Équations du 1$^{\text{er}}$ degré dans $\mathbb{R}$

(ou plutôt de degré inférieur ou égal à 1)

a et b : deux réels donnés

On s'intéresse à l'équation $\boldsymbol{ax + b = 0}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Cette équation est de degré inférieur ou égal à 1.

Cette équation est équivalente à $ax = -b$.

On doit *discuter* suivant les coefficients a et b.

★ 1$^{\text{er}}$ cas : $a \neq 0$

Dans ce cas, l'équation est équivalente à $x = -\dfrac{b}{a}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

★ 2$^{\text{e}}$ cas : $a = 0$

Dans ce cas, l'équation équivaut à $0x = -b$.

1$^{\text{er}}$ sous-cas : $b = 0$

Dans ce cas, l'équation s'écrit $0x = 0$.
Cette égalité est vérifiée pour tous les réels x.

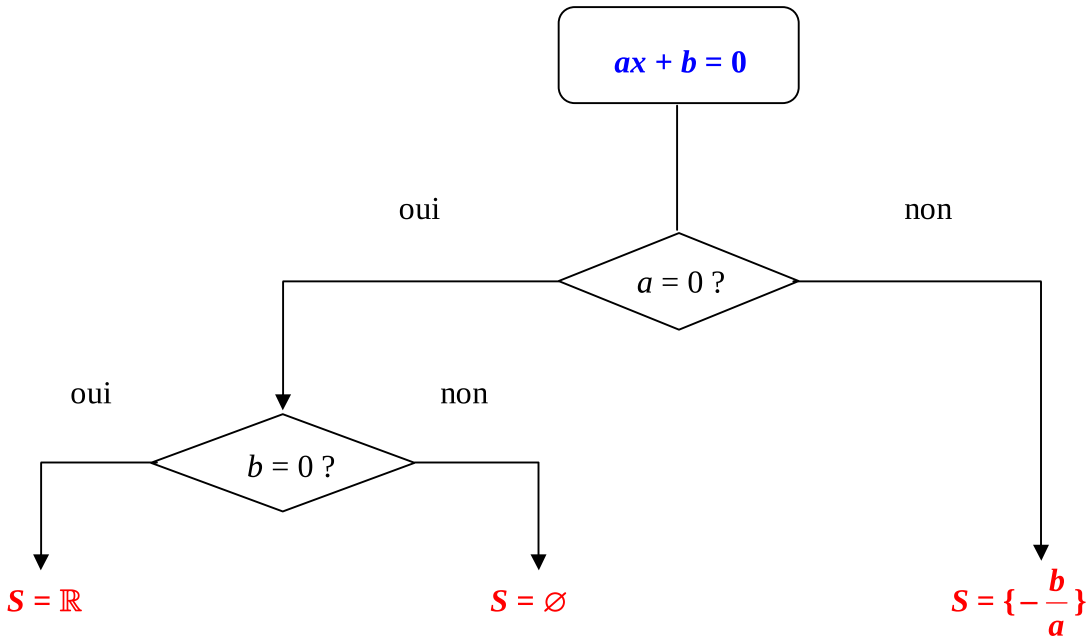
L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \mathbb{R}$.

2$^{\text{e}}$ sous-cas : $b \neq 0$

Dans ce cas, l'égalité $0x = -b$ n'est vérifiée pour aucun réel x.

L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \varnothing$.

On peut représenter la résolution sous la forme d'un *organigramme*.



On retiendra qu'une équation du type $ax + b = 0$ admet :

- soit une unique solution ;

- soit une infinité de solutions ;

- soit aucune solution.

Exercice-type :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(m - 1)\,x + 2 - m = 0$ (1) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et de paramètre m.
Discuter suivant les valeurs de m.

---

m est un paramètre

(1) est équivalente à $(m - 1)\,x = m - 2$.

À ce stade, on discute suivant la nullité de $m - 1$.

1^er^ cas : $m \neq 1$

Dans ce cas $m - 1 \neq 0$.

(1) est équivalente à $x = \dfrac{m-2}{m-1}$ (on ne peut pas simplifier cette expression).

L'ensemble des solutions de (1) est $S = \left\{\dfrac{m-2}{m-1}\right\}$.

2^e^ cas : $m = 1$

Dans ce cas,

(1) est équivalente à $0x = -1$.
Cette égalité n'est vérifiée pour aucune valeur de x.

L'ensemble des solutions de (1) est $\boldsymbol{S = \varnothing}$.

Complément culturel :

Le mathématicien arabe **Al Khwarizmi** (environ 780 – 850 après J.-C.) a écrit un manuscrit d'algèbre traitant de la résolution d'équations. Dans cet ouvrage, il appelle l'inconnue d'une équation *šay'* qui signifie littéralement « chose ».
Les premières traductions en latin ont transcrit phonétiquement ce mot par « *xay* ». Mais au fil du temps, on a fini par n'en conserver que l'initiale « x » qui deviendra la désignation habituelle de l'inconnue pour les mathématiciens.

Donner la signification de chacune des expressions suivantes qui utilisent la lettre x :

a) monsieur X ;

b) je vous le répète pour la x^{e} fois ;

c) rayon X.

Exercices

$\boxed{1}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $m^2x+1=x-m$ (1) d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ et de paramètre m.
Discuter suivant les valeurs de m.

Solution :

m est un paramètre

(1) est successivement équivalente à :

$$m^2x-x=-1-m$$
$$\left(m^2-1\right)x=-1-m$$

À ce stade, on discute suivant la nullité de m^2-1.

1^er^ cas : $m\neq 1$ et $m\neq -1$

Dans ce cas, $m^2-1\neq 0$.
(1) est successivement équivalente à :

$$x=\frac{-1-m}{m^2-1}$$

$$x=\frac{-\cancel{(1+m)}}{\cancel{(m+1)}(m-1)}$$
$$x=-\frac{1}{m-1}$$

L'ensemble des solutions de (1) est $S=\left\{-\frac{1}{m-1}\right\}$.

2^e^ cas : $m=1$

(1) est équivalente à $0x=-2$.
Cette égalité n'est vérifiée pour aucune valeur de x.

L'ensemble des solutions de (1) est $\boldsymbol{S=\varnothing}$.

3^e^ cas : $m=-1$

(1) est équivalente à $0x=0$.
Cette égalité est vérifiée pour toutes les valeurs de x.

L'ensemble des solutions de (1) est $\boldsymbol{S=\mathbb{R}}$.