2^{e} Devoir sur la quadrature du cercle

Si l'on excepte quelques valeurs de π mentionnées dans la Bible ou le Talmud ou indiquées par les Égyptiens et les Babyloniens, à savoir respectivement $\frac{16}{9}$ et $3+\frac{1}{8}$, l'histoire de π se divise en trois périodes.
Durant la première, approximativement celle des Grecs, les recherches trouvent leur origine dans le célèbre problème de la quadrature du cercle : comment construire un carré dont l'aire soit égale à celle d'un disque donné à l'avance, cette construction ne nécessitant que la règle et le compas. Le côté d'un carré étant *a*, *d* le diamètre du disque, une unité de longueur étant choisie, on doit avoir : $\frac{a^2}{d^2}=\frac{\pi}{4}$ et la quadrature du cercle équivaut donc à la recherche de π.
La seconde période permet d'obtenir des approximations plus précises mais ne résout pas le problème de la quadrature du cercle.
La troisième période permet d'éclaircir la nature du nombre π et montre que le problème de la quadrature est impossible.
Le but de ce devoir est de construire par des procédés simples un segment dont la longueur est très peu différente de la longueur d'un cercle ou d'un demi-cercle donné.
L'unité choisie est le centimètre.

Pour toutes les longueurs à calculer, on donnera la valeur exacte.

I.

On donne la **figure 1**.
Calculer PQ.
Comparer PQ à la longueur d'un demi-cercle de centre O et de rayon 1.

II.

1°) On donne la **figure 2**.
EFG est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.
Calculer OH, puis FH et enfin FG.

2°) On donne la **figure 3**, où AOB est un triangle isocèle rectangle en O et [AC] est le côté d'un triangle équilatéral inscrit.
Calculer AB, c'est-à-dire AP, puis AC, c'est-à-dire AQ. En déduire PQ.
Comparer PQ à la longueur d'un demi-cercle de centre O et de rayon 1.

III.

On donne la **figure 4**.
AOB est un triangle rectangle en A.
La parallèle à (OB) passant par P coupe (AB) en S.
Calculer OB puis PS.
Comparer PS à la longueur du cercle de centre O et de rayon 5.

N.B. : Cette dernière méthode indiquée par Specht en 1836 est très précise. Sur un grand cercle terrestre, l'erreur serait inférieure à un mètre.

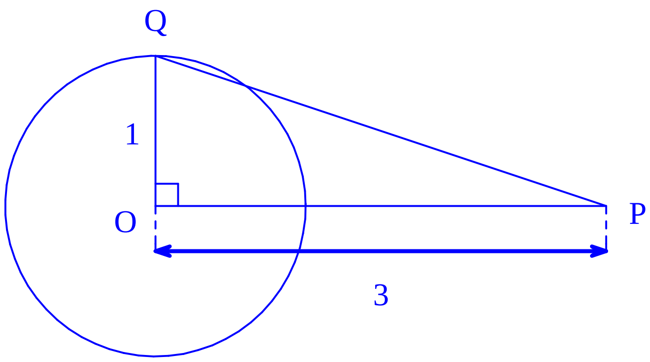


Figure 1

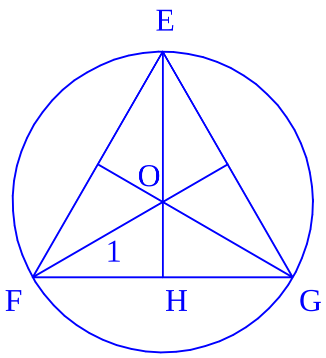


Figure 2

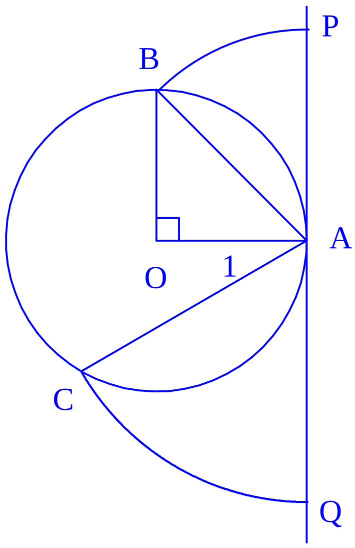


Figure 3

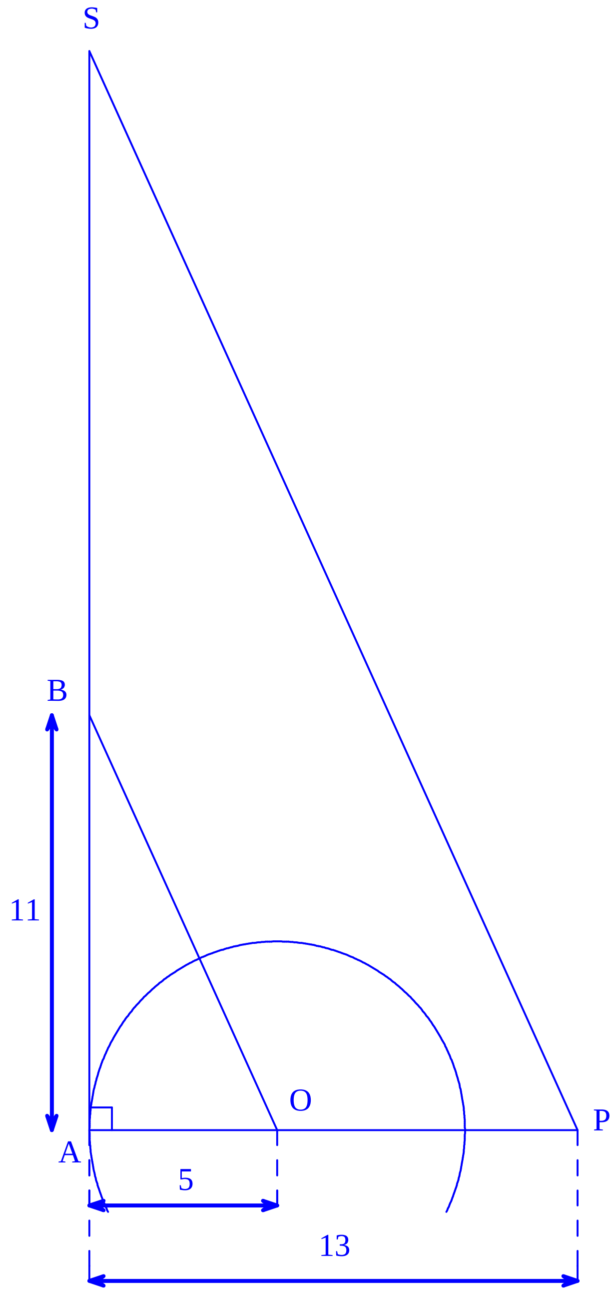
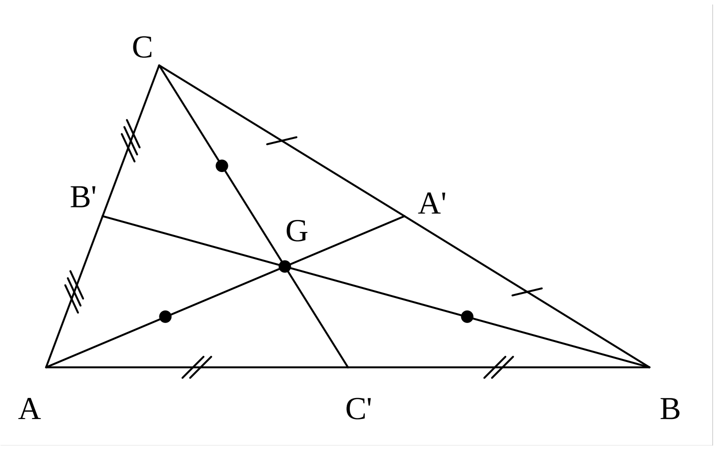


Figure 4

Rappel sur le centre de gravité d'un triangle :

Soit ABC un triangle.
On note A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

Les droites (AA'), (BB'), (CC') (médianes du triangle ABC) sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle ABC.



La position du point G sur chaque médiane est donnée par les égalités :

$$\boxed{\begin{aligned} AG &= \frac{2}{3}AA' \\ BG &= \frac{2}{3}BB' \\ CG &= \frac{2}{3}CC' \end{aligned}}$$

On dit que G est situé sur chaque médiane aux deux tiers à partir du sommet.

Corrigé

I.

Calculer PQ.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OPQ rectangle en O, on a :

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2$

$PQ^2 = 1^2 + 3^2$

$PQ^2 = 10$

Donc $PQ = \sqrt{10}$.

Comparer PQ à la longueur du demi-cercle de centre O et de rayon 1.

Soit l la longueur du demi-cercle de centre O et de rayon 1

$l = \pi \times 1 = \pi$

$PQ \approx 3{,}10$

On observe que PQ est proche de l c'est-à-dire de π.

II.

1°) On donne la **figure 2**.
EFG est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.

Calculer OH, puis FH et enfin FG.

On sait que EFG est un triangle inscrit dans un cercle de centre O.
Donc (OE), (OF), (OG) sont à la fois les hauteurs, les médianes, les médiatrices, les bissectrices du triangle.
Donc $\widehat{FOH} = 30°$.

De plus, OFH est rectangle en H.

Donc $\cos \widehat{FOH} = \dfrac{OH}{OF}$.

$\cos 60° = \dfrac{OH}{1}$

$OH = \dfrac{1}{2}$

D'après le théorème de Pythagore,

$OF^2 = OH^2 + FH^2$

$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + FH^2$

On obtient $FH^2 = \frac{3}{4}$ et par suite, $FH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

H est le milieu de [FG] donc $FG = 2 \times FH = \sqrt{3}$

2°) On donne la **figure 3**, où AOB est un triangle isocèle rectangle en O et [AC] est le côté d'un triangle équilatéral inscrit.
Calculer AB, c'est-à-dire AP, puis AC, c'est-à-dire AQ. En déduire PQ.
Comparer PQ à la longueur du demi-cercle de centre O et de rayon 1.

On sait que AOB est un triangle rectangle en O donc d'après le théorème de Pythagore,

$AB^2 = OA^2 + OB^2$
$AB^2 = 1^2 + 1^2$
$AB^2 = 2$

$AB = \sqrt{2}$

D'où $AP = \sqrt{2}$

D'après la question précédente, puisque [AC] est un côté d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1 :

$AC = \sqrt{3}$ d'où $AQ = \sqrt{3}$

$PQ = AP + AQ$
$PQ = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
Avec la calculatrice, on obtient $PQ = 3{,}146264...$.

On compare avec $l = \pi$.

On observe que les deux valeurs sont très proches.

III.

On donne la **figure 4**.
AOB est un triangle rectangle en A.
La parallèle à (OB) passant par P coupe (AB) en S.
Calculer OB puis PS.
Comparer PS à la longueur du cercle de centre O et de rayon 5.

On sait que AOB est un triangle rectangle en O donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 \\ &= 5^2 + 11^2 \\ &= 25 + 121 \\ &= 146 \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{146}$$

On sait que (AB) // (SP) donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AO}{OP} = \frac{AB}{SP}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{\sqrt{146}}{SP}$$

$$SP \times 5 = 13\sqrt{146}$$

$$SP = \frac{13\sqrt{146}}{5}$$

$$= 31,4159195\ldots$$

Soit L la longueur d'un cercle de centre O et de rayon 5.

$$L = 2\pi \times 5 = 10\pi$$

Avec la calculatrice, on obtient : $L = 31,4159265\ldots$
SP est très proche de L (différence à la 4^e décimale).