1$^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le jeudi 20 septembre 2012

I. On considère un carré ABCD de côté 6 cm.
On note E et F les milieux respectifs de [AB] et [AD].

Aucune figure n'est demandée sur la copie.

1°) Calculer l'aire du triangle CEF.
2°) Dans la suite, on considère la figure comme le patron d'un tétraèdre ACEF (c'est-à-dire que les points B et D coïncident avec le sommet A).
Représenter le tétraèdre ACEF en perspective cavalière.
3°) Calculer le volume du tétraèdre.
4°) Calculer la hauteur issue de A dans le tétraèdre.

II. Soit ABC un triangle rectangle en A.
Soit M un point quelconque de [BC]. On note H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (AB) et (AC).

On se propose de déterminer la position du point M sur le segment [BC] telle que la distance HK soit minimale.

1°) **Expérimentation**

Réaliser une figure dynamique sur ordinateur en utilisant le logiciel *Geogebra* de telle sorte que l'on puisse faire « bouger » le point M sur le segment [BC].
On ne demande pas de l'imprimer.

Après plusieurs essais, recopier et compléter la phrase :

« D'après les essais effectués, il semble que la distance HK est minimale lorsque ……. ».

2°) **Démonstration**

Rédiger une démonstration.

Conseils

Le devoir doit entièrement être rédigé sur copie simple.

Ne rien écrire sur l'énoncé.

I. Chercher éventuellement le sens du mot « tétraèdre » (par exemple sur Wikipedia).

Tous les résultats doivent être encadrés en rouge à la règle.

Pour les calculs d'aires et de volumes, pas de formules « plaquées » avec des lettres non utilisées dans l'énoncé.

Ne pas employer de lettre sans en avoir préalablement précisé la signification (exemple : h pour désigner la hauteur ou b pour désigner la base).

On applique les formules en situation.

II. Chercher éventuellement le sens du mot « projeté orthogonal d'un point sur une droite »

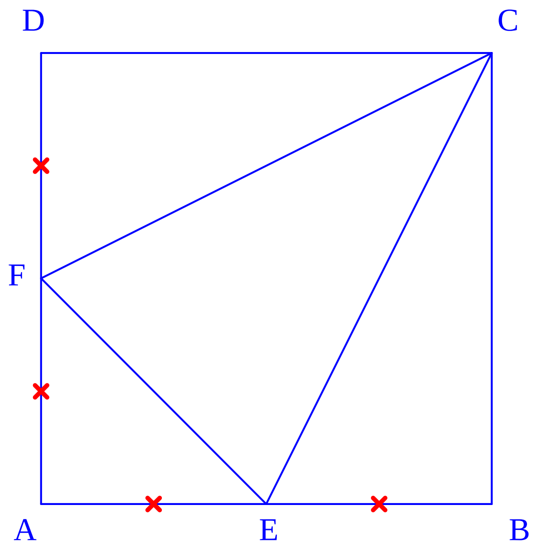
Corrigé du DM pour le 20 septembre 2012

I.

ABCD : carré de côté 6 cm

E : milieu de [AB]

F : milieu de [AD]



1°) **Calculons l'aire du triangle CEF.**

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{CEF}} &= \mathcal{A}_{\text{ABCD}} - \left(\mathcal{A}_{\text{AEF}} + \mathcal{A}_{\text{EBC}} + \mathcal{A}_{\text{CDF}}\right)\\ &= 6^2 - \left(\frac{3\times 3}{2} + \frac{3\times 6}{2} + \frac{3\times 6}{2}\right)\\ &= 36 - \left(\frac{9}{2} + 9 + 9\right)\\ &= 18 - \frac{9}{2}\\ &= \frac{27}{2} \ \text{cm}^2\end{aligned}$$

L'aire du triangle CEF est égale à $\frac{27}{2}$ cm^2.

Une méthode plus longue :

On démontre que le triangle CEF est un triangle isocèle en C.
On calcule CE et EF grâce au théorème de Pythagore.
On calcule la hauteur issue de C toujours grâce au théorème de Pythagore.
On travaille avec les valeurs exactes.

ABCD est un carré donc les triangles FDC, AEF et EBC sont respectivement rectangles en D, A et B.

Dans le triangle FDC rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} FC^2 &= FD^2 + DC^2 \\ FC^2 &= 9 + 36 \\ FC &= \sqrt{45} \end{aligned}$$

Dans le triangle AEF rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} FE^2 &= FA^2 + AE^2 \\ FE^2 &= 18 \\ FE &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

On remarque que EC = FC car E et F sont les milieux de [AB] et [AD] donc $EC = FC = \sqrt{45}$.

Soit G le milieu de [EF].

Comme le triangle FCE est isocèle en C, G est aussi le pied de la hauteur issue de C dans ce triangle.
Par suite, le triangle CFG est rectangle en G.
Donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} GC^2 + GF^2 &= FC^2 \\ GC^2 &= \left(\sqrt{45}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2 \\ GC^2 &= 45 - \frac{18}{4} \\ GC^2 &= \frac{162}{4} \\ GC^2 &= \frac{81}{2} \end{aligned}$$

Donc $GC = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{CEF} &= \frac{CG \times EF}{2} \\ &= \frac{\frac{9}{\sqrt{2}} \times \sqrt{18}}{2} \\ &= \frac{27}{2} \quad \text{cm}^2 \end{aligned}$$

On n’utilise pas de valeurs approchées.
Avec cette méthode, il est fondamental de travailler avec des valeurs exactes et non avec des valeurs approchées.

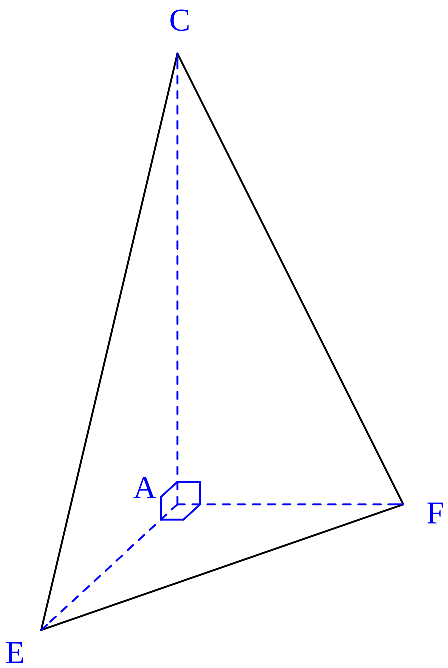
2°) **Représentation du tétraèdre ACEF en perspective cavalière** (patron d’un tétraèdre à partir d’un carré)

On pouvait réaliser le patron en papier pour mieux visualiser (initiative personnelle à prendre par rapport à l’énoncé).

Un tétraèdre est un polyèdre à quatre faces triangulaires (polyèdre : solide limité par des faces).

C’est aussi une pyramide à base triangulaire.

On peut représenter le tétraèdre posé sur l’une des faces AEF, CAF ou EAC.



Longueurs conservées en vraies grandeurs : AF et AC.

Angle conservé en vraie mesure : $\widehat{\text{FAC}}$ (angle droit)

Le tétraèdre a trois angles droits en A. On dit qu’il s’agit d’un « tétraèdre trirectangle ».

On marque les codages de ces angles droits sur la figure.

On représente les arêtes cachées en pointillés.

Un polyèdre est un solide limité par des faces, ces faces étant polygonales.

Liens intéressants sur les polyèdres :

- solides de Platon ;
- relation d'Euler-Descartes liant le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets.
- polyèdre dual

Dans l'article « Tétraèdre » de Wikipedia, on trouve :
- la propriété de dualité du tétraèdre ;
- la définition d'un tétraèdre régulier
- une formule pour calculer le volume d'un tétraèdre mais qui n'est pas compréhensible par un élève de Première.

3°) **Calculons le volume du tétraèdre.**

Le volume du tétraèdre est calculable de trois manières.
Les hauteurs issues de C, E, F sont confondues avec des arêtes.

On prend pour base le triangle AEF (rectangle en A) et pour hauteur [AC].

$$\begin{aligned} V_{\text{ACEF}} &= \frac{\mathcal{A}_{\text{AEF}} \times 6}{3} \\ &= \frac{\frac{9}{2} \times 6}{3} \\ &= 9 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Le volume du tétraèdre est égal à 9 cm^3.

4°) **Calculons la hauteur issue de A dans le tétraèdre.**

Soit h la hauteur issue de A dans le tétraèdre.

On exprime le volume du tétraèdre en prenant pour base le triangle CEF.

On a : $V_{\text{ACEF}} = \dfrac{\mathcal{A}_{\text{CEF}} \times h}{3}$.

Cette égalité donne successivement :

$$9 = \frac{\frac{27}{2} \times h}{3}$$

$h = 2$

La hauteur issue de A dans le tétraèdre mesure 2 cm.

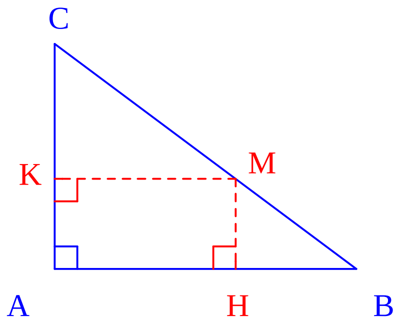
II. Il s'agit d'un **problème d'optimisation** d'origine géométrique.
Pour le résoudre on va rester dans le cadre géométrique.

ABC : triangle rectangle en A
M : point quelconque de [BC]
H : projeté orthogonal de M sur (AB)
K : projeté orthogonal de M sur (AC)

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point M tel que la distance HK soit minimale.

1°) **Expérimentation : utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique**

On réalise une figure avec le logiciel *Geogebra*.
On crée un triangle ABC rectangle en A (de dimensions quelconques) puis un point M variable sur [BC] (cf. notion de « point mobile » en géométrie dynamique).
On demande d'afficher la longueur HK.
On fait « bouger » le point M sur [BC].



On fait plusieurs essais.

« D'après les essais effectués, il semble que la distance HK est minimale lorsque M est le projeté orthogonal de A sur (BC) (ou lorsque M est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC). ».

2°) **Démonstration**

Le quadrilatère AHMK est un rectangle car il possède trois angles droits (en A, H et K).

Or dans un rectangle, les diagonales ont la même longueur donc HK = AM.

La longueur HK est minimale lorsque la longueur AM est minimale.

Or la longueur AM est minimale lorsque M est le projeté orthogonal de A sur (BC) (cf. cours de 4^e distance d'un point à une droite).

Donc la distance HK est minimale lorsque M est le projeté orthogonal de A sur (BC).