe, on considère l'implication A $\Rightarrow$ B où A et B sont deux propositions.

**• Réciproque d'une implication**

La réciproque de l'implication A $\Rightarrow$ B est une nouvelle implication qui fait intervenir A et B, mais en les inversant ou pour mieux dire en les échangeant.

« Implication sous quantification ».

**Le 25-7-2016**

Je tape cette remarque que j'avais écrite sur une feuille tapée (avec que ça). Celle-ci doit dater de l'époque ou j'avais commencé à taper.

**Remarque sur les raisonnements de « proche en proche » sur les suites :**

On **ne peut pas** démontrer avec ce type de raisonnement qu'une suite est croissante ou décroissante.

On peut simplement démontrer ainsi quelques résultats assez peu compliqués tels que majoration ou minoration.

**Le 26-9-2014**

On a vu l'an dernier et cette année à l'occasion des suites un raisonnement un peu nouveau appelé « raisonnement de proche » qui est l'ancêtre du raisonnement par récurrence.
Les mathématiciens ont un inventé un nouveau type de raisonnement appelé raisonnement de proche en proche ou raisonnement par récurrence qui a suscité des polémiques et des questions auprès des mathématiciens jusqu'au début du XX$^{e}$ siècle.

Le raisonnement de proche en proche vu l'année dernière et revu cette année ne sera plus utilisé. Il sera remplacé par le raisonnement par récurrence.
Il sera remplacé par le raisonnement par récurrence.

Abréviation : c.-à-d.

Les 2 conditions sont vérifiées.

Attention aux dérapages

**Le 16-12-2014**

Il y a plusieurs image possibles pour la récurrence : épidémie (contagion),

**Le dimanche 31-5-2015**

Cours avec Louis Collin (élève de 1ère S à Saint-Jean-de-Béthune)

Sujet de bac TS Liban 28 mai 2013
On sait $\boxed{\text{a priori}}$ que $0 < u_k < 3$.

$u_{k+1} = \dfrac{9}{6-u_k}$

**Le mardi 22 septembre 2015**

Question d'Alexandre Cots

Ex. $\boxed{6}$ récurrence

Supposons que $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k = 3^k - 2$.
On ne met pas de guillemets autour de $u_k = 3^k - 2$.
On n'utilise les guillemets qu'au moment où on définit la phrase.

**Le mardi 6 octobre 2015**

Dans une récurrence, dans l'hérédité, on rédige en mode déductif avec les mots « d'où », « donc », « par conséquent » mais pas d'équivalences.



## I. Intérêt

### 1°) Exemple

$u$ est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

Il s'agit d'une suite récurrente d'un type particulier (suite « arithmético-géométrique »).

On ne connaît pas l'expression du terme général en fonction de *n*.

**Calculons les premiers termes de cette suite.**

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 0 | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 |

**Conjecture :**

Il semble que l'on ait pour tout entier naturel *n*, $u_n = 2^n - 1$ (cf. passage du mode récurrent au mode explicite pour une suite).

### 2°) Problème

Si l'on note pour $n \in \mathbb{N}$ la phrase $P(n)$ : « $u_n = 2^n - 1$ », on vérifie facilement que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$… $P(7)$ sont vraies.

Il s'agit d'une « phrase ouverte » dont on ne peut pas donner la valeur de vérité (on ne peut pas dire si elle est vraie ou fausse).
En revanche, on peut donner la valeur de vérité de $P(n)$ pour des valeurs particulières de *n*.

Pour démontrer que la phrase est « **toujours** » vraie, on ne peut pas se contenter de quelques vérifications, aussi nombreuses soient-elles.

Pour cela, il faudrait disposer d'un raisonnement qui permette en un nombre fini d'étapes de démontrer que la phrase $P(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels *n* (qui sont une infinité).

Le raisonnement par récurrence permet précisément d'opérer **« le passage du fini à l'infini »** (selon la formule célèbre d'Henri Poincaré).

### 3°) Autre approche

On a déjà utilisé un type de raisonnement appelé raisonnement de **« proche en proche »** qui permet d'établir des propriétés sur le signe des termes d'une suite ou des majorations-minorations (par contre, pas pour des sens de variation).

Le raisonnement par récurrence va permettre de formaliser ce type de raisonnement.

## II. Théorème de récurrence

### 1°) Énoncé (admis sans démonstration)

$P(n)$ est une phrase mathématique dépendant d'un entier naturel *n*.
On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$C_1$ : $P(0)$ est vraie
$C_2$ : Si la phrase $P(k)$ est vraie pour **un** entier naturel *k* fixé, alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Dans ce cas, on peut affirmer que la phrase $P(n)$ est vraie pour **tout** entier naturel *n*.

**Schéma :**

- $P(0)$ est vraie
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ vraie

Alors, pour tout entier naturel *n*, $P(n)$ est vraie.

### 2°) Vocabulaire

$C_1$ : « initialisation »
$C_2$ : « hérédité » - « transmissibilité » - « propagation »

### 3°) Extension (phrases vraies à partir d'un certain rang)

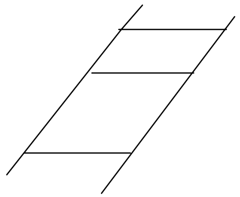
- Lorsque $P(n_0)$ est vraie
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ vraie

Alors pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

## III. Explication du principe

### 1°) Barreaux d'une échelle

**<u>Si</u>** l'on peut mettre un pied sur un barreau de l'échelle (le barreau $n_0$) et **<u>si</u>** l'on peut passer d'un barreau quelconque au suivant, alors on peut gravir tous les barreaux de l'échelle à partir du barreau $n_0$.



### 2°) Dominos

On peut aussi donner l'image de dominos qui tombent les uns après les autres.



### 3°) Remarques

• **La partie « initialisation » est très importante** ; il existe des phrases qui sont héréditaires mais pas vraies au rang initial.

• **La partie « hérédité » utilise un mode de raisonnement déductif.**
On peut avoir l'impression que l'on part du résultat pour démontrer le résultat.
Ce n'est évidemment pas du tout le cas.

## IV. Exemple de mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence

*u* est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n* on a $u_n > -2$.

Il s'agit de démontrer que la suite *u* est minorée par – 2.

**Le 7 novembre 2022**

Attention, quand on rentre la suite sur la calculatrice, on observe que les valeurs de tous les termes sont égaux à moins 2 ce qui laisse penser que tous les termes sont égaux à moins deux à partir de l'indice 30.
C'est évidemment faux.
Il s'agit de valeurs approchées.
Aucun terme n'est égal à – 2.
Cet affichage s'explique par le fait que la calculatrice utilise des valeurs approchées.

La valeur – 2 qui s'affiche est en fait la limite de la suite (on peut le démontrer) et elle n'est jamais atteinte.

On procède en plusieurs étapes.

| Rédaction | Commentaires |
|---|---|
| Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a :<br>$u_n > -2$. | Le résultat d'une récurrence :<br>« pour tout $n \in \mathbb{N}$ » ou « pour tout $n \geqslant n_0$ » |
| Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase<br>$P(n)$ : « $u_n > -2$ ». | On donne un nom à la phrase mathématique.<br>Elle découle toujours de l'énoncé qui est donné.<br>Il s'agit d'une phrase ouverte dont on ne peut donner la valeur de vérité. |
| **Initialisation :**<br><br>Vérifions que la phrase $P(0)$ est vraie.<br>$u_0 = 1$ par hypothèse (définition de la suite) donc $u_0 > -2$.<br>D'où la phrase $P(0)$ est vraie. | $P(0)$ est une proposition mathématique car on sait dire si elle est vraie ou fausse.<br>Transcription de la phrase $P(0)$.<br>On se sert uniquement du premier terme de la suite (et pas de la relation de récurrence). |
| **Hérédité : « le passage »**<br><br>Considérons $\boxed{\text{un}}$ entier naturel $k$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k > -2$.<br><br>Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > -2$.<br><br>Par hypothèse de récurrence, on a :<br>$u_k > -2$<br>$\times\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2} > 0\right)$<br>d'où $\frac{1}{2}u_k > -1$<br>$-1$ (on ajoute – 1 aux deux membres de l'inégalité)<br><br>$\frac{1}{2}u_k - 1 > -2$<br>$u_{k+1} > -2$ (car $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k - 1$ par définition de la suite $u$ qui est considérée ici, d'après la relation de récurrence)<br>Donc la phrase $P(k+1)$ est vraie. | On sait qu'un tel entier existe ($k = 0$).<br><br>On se sert de la relation de récurrence de la suite (et pas du premier terme).<br><br>On procède par inégalités successives (mode déductif) en utilisant les propriétés des inégalités.<br><br>On part de $u_k > -2$.<br>(hypothèse de récurrence)<br><br>On veut arriver à $\underbrace{u_{k+1}}_{\frac{1}{2}u_k - 1} > -2$.<br><br>On utilise la formule (relation) de récurrence de la suite $u$.<br>Il faut « incruster » $\frac{1}{2}$ et – 1. |
| **Conclusion :**<br><br>On a démontré que la phrase $P(0)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k$, alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.<br>Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour $\boxed{\textbf{tout}}$ entier naturel $n$. | Conditions $C_1$ et $C_2$ du théorème.<br><br>Cela marche comme des dominos qui tombent les uns après les autres.<br>$P(0)$ vraie $\Rightarrow$ $P(1)$ vraie $\Rightarrow$ $P(2)$ vraie |



Il s'agit d'un travail par inégalités successives.

**Le lundi 5 décembre 2022**

Cours particulier avec Masyle Mouzaoui

Les flèches dans l'hérédité ne sont pas des flèches d'équivalences ni d'implications.

Que signifient les flèches dans l'hérédité ?
Elles permettent de montrer le passage d'une inégalité à l'autre.

(En gros, le « pour tout » ne marche qu'avec le $n$ !)
Il est important de comprendre que le « pour tout » est quelque chose que l'on « gagne » à la fin de la démonstration.

***Remarque dans la partie « hérédité » :***

On suppose que $P(k)$ est vraie donc on a le droit d'utiliser $P(k)$ dans la suite… (idée fondamentale à comprendre).
En revanche, on n'a pas le droit d'utiliser que $P(k+1)$ est vraie (puisque c'est ce que l'on veut démontrer).

On justifie toujours comment on passe d'une ligne à l'autre (propriétés sur les inégalités rappelées dans le paragraphe **VIII**.

## V. Autre exemple de mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence

$u$ est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ (reprise de l'exemple du **I**).

Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 2^n - 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$ : « $u_n = 2^n - 1$ ».

### Initialisation :

Vérifions que la phrase $P(0)$ est vraie.
D'une part, $u_0 = 0$ par hypothèse (définition de la suite).
D'autre part, $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.
On peut donc écrire $u_0 = 2^0 - 1$ d'où la phrase $P(0)$ est vraie.

### Hérédité : « le passage »

Considérons un entier naturel $k$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k = 2^k - 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$u_k = 2^k - 1$

$\times 2$ (en effet : $2 \times 2^k = 2^1 \times 2^k = 2^{k+1}$ d'après les règles sur les puissances)

d'où $2u_k = 2^{k+1} - 2$

$+ 1$

Par suite, $2u_k + 1 = 2^{k+1} - 1$

Soit $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$ (en effet, d'après la relation de récurrence qui définit la suite u, on a $u_{k+1} = 2u_k + 1$)
Donc la phrase $P(k+1)$ est vraie.

### Autre rédaction :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k + 1 \\ &= 2\left(2^k - 1\right) + 1 \\ &= 2 \times 2^k - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$



### Le 16 novembre 2021

J'ai noté :

$u_{k+1} = 2u_k + 1$

$\uparrow$

$2^k - 1$

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k + 1 \\ &= 2\left(2^k - 1\right) + 1 \end{aligned}$$

$\uparrow$

hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} &= 2 \times 2^k - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

### Conclusion :

On a démontré que la phrase $P(0)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k$, alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

Il s'agit d'un travail par égalités successives.

## VI. Remarques

### 1°) Remarque historique

Blaise Pascal (1623-1662) est le premier mathématicien à avoir fait un raisonnement par récurrence pour démontrer une propriété
(« **raisonnement inductif** »).

### 2°) Rédaction

⚠ à bien respecter le protocole.

(beaucoup de rédaction, aucun quantificateur).

### 3°) Quelles propriétés peut-on démontrer par récurrence ?

- **Avec des suites**
On pourra démontrer énormément de résultats : minorations, majorations, sens de variations, expression du terme général d'une suite, formules sommatoires etc.

- **Sans des suites** (cf. exercices)
Propriétés des entiers naturels par exemple.

Ne pas écrire de raccourci du type $P(0) = 3$.

**Le 14 novembre 2022**

**Les symboles Σ et Π**

**Exemple :**

Soit $u$ une suite

$A = u_3 + u_4 + ... + u_{20}$ $\qquad\qquad$ $B = u_3 \times u_4 \times ... \times u_{20}$

Les petits points supposent implicitement que l'on poursuit de manière logique.

En français,
$A$ est la somme de tous les termes de $u_3$ à $u_{20}$ ;
$B$ est le produit de tous les termes de $u_3$ à $u_{20}$.

On écrira :

$$A = \sum_{i=3}^{i=20} u_i \qquad\qquad B = \prod_{i=3}^{i=20} u_i$$

plus petit indice en bas

plus grand indice en haut

On lit :

« $A$ est égal à la somme des $u_i$ pour $i$ allant de 1 à 20 » ;

« $B$ est égal au produit des $u_i$ pour $i$ allant de 1 à 20 ».

**Le 17 novembre 2022**

**Les symboles Σ et Π**

La lettre Π ici n'a rien avoir avec le nombre π !

Calculatrice Numworks

On retrouve les symboles Σ et Π sur la calculatrice.

rubrique Calculs puis Boîte à outil et rubrique « Analyse » ou « Calculs ».

On trouve sum(f(n), n, nmin,nmax) et produit(f(n),n,nmin, nmax).



**Exemples :**

$\sum_{k=0}^{8} (3k+1)$ $\qquad$ On obtient 116. Autrement dit, $\sum_{k=0}^{k=8} (3k+1) = 116$.

On peut vérifier le résultat en effectuant le calcul à la main.

$\prod_{k=0}^{8} (3k+1)$ $\qquad$ On obtient 608608000. Autrement dit, $\prod_{k=0}^{k=8} (3k+1) = 608608000$.

On peut vérifier le résultat en effectuant le calcul à la main.

On notera la petite différence d'écriture en partie supérieure avec celle donnée précédemment.

## VII. Appendice 1 : remarques sur le symbole Σ

### 1°) Quelques formules

$u$ désigne une suite.

$$\sum_{k=0}^{k=n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{k=n} u_k\right) + u_{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n+2} u_k = \left(\sum_{k=0}^{k=n} u_k\right) + u_{n+1} + u_{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \left(\sum_{k=0}^{k=n} u_k\right) - u_0$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{k=n} u_k\right) - u_n$$

Relation de Chasles : $0 \leqslant p < n$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \left(\sum_{k=0}^{k=p} u_k\right) + \left(\sum_{k=p+1}^{k=n} u_k\right)$$

### 2°) Utilisation : formules sommatoires

Voir exercices.

## VIII. Appendice 2 : rappels sur les inégalités

Dans les récurrences, on est souvent amené à manipuler des inégalités d'où la nécessité de bien connaître les règles sur les inégalités.

**Le 22-11-2021**

inégalités

négation de $a < b$ : $a \geqslant b$
négation de $a > b$ : $a \leqslant b$

Soit *a*, *b*, *k* des réels.

**• Somme**

Si $a < b$, alors $a + k < b + k$.

*a*, *b*, *c*, *d* sont 4 réels.
Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

**• Produit**

Si $a < b$ et $\underline{k > 0}$, alors $ka < kb$.

Si $a < b$ et $\underline{k < 0}$, alors $ka > kb$.

On peut multiplier ou diviser une inégalité par un même nombre non nul. Le sens de l'inégalité est conservé si le réel est positif et changé si le réel est négatif.

*a*, *b*, *c*, *d* sont 4 réels strictement positifs.

Si $a < b$ et $c < d$, alors $ac < bd$.

On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens ne comportant que des nombres strictement positifs.

**• Carrés**

Si $0 \leqslant a < b$, alors $a^2 < b^2$.

Si $a < b \leqslant 0$, alors $a^2 > b^2$.

On parle de « passage au carré ».



**• Inverses**

Si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Si $a < b < 0$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

On parle de « passage à l'inverse ».

**• Cubes**

Si $a < b$, alors $a^3 < b^3$.

*

On parle de « passage au cube ».

**• Racines carrées**

Si $0 \leqslant a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

On parle de « passage à la racine carrée ».

**• Puissances d'exposant entier naturel**

Si $0 \leqslant a < b$ et *n* est un entier naturel non nul, alors $a^n < b^n$.

**• Puissances d'un même réel strictement positif**

Si $0 < a < 1$, alors $... < a^5 < a^4 < a^3 < a^2 < a$.

Si $a > 1$, alors $a < a^2 < a^3 < a^4 < a^5 < ...$.

**• Exponentielles**

Si $a < b$, alors $e^a < e^b$.

On parle de « passage à l'exponentielle ».

**• Logarithme népérien**

Si $0 < a < b$, alors $\ln a < \ln b$.

On parle de « passage au logarithme népérien ».

**Comparaison avec 1 d'un quotient dont le dénominateur est strictement positif**

$a$ et $b$ sont deux réels tels que $\boxed{b > 0}$.

$\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$

$\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b$

Remarque : Pour $a$ et $b$ quelconques avec $b$ non nul, $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$.

**Propriété :**

Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

On appelle cela (cette propriété) la *transitivité* de la relation de la relation d'ordre.
En mathématiques, on a besoin de considérer des propositions du type « $a > b$ » ou « $a = b$ » ou ….
Plutôt que d'écrire à chaque fois, on introduit deux symboles.

**Le 16-11-2021**

**Définition :**

On dit que $a \leqslant b$ lorsque $a < b$ ou $a = b$.

Pour que $a \leqslant b$ soit vraie, il faut et il suffit que $a < b$ soit vraie ou $a = b$ soit vraie.

Si $a < b$, alors $a \leqslant b$. La réciproque est fausse.

Une inégalité stricte entraîne une inégalité large.



**Le 16 novembre 2021**

J'ai noté exactement :

$a > 0 \Rightarrow a \geqslant 0$

$a > b \Rightarrow a \geqslant b$

réciproque fausse

$a \geqslant b \Leftrightarrow a > b$ ou $a = b$

(A ou B) vraie signifie que A est vraie ou B est vraie

**Le mercredi 17-11-2021**

Sixtine de Pimodan (T6 et T7 spé)

« Je ne vois toujours pas l'intérêt de mettre le = ».

**Propriétés des égalités :**

$a = b \Rightarrow a + k = b + k$

$a = b \Rightarrow a - k = b - k$

$a = b \Rightarrow ka = kb$

$a = b \Rightarrow \frac{a}{k} = \frac{b}{k}$ ($k$ : réel non nul)

$a = b$ et $c = d \Rightarrow a + c = b + d$

$a = b$ et $c = d \Rightarrow ac = bd$

Attention :

On peut simplifier une égalité par un réel non nul.
Exemple : $2x = 6 \Rightarrow x = 3$

On ne peut pas simplifier une égalité par un réel dont on ne sait s'il est nul.
Exemple : $x^2 = x$ n'implique pas $x = 1$.

On ne peut pas simplifier une inégalité par un réel dont on ne connaît pas le signe.
Exemple : $x^2 > x$ n'implique pas $x > 1$.

**Le 16 novembre 2021**

On ne peut pas simplifier une inégalité par un même réel nombre.

$x^2 > x \Leftrightarrow x > 1$

Faux

**Le 9 novembre 2021**

Autour du produit en croix

Soit $a$, $b$, $c$, $d$ quatre réels avec $c$ et $d$ nuls tels que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$.

Démontrer que :

• si $bd > 0$, alors $ad < bc$ ;

• si $bd < 0$, alors $ad > bc$.

## IX. Appendice 3 : exemple de phrase héréditaire qui n'est jamais vraie

On définit pour $n$ entier naturel la phrase $P(n)$ : « $n + \dfrac{1}{2} \in \mathbb{N}$ ».

Cette phrase est fausse de manière évidente pour tous les entiers naturels.

Néanmoins, elle est héréditaire au sens où $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ pour tout entier naturel $k$ de manière assez évidente.