TS spé — Exercices sur PGCD et PPCM

Utilisation de la définition du PGCD de deux entiers

1 Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel quelconque.
1°) Le but de cette question est de déterminer le PGCD de n et de 2 suivant les valeurs de n.
a) Conjecturer le résultat à l'aide de la calculatrice.
b) Démontrer cette conjecture en considérant un diviseur positif d de n et de 2.
2°) Reprendre les mêmes questions que précédemment avec le PGCD de n et 3 suivant les valeurs de n.

2 Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel quelconque.
1°) Le but de cette question est de déterminer $\text{PGCD}(n\,;n+1)$.
a) Conjecturer le résultat à l'aide de la calculatrice.
b) Démontrer cette conjecture en considérant un diviseur positif d de n et de $n+1$.
2°) Reprendre la question précédente avec $\text{PGCD}(n\,;n+2)$.

3 Pourquoi n'existe-t-il pas deux entiers relatifs de somme égale à 500 et de PGCD égal à 7 ?

4 Soit n un entier naturel quelconque non nul.
1°) Déterminer $\text{PGCD}(n\,;n^2)$.
2°) Déterminer $\text{PGCD}(n\,;2n)$.

5 Soit n un entier relatif quelconque.
Déterminer $\text{PGCD}(n\,;n^2+1)$.

6 Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a=n+3$ et $b=2n+1$.
1°) a) Démontrer que si d est un entier relatif qui divise a et b, alors d divise 5.
Indication : Former une combinaison linéaire de a et de b à coefficients entiers relatifs qui donne un résultat égal à 5.
b) En déduire les valeurs possibles du PGCD de a et b.
2°) a) Recopier et compléter par le plus petit entier naturel le tableau de congruences suivant :

$n \equiv \ldots$ (mod. 5)	0	1	2	3	4
$a \equiv \ldots$ (mod. 5)					
$b \equiv \ldots$ (mod. 5)					

b) En déduire le PGCD de a et b suivant les valeurs de n.

7 Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a=5n+2$ et $b=n+1$.
1°) a) Démontrer que si d est un entier relatif qui divise a et b, alors d divise 3.
b) En déduire les valeurs possibles du PGCD de a et b.
2°) Utiliser les congruences modulo 3 pour déterminer le PGCD de a et b suivant les valeurs de n.

8 Soit n un entier naturel quelconque.
Déterminer le PGCD de n et de 4 suivant les valeurs de n.

Utilisation du lemme d'Euclide

9 Reprise de l'exercice **2**.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel quelconque.
1°) Démontrer à l'aide du lemme d'Euclide que $\text{PGCD}(n\,;n+1)=\text{PGCD}(1\,;n)$.
En déduire la valeur du PGCD de n et $n+1$.
2°) Reprendre la question précédente avec $\text{PGCD}(n\,;n+2)$.

10 Reprise de l'exercice **5**.

Soit n un entier naturel quelconque.
Déterminer $\text{PGCD}(n\,;n^2+1)$ en utilisant le lemme d'Euclide.

11 Reprise de l'exercice **8**.

Soit a et b deux entiers relatifs quelconques non tous les deux nuls.
Démontrer en utilisant deux fois le lemme d'Euclide que $\text{PGCD}(a+b\,;a+2b)=\text{PGCD}(a\,;b)$.
On pourra utiliser les égalités $a+2b=(a+b)\times 1+b \quad (1)$ et $a+b=b\times 1+a \quad (2)$.

Utilisation de l'algorithme d'Euclide

12 Déterminer le PGCD des nombres suivants en utilisant l'algorithme d'Euclide.
1°) 963 et 153 2°) 49980 et 28420 3°) 180 et 336.
Vérifier à chaque fois avec la fonction PGCD de la calculatrice.

13 Soit a et b deux entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a\,;b)=7$.
La dernière division euclidienne de reste nul étant écrite, les quotients successifs en partant du début de l'algorithme d'Euclide sont dans l'ordre : 3 ; 2 ; 1 ; 4.
On commence par effectuer la division euclidienne de a par b.
Quelles sont les valeurs de a et b ? Il n'y a aucune justification ni rédaction à écrire.
Écrire l'algorithme d'Euclide complet avec les valeurs obtenues.

14 Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
La dernière division euclidienne de reste nul étant écrite, les quotients successifs en partant du début de l'algorithme d'Euclide sont respectivement : 3 ; 2 ; 1 ; 4.
On commence par effectuer la division euclidienne de a par b.
Quelles sont les valeurs de a et b ?
Écrire l'algorithme d'Euclide complet avec les valeurs obtenues.

Résolution de problèmes concrets

15 Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires. Il veut faire des paquets de sorte que :
- tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges,
- tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires,
- toutes les billes rouges et toutes les billes noires soient utilisées.

1°) Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser ?
2°) Combien y aura-t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

16 Pour le 1er mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et 78 roses.
Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs.
Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ? Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

Algorithme d'Euclide

17 On rappelle l'algorithme d'Euclide écrit en langage naturel (à connaître par cœur) permettant de déterminer le PGCD de deux entiers naturels *a* et *b* non tous les deux nuls saisis en entrée.
Les variables *a*, *b*, *r* sont des entiers naturels, les valeurs de *a* et *b* saisies en entrée étant non toutes les deux nulles.

```
Entrée :
Saisir a
Saisir b

Traitement :
Tantque b ≠ 0 Faire
    r ← reste de la division euclidienne de a par b
    a ← b
    b ← r
FinTantque

Sortie :
Afficher a
```

Recopier cet algorithme en respectant la présentation.

1°) Pierre pense que l'on peut échanger les instructions « $a \leftarrow b$ » et « $b \leftarrow r$ » à l'intérieur de la boucle « Tantque ». A-t-il raison ?

2°) Paul pense que l'on peut simplifier l'algorithme en ne considérant que deux variables *a* et *b*.
Il a réécrit cet algorithme sous la forme suivante.
Les variables *a* et *b* sont des entiers naturels, les valeurs de *a* et *b* saisies en entrée étant non toutes les deux nulles.

```
Entrée :
Saisir a
Saisir b

Traitement :
Tantque b ≠ 0 Faire
    a ← b
    b ← reste de la division euclidienne de a par b
FinTantque

Sortie :
Afficher a
```

Paul a-t-il raison ?

3°) Jacques souhaite connaître le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide.
Réécrire en le modifiant l'algorithme donné au début de l'énoncé pour qu'il puisse afficher à la fin le PGCD et le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide.

18 **Accélération de l'algorithme d'Euclide**

On se propose de construire un nouvel algorithme qui permet d'obtenir le PGCD de *a* et *b* plus rapidement que l'algorithme d'Euclide.

Soit *a* et *b* deux entiers naturels tels que $b \neq 0$.
La division euclidienne de *a* par *b* donne l'existence d'un unique couple $(q\,;r)$ d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ avec $r < b$.
On pose $r' = b - r$.
On notera que r' est un entier naturel tel que $r' \leqslant b$.
En posant $q' = q + 1$, on peut écrire $a = bq' - r'$.

Par exemple, la division euclidienne de $a = 137$ par $b = 4$ s'écrit : $137 = 34 \times 4 + 1$. Avec les notations précédentes, on a : $r = 1$.
On peut aussi écrire $137 = 35 \times 4 - 3$ (cette égalité n'est pas une division euclidienne ; on peut dire que c'est une « pseudo-division euclidienne »). Avec les notations précédentes, on a : $r' = 3$.

0°) Écrire la division euclidienne puis la pseudo-division euclidienne de 16 par 3 ; 130 par 45 ; 41 par 11.

Pour gagner du temps dans l'algorithme d'Euclide, on va mélanger dans un même algorithme de vraies divisions euclidiennes et de pseudo-divisions euclidiennes.
On pourra utiliser cette nouvelle méthode.

On donne ci-dessous deux exemples pour bien comprendre la méthode d'Euclide « accélérée ».
Chaque fois, on donne aussi la méthode d'Euclide « normale » à titre de comparaison.

Principe :
- On procède comme dans l'algorithme d'Euclide normal.
- On choisit toujours entre la division euclidienne normale et la pseudo-division euclidienne celle qui donne le reste (r ou r' avec les notations du début de l'énoncé) le plus petit.

• Cherchons le PGCD de 1005 et 797. On applique l'algorithme d'Euclide « normal » et « accéléré » au couple $(1005\,;797)$ en commençant par faire la division euclidienne de 1005 par 797.

Euclide « normal »	Euclide « accéléré »
$1005 = 797 \times 1 + 208$	$1005 = 797 \times 1 + 208$
$797 = 208 \times 3 + 173$	$797 = 208 \times 4 - 35$
$208 = 173 \times 1 + 35$	$208 = 35 \times 6 - 2$
$173 = 35 \times 4 + 33$	$35 = 2 \times 17 + 1$
$35 = 33 \times 1 + 2$	$2 = 1 \times 2 + 0$
$33 = 2 \times 16 + 1$	
$2 = 2 \times 1 + 0$	

Avec l'une ou l'autre des deux méthodes, on obtient : $\text{PGCD}(797\,;1005) = 1$.

• Cherchons le PGCD de 428 et 222. On applique l'algorithme d'Euclide « normal » et « accéléré » au couple $(428\,;222)$ en commençant par faire la division euclidienne de 428 par 222.

Euclide « normal »	Euclide « accéléré »
$428=222\times1+206$	$428=222\times2-16$
$222=206\times1+16$	$222=16\times14-2$
$206=16\times12+14$	$16=2\times8+0$
$16=14\times1+2$	
$14=7\times2+0$	

Avec l'une ou l'autre des deux méthodes, on obtient : $\text{PGCD}(222\,;428)=2$.

Remarque : L'algorithme accéléré n'est étudié qu'à titre d'exercice. Il ne sera pas utilisé en pratique.
On a cependant le droit d'utiliser Euclide accéléré comme on veut.
1°) Résultat préliminaire
Soit a et b deux entiers naturels tels que $b\neq0$. On note r le reste « par défaut » de la division euclidienne de a par b et r' le reste « par excès ».
Démontrer à l'aide du lemme d'Euclide que $\text{PGCD}(a\,;b)=\text{PGCD}(b\,;r')$.
2°) À l'aide du résultat précédent, on en déduit une méthode algorithmique inspirée de l'algorithme d'Euclide, mais accélérée, permettant de déterminer le PGCD de deux entiers naturels a et b. Comme dans l'algorithme d'Euclide « normal », on écrit une suite de divisions euclidiennes ou de « pseudo-divisions euclidiennes » en choisissant chaque fois entre les deux celle qui donne le plus petit reste.
On notera que l'on parle d'algorithme d'Euclide accéléré appliqué au couple $(a\,;b)$ et que, lorsque $b\neq0$, l'on commence par effectuer la division euclidienne ou pseudo-euclidienne de a par b.
Déterminer le PGCD de 548 et de 435 « à la main » en utilisant la méthode d'Euclide « normale » et la méthode d'Euclide accélérée.
3°) En s'inspirant de l'algorithme d'Euclide « normal », rédiger en langage naturel l'algorithme d'Euclide accéléré (pour cela, reprendre et modifier l'algorithme d'Euclide donné dans le cours) qui pour un couple $(a\,;b)$ d'entiers naturels saisi en entrée par l'utilisateur renvoie en sortie la valeur du PGCD de a et de b.
Vérifier que l'algorithme fonctionne bien en le faisant tourner « à la main » pour les entiers 548 et 435 (faire un tableau d'évolution des variables).
Écrire puis programmer la fonction correspondante `pgcd(a,b)` en Python.
4°) Soit a et b deux entiers naturels tels que $b\neq0$.
On note q le quotient de la division euclidienne de a par b, r le reste « normal » (par défaut) et r' le reste par excès (c'est-à-dire $b-r$).
Démontrer que $\min(r\,;r')\leqslant\dfrac{b}{2}$.
Indication : Le minimum de deux nombres est inférieur ou égal à chacun des deux nombres.
On en déduit qu'avec l'algorithme d'Euclide accéléré, chaque reste est inférieur ou égal à la moitié du précédent ce qui est plus fort que de dire que chaque reste est strictement inférieur au précédent.
5°) Soit a et b deux entiers naturels tels que $b\neq0$.
• On note ρ_k le reste de l'algorithme d'Euclide accéléré à l'étape k.
Démontrer que $\rho_k\leqslant\dfrac{b}{2^{k+1}}$.
• On note m l'exposant entier naturel de la plus haute puissance de 2 inférieure ou égale à b.
Exemple :
Pour $b=37$, l'exposant de la plus haute puissance de 2 inférieure ou égale à b est 5 (car $2^5=32$ et $2^6=64$).

Démontrer que le nombre d'étapes de la méthode d'Euclide accélérée appliquée au couple $(a\,;b)$ est inférieur ou égal à $m+1$.
Indication : Raisonner par l'absurde.

19 Algorithme des différences

1°) Résultat préliminaire
Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a\neq b$.
Démontrer que $\text{PGCD}(a\,;b)=\text{PGCD}(b\,;a-b)$.
2°) Le résultat établi à la question précédente permet de déterminer le PGCD de deux entiers naturels par une méthode algorithmique en calculant des différences (d'où le nom de « méthode des différences successives »).
Par exemple, pour déterminer le PGCD de 285 et de 114, on effectue les calculs suivants :

$$285-114=171$$
$$171-114=57$$
$$114-57=57$$
$$57-57=0$$

Grâce au résultat préliminaire, on a
$\text{PGCD}(285\,;114)=\text{PGCD}(171\,;114)=\text{PGCD}(114\,;57)=\text{PGCD}(57\,;0)=57$.
Ainsi, on obtient : $\text{PGCD}(285\,;114)=57$.

La méthode des différences successives pour deux entiers naturels distincts se déroule ainsi :
On calcule la différence entre les deux nombres de telle sorte que le résultat soit positif ou nul.
Puis on calcule la différence entre les deux plus petits nombres en mettant le plus grand des deux nombres en premier.
À une étape, on obtient une différence égale à 0.
Le PGCD est le résultat de la dernière différence non nulle.

a) Déterminer le PGCD de 500 et 448 en utilisant la méthode des différences successives.
b) Justifier que la méthode s'arrête toujours.
3°) Algorithme correspondant à la méthode des différences successives
On considère l'algorithme suivant où a et b désignent des entiers naturels non tous les deux nuls saisis en entrée.
On remarquera que cet algorithme est calqué sur l'algorithme d'Euclide, les restes des divisions euclidiennes étant remplacés par des différences en valeur absolue.
On peut aussi faire l'organigramme de cet algorithme afin d'avoir une meilleure vision du travail effectué dans cet algorithme.
Les variables a, b, d sont des entiers naturels.

Entrées :
Saisir a
Saisir b

Traitement :
Tantque $b\neq0$ **Faire**
  $d\leftarrow|a-b|$
  $a\leftarrow b$
  $b\leftarrow d$
FinTantque

Sortie :
Afficher a

Lire et comprendre l'algorithme puis le recopier en respectant la présentation.

Commentaires :

- On peut vérifier que les contenus des variables *a*, *b*, *d* sont des entiers naturels tout au long de l'algorithme.
- On peut remplacer la condition « $b \neq 0$ » par la condition « $b > 0$ » car *b* est un entier naturel.

a) Faire fonctionner l'algorithme « à la main » pour les valeurs suivantes saisies en entrée :

- $a = 210$ et $b = 140$;
- $a = 10$ et $b = 5$.

Dans chacun des deux cas, on utilisera un tableau du type suivant :

Étape	**$b \neq 0$?**	***d***	***a***	***b***
0			210	140
1	V	70	140	70
2				
3				

b) Écrire puis programmer la fonction Python correspondante `pgcd(a,b)`.

Utilisation des propriétés du PGCD

20 Déterminer le PGCD de *mn* et de $(2m+1)n$ où *m* et *n* sont deux entiers naturels non nuls.

21 Soit *n* un entier naturel.
On pose $a = n^2 + 3n$ et $b = n^2 + 5n + 6$.
1°) Factoriser *a* et *b* comme produits d'entiers naturels.
2°) Déterminer le PGCD de *a* et *b* suivant les valeurs de *n*.

22 Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels tels que l'on ait $ab = 1452$ et $\text{PGCD}(a\,;b) = 11$ par deux méthodes indépendantes.

1ère méthode : Résoudre l'exercice en utilisant la calculatrice. On pourra éventuellement réaliser un programme.

2e méthode : Raisonner en deux parties.
1ère partie : supposer que $(a\,;b)$ est un couple d'entiers naturels vérifiant le système et introduire les entiers a' et b' tels que $a = 11a'$ et $b = 11b'$.
2e partie : faire une vérification.

23 Soit *a* et *b* deux entiers relatifs non tous les deux nuls.
Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $\text{PGCD}(a^n\,;b^n) = [\text{PGCD}(a\,;b)]^n$.

Indication : Poser $d = \text{PGCD}(a\,;b)$ puis introduire les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.

Égalité de Bezout

24 Dans tout l'exercice, *n* désigne un entier relatif quelconque.
Dans chaque cas, démontrer en utilisant une combinaison linéaire égale à 1 que les entiers *a* et *b* sont premiers entre eux.

1°) $a = n$ et $b = 2n+1$; 2°) $a = 2n+1$ et $b = 6n+4$; 3°) $a = 2n+3$ et $b = 3n+5$.

25 L'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 4788 et 1428 donne les résultats suivants :

Étape 1 : $4788 = 3 \times 1428 + 504$

Étape 2 : $1428 = 2 \times 504 + 420$

Étape 3 : $504 = 1 \times 420 + 84$

Étape 4 : $420 = 5 \times 84$

Recopier ce cadre.

D'après l'algorithme d'Euclide, $\text{PGCD}(4788\,;1428) = 84$.
Le but de l'exercice est de déterminer « à la main » un couple de Bezout pour les entiers 4788 et 1428 à l'aide de l'algorithme d'Euclide c'est-à-dire de déterminer deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $4788u + 1428v = 84$.

1°) « Remonter » l'algorithme d'Euclide afin de déterminer deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $4788u + 1428v = 84$.

2°) Recopier et compléter la méthode du cours permettant d'exprimer chaque reste comme combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des nombres de départ.

		4788	1428
4788	L_1	1	0
1428	L_2	0	1
504	L_3		
420	L_4		
84	L_5		

26 Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs pour chaque égalité.
1°) $726u + 137v = 1$ 2°) $2017u + 1771v = 1$

On vérifie dans chaque cas que les deux entiers sont premiers entre eux.

27 Utiliser la méthode de la fonction affine et la calculatrice pour déterminer un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs pour chaque égalité.
1°) $51u - 19v = 1$ 2°) $32u + 15v = 1$

Équations diophantiennes linéaires à deux inconnues

28 On considère l'équation $4x-3y=5$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y)\in\mathbb{Z}^2$.

1°) Déterminer un couple $(x_0\,;\,y_0)$ d'entiers relatifs, solution « évidente » de l'équation (E).

2°) Déterminer toutes les solutions de (E) en utilisant la solution particulière trouvée au 1°).

29 On considère l'équation diophantienne $8x-5y=7$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y)\in\mathbb{Z}^2$.

1°) Déterminer un couple $(x_0\,;\,y_0)$ d'entiers relatifs, solution de l'équation (E).

2°) Déterminer toutes les solutions de (E) en utilisant la solution particulière trouvée au 1°).

30 1°) On considère l'équation diophantienne $8x+5y=100$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y)\in\mathbb{Z}^2$.

Déterminer une solution particulière de (E) puis résoudre (E).

2°) Un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans un bar.
Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.
Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?
On suppose que le groupe contient au moins un homme et au moins une femme.

31 L'équation $6x-3y=17$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y)\in\mathbb{Z}^2$ admet-elle des solutions ?

PPCM de deux entiers

32 Déterminer $\mathrm{PPCM}(44\ 100\,;3\ 036)$.

33 On considère l'algorithme suivant où les variables a et b saisies en entrée sont des entiers naturels non nuls.

Entrées :
Saisir a
Saisir b

Initialisation :
q prend la valeur 1

Traitement :
Tantque $x\neq y$ **Faire**
  $x\leftarrow qa$
  $y\leftarrow qb$
  $q\leftarrow q+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher x

Cet algorithme affiche-t-il toujours un résultat en sortie ?
Le résultat obtenu en sortie est-il égal au PPCM de a et de b ?

34 Soit n un entier naturel non nul.
Déterminer $\mathrm{PPCM}(2\,;n)$ suivant les valeurs de n.
On pourra utiliser la calculatrice pour conjecturer le résultat.

35 Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels non nuls tels que l'on ait
$\begin{cases} ab=1512 \\ \mathrm{PPCM}(a\,;b)=252 \end{cases}$.

1ère méthode : Résoudre l'exercice en utilisant la calculatrice. On pourra éventuellement réaliser un programme.

2e méthode : Résoudre l'exercice en utilisant une méthode similaire à celle de l'exercice **22** .

36 On note d et m respectivement le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels a et b non nuls.
Déterminer a et b sachant que $m-2d=11$.

37 Une planète a deux satellites. Le satellite A effectue une révolution autour de la planète en 68 heures. Le satellite B effectue la même révolution en 200 heures. Les orbites des deux satellites sont des cercles concentriques (avec le centre de la planète pour même centre).
Les satellites ne sont pas sur la même orbite.
À 10 heures, le 1er janvier 2014, les deux satellites sont alignés avec le centre de la planète en question.
À quelle dates et heures retrouvera-t-on une configuration identique* au 1er janvier 2014 ? Combien chaque satellite aura-t-il effectué de révolutions ?
* configuration identique : au même point

38 Si une roue à engrenage comportant 56 dents accroche une autre roue à engrenage de 78 dents, combien de tours complets doit effectuer la première roue pour que la seconde réalise aussi un nombre de tours complets ?

39 Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et n un entier naturel.
En utilisant le résultat de l'exercice **23** , démontrer que $\mathrm{PPCM}\left(a^n\,;b^n\right)=\left[\mathrm{PPCM}(a\,;b)\right]^n$.

PGCD et PPCM de plusieurs nombres

40 Déterminer « à la main » le PGCD de 56, 84 et 105 en établissant la liste des diviseurs positifs de 56, 84 et 105.

41 Déterminer le PGCD de 798, 966 et 1239 en utilisant la calculatrice et la propriété d'associativité.

42 Déterminer trois entiers relatifs a, b, c tels que $\mathrm{PGCD}(a\,;b\,;c)=1$ (on dit que a, b, c sont *premiers entre eux dans leur ensemble*) tels qu'aucun des couples $(a\,;b)$, $(a\,;c)$, $(b\,;c)$ ne soit formé d'entiers premiers entre eux.

43 Déterminer le PPCM de 630, 840 et 420.

Le 6-2-2023

TS DM 24-11-2004   Mme Pavageau

Algorithme de recherche du PPCM

Soit l et L deux entiers naturels non nuls tels que $l \leqslant L$.
Soit q_1 et r_1 respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de L par l.
Pour tout entier naturel k non nul, on note q_{k+1} et r_{k+1} respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $L+r_k$ par l.

1°) Dans chacun des exemples suivants, déterminer la suite des couples $\left(q_k, r_k\right)$ et vérifier l'existence d'un indice k pour lequel $r_k = 0$.
a) $L=17$ et $l=5$ b) $L=50$ et $l=18$.

2°) On se propose de démontrer l'existence d'un entier k compris entre 1 et l tel que $r_k = 0$.
a) Écrire les l égalités des divisions euclidiennes effectuées et démontrer que
$lL = l\left(q_1 + q_2 + \ldots + q_l\right) + r_l \quad (1)$.
b) En déduire que $r_l = 0$. Peut-on affirmer que r_l est le premier reste nul ?

3°) Soit r_k le premier reste nul.
Écrire une égalité analogue à l'égalité (1) vérifiée par le produit kL et montrer que kL est le PPCM de l et L.
Déterminer ainsi PPCM(17, 5) et PPCM(50, 18).

Corrigé

$\boxed{1}$ Exercice de détermination d'un PGCD dans un cadre littéral

$n \in \mathbb{N}$

1°) **PGCD(n ; 2)**

Question orale à poser aux élèves :

Pourquoi le PGCD existe-t-il ?

$2 > 0$ donc on peut bien considérer le PGCD de n et de 2.

On doit toujours s'assurer que les deux nombres dont on cherche le PGCD ne sont pas tous les deux nuls.

a) **Conjecturons PGCD(n ; 2) suivant les valeurs de n à l'aide de la calculatrice.**

Nous pourrions faire les calculs « à la main » pour les premières valeurs de n mais la calculatrice va nous permettre de gagner du temps.

On définit une fonction.

Calculatrice Numworks : On rentre la formule gcd(2,X).

Calculatrice TI : On appuie sur la touche $\boxed{f(x)}$ puis dans Y_1 on rentre la formule pgcd(X, 2).

On règle la table de valeurs de manière à ce que la plus petite valeur de X soit 0 et que le pas soit de 1.

On règle la table pour n'avoir que des entiers naturels.

Nous utilisons l'émulateur de la calculatrice pour visualiser le résultat.
Un élève vient faire la manipulation sur le tableau interactif.

n	PGCD(n ; 2)
0	2
1	1
2	2
3	1
4	2
5	1
6	2
7	1
8	2

Ce tableau nous permet d'observer :

- qu'il semble y avoir deux valeurs possibles du PGCD : 1 ou 2 ;

- qu'il semble y avoir une périodicité, une cyclicité d'ordre 2 ;

- qu'il semble que le résultat dépende de la parité de n ;

Attention à la formulation : on dit « il semble » et non une affirmation.

On formule donc la conjecture suivante :

D'après la calculatrice, il semble que :

• si n est pair, alors $\text{PGCD}(n\,;2)=2$;

• si n est impair, alors $\text{PGCD}(n\,;2)=1$.

On pourrait aussi se placer en « mode suite » ce qui permettrait de tracer le nuage de points.

b) **Démontrons la conjecture émise au a).**

Soit d un diviseur positif commun à n et à 2.

Par définition du PGCD, $d \mid 2$.

Or les diviseurs positifs de 2 sont 1 et 2 (nous avons déjà dit que 2 est un nombre premier).

Donc $d=1$ ou $d=2$.

• Si n est pair alors n est divisible par 2 donc $\text{PGCD}(n\,;2)=2$.

• Si n est impair, alors n n'est pas divisible par 2 donc $\text{PGCD}(n\,;2)=1$.

Ce résultat pourra être utilisé dorénavant tel quel.

2°) **PGCD(n ; 3)**

$3 > 0$

a) **Conjecturons PGCD(*n* ; 3) suivant les valeurs de *n* à l'aide de la calculatrice.**

n	**PGCD(*n* ; 3)**
0	3
1	1
2	1
3	3
4	1
5	1
6	3
7	1
8	1

D'après la calculatrice, il semble que :

• si n est divisible par 3, alors $\text{PGCD}(n\,;3)=3$;

• si n n'est pas divisible par 3, alors $\text{PGCD}(n\,;3)=1$.

b) **Démontrons la conjecture émise au a).**

Soit d un diviseur positif commun à n et à 3.

Par définition du PGCD, $d \mid 3$.

Or les diviseurs positifs de 3 sont 1 et 3 (3 est un nombre premier).

Donc $d=1$ ou $d=3$.

• Si n est divisible par 3, alors $3 \mid n$ donc $\text{PGCD}(n\,;3)=3$.

• Si n n'est pas divisible par 3, alors $3 \nmid n$ donc $\text{PGCD}(n\,;3)=1$.

Idée que m'a montré Martin Lugagne-Delpont le mercredi 30 novembre 2016

On distingue 3 cas : $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$.

• $n=3k$

Dans ce cas, $\text{PGCD}(n\,;3)=3$.

• $n=3k+1$

Soit d un diviseur positif de n et de 3.

d divise la combinaison linéaire à coefficients entiers de n et de 3 : $n-3k=3k+1-3k=1$.

$d \mid 1$ et $d>0$ donc $d=1$

Il m'a proposé la combinaison linéaire $3n-9k=3(3k+1)-9k=3$.

$d \mid 3$ et $d>0$ donc $d=1$ ou $d=3$.

Cette combinaison linéaire n'est pas intéressante.

• $n=3k+2$

Dans le deuxième cas, j'ai noté exactement :

mieux que $3n-9k=3(3k+1)-9k=3$.

$d \mid 3$ et $d>0 \Rightarrow d=1$ ou $d=3$.

Cette combinaison linéaire n'est pas intéressante.

Bilan :

On aurait aussi pu utiliser le tableur ; nous ne le faisons pas aujourd'hui. Cela sera travaillé ultérieurement à l'occasion d'un DM.

En revanche, on pourrait s'interroger sur une utilisation éventuelle d'un logiciel de calcul formel tel que XCas. Ici l'utilisation serait dangereuse car un tel logiciel a une même commande pour deux notions différentes de PGCD : le PGCD de deux entiers et le PGD de deux polynômes qui est étudié dans l'enseignement supérieur. L'utilisation de XCas est recommandée pour des exercices de recherche de PGCD d'entiers avec des valeurs numériques mais pas pour des entiers définis sous forme littérale.

Cet exercice est très important ; nous le retrouverons plus loin (ex. $\boxed{8}$: détermination du PGCD de *n* et 4, qui est un peu plus délicate).

On dégage bien chaque fois la conjecture de la démonstration dans le cadre de l'arithmétique.
On peut généraliser au PGCD(*n* ; *p*) où *p* est un nombre premier.

Ce résultat peut être utilisé tel quel.

$\boxed{2}$

$n \in \mathbb{N}$

1°) **PGCD$(n\,;n+1)$**

a) **Conjecturons le résultat à l'aide de la calculatrice.**

À l'aide de la calculatrice, on conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}\quad \text{PGCD}(n\,;n+1)=1$.

b) **Démontrons le résultat.**

Soit d un diviseur positif commun à n et $n+1$.

d divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de n et $n+1$.
En particulier, d divise la différence.

On a donc $d \mid n+1-n$ soit $d \mid 1$.
Donc $d=1$.

On en conclut que $\text{PGCD}(n\,;n+1)=1$.

On peut dégager le résultat suivant que l'on peut exprimer de deux manières différentes :

> « Le PGCD de deux entiers consécutifs est toujours égal à 1 ».
>
> « Deux entiers consécutifs sont premiers entre eux. »

Nous verrons une autre façon d'établir le résultat avec une propriété du cours (lemme d'Euclide).

2°) **$\text{PGCD}(n\,;n+2)$**

a) **Conjecturons le résultat à l'aide de la calculatrice.**

À l'aide de la calculatrice, on conjecture que :

> • Si n est pair, alors $\text{PGCD}(n\,;n+2)=2$.
>
> • Si n est impair, alors $\text{PGCD}(n\,;n+2)=1$.

b) **Démontrons le résultat.**

Soit d un diviseur positif commun à n et à $n+2$.

On a : $d \mid n$ et $d \mid n+2$.

Donc $d \mid n+2-n$ soit $d \mid 2$.
Par suite, $d=1$ ou $d=2$.

• Si n est pair, alors n et $n+2$ sont divisibles par 2 donc $\text{PGCD}(n\,;n+2)=2$.

• Si n est impair, alors n et $n+2$ ne sont pas divisibles par 2 donc $\text{PGCD}(n\,;n+2)=1$.

Question supplémentaire :

Le résultat reste-t-il vrai si l'on prend n entier relatif ?

La réponse est oui. Le résultat reste vrai lorsque n est un entier relatif.

Autre méthode :

On a : $n+2=1\times n+2$.
Donc d'après le lemme d'Euclide, $\text{PGCD}(n+2\,;n)=\text{PGCD}(n\,;2)$.
On se ramène à l'exercice $\boxed{1}$.

On pourrait continuer l'algorithme d'Euclide :

$n=2q+r$ avec $r\in\{0;1\}$
$\text{PGCD}(n+2\,;n)=r$

$\boxed{3}$ Démontrons qu'il n'existe pas deux entiers relatifs de somme égale à 500 et de PGCD égal à 7.

On raisonne par l'absurde.

1ère méthode :

On commence par un conditionnel : « s'il existait … » ou par « supposons qu'il existe … ».

S'il existait deux entiers relatifs de somme 500 dont le PGCD est 7, alors chacun d'eux serait divisible par 7.
Par conséquent, leur somme serait divisible par 7 (car 7 est un diviseur commun à a et b).
Or 500 n'est pas divisible par 7.
Donc il n'existe pas deux entiers relatifs de somme égale à 500 et de PGCD égal à 7.

2e méthode :

Supposons qu'il existe deux entiers relatifs a et b tels que $a+b=500$ et $\text{PGCD}(a\,;b)=7$.
Alors $7 \mid a$ et $7 \mid b$ donc $7 \mid a+b$.
D'où $7 \mid 500$ ce qui est absurde.
Donc il n'existe pas deux entiers relatifs de somme égale à 500 et de PGCD égal à 7.

$\boxed{4}$

$n\in\mathbb{N}^*$

1°) **Déterminons $\text{PGCD}(n\,;n^2)$.**

$n \mid n^2$ donc $\text{PGCD}(n\,;n^2)=n$.

Autre méthode utilisant une propriété qui sera vue dans la suite du cours :

On peut « factoriser » n et n^2 par n et faire « sortir » n de la parenthèse.
On obtient alors $\text{PGCD}(n\,;n^2)=n\times\text{PGCD}(1\,;n)$.

Or $\text{PGCD}(1\,;n)=1$ (propriété du cours qui résulte du fait que le seul diviseur positif de 1 est 1).

Donc $\text{PGCD}(n\,;n^2)=n\times 1=n$.

Valentin Gabeff TS1 le 5-11-2014 :

Il semble que l'on peut « factoriser » n et n^2 par n et faire « sortir » n de la parenthèse.
On obtient alors $\text{PGCD}\left(n\,;n^2\right)=n\times\text{PGCD}(1\,;n)$.
Or le diviseur positif de 1 est 1. Donc $\text{PGCD}(1\,;n)=1$.

Donc
$$\begin{aligned}\text{PGCD}\left(n\,;n^2\right)&=n\times\text{PGCD}(1\,;n)\\&=n\times1\\&=n\end{aligned}$$

Pour $\text{PGCD}(n\,;2n)$

On a : $\text{PGCD}(n\,;2n)=n\times\text{PGCD}(1\,;2)$
$$\begin{aligned}&=n\times1\\&=n\end{aligned}$$

2°) **Déterminons $\text{PGCD}(n\,;2n)$.**

$n\mid 2n$ donc $\text{PGCD}(n\,;2n)=n$.

Noté le 12-11-2010 :
On verra plus tard une autre méthode (je pense que je voulais dire par là : $\text{PGCD}(n\,;2n)=n\text{PGCD}(1\,;2)=n$).

J'avais noté strictement :
→ $\text{PGCD}\left(n\,;n^2\right)$
$\text{PGCD}(n\,;2n)$
→ On verra une autre méthode.

Question supplémentaire à la fin de l'exercice :

Reprendre la question en supposant que n est un entier relatif.

$\boxed{5}$

$n\in\mathbb{Z}$ quelconque

Déterminer $\text{PGCD}\left(n\,;n^2+1\right)$.

1ère méthode :

Soit d $\boxed{\text{un}}$ diviseur positif commun à n et n^2+1(on sait qu'il en existe : 1 convient).

$d\mid n$ et $d\mid n^2+1$ d'où $d\mid n^2+1-n\times n$ soit $d\mid 1$ et par suite $d=1$.

On en conclut que $\text{PGCD}\left(n\,;n^2+1\right)=1$.

On peut dire que n et n^2+1 sont premiers entre eux.

Une méthode plus détaillée expliquant la combinaison choisie consiste à poser : $a=n^2+1$ et $b=n$.
On choisit ensuite les entiers $u=1$ et $v=-n$.
On calcule la combinaison linéaire $au+bv$: $au+bv=n^2+1-n^2=1$.

2e méthode :
On démontre que n et n^2+1 sont premiers entre eux en observant que $n^2+1-n\times n=1$ (existence d'une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs égale à 1).

$\boxed{6}$

$n\in\mathbb{Z}$

$a=n+3$ et $b=2n+1$

1°)

a) **Démontrons que si d est un entier relatif qui divise a et b, alors d divise 5.**

Soit d un entier naturel tel que $d\mid a$ et $d\mid b$.

On a alors $d\mid 2a-b$ soit $d\mid 5$ (puisque $2a-b=2(n+3)-(2n+1)$).

On applique la propriété des combinaisons linéaires à coefficients entiers.
Une combinaison linéaire de a et de b est une expression de la forme $au+bv$ où u et v sont des entiers relatifs.

On choisit $u=2$ et $v=-1$. La combinaison linéaire obtenue a l'avantage d'éliminer les n et d'obtenir un résultat indépendant de n.

b) **Déterminons les valeurs possibles du PGCD de a et b.**

D'après la question précédente, si d est un entier relatif qui divise a et b, alors d divise 5.
Donc $d=1$ ou $d=5$ ou $d=-1$ ou $d=-5$.

Or le PGCD de a et b est un diviseur commun positif à a et b.
Donc $\text{PGCD}(a\,;b)=1$ ou $\text{PGCD}(a\,;b)=5$.

2°) **Utilisons les congruences modulo 5 pour déterminer suivant les valeurs de n le PGCD de a et b.**

$n\equiv\ldots$ (mod. 5)	0	1	2	3	4
$a\equiv\ldots$ (mod. 5)	3	4	0	1	2
$b\equiv\ldots$ (mod. 5)	1	3	0	2	4

• Lorsque $n \equiv 2\ [5]$, a et b sont tous les deux divisibles par 5. Par conséquent, $\text{PGCD}(a\,;b)=5$.

• Lorsque n n'est pas congru à 2 modulo 5, a et b ne sont pas divisibles par 5. Par conséquent, $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.

$\boxed{7}$

$n \in \mathbb{Z}$

$a=5n+2 \qquad b=n+1$

1°) a) **Démontrons que si *d* est un entier relatif qui divise *a* et *b*, alors *d* divise 3.**

Soit d un entier tel que $d \mid a$ et $d \mid b$.

On a alors $d \mid 5b-a$ soit $d \mid 3$.

b) **Déterminons les valeurs possibles du PGCD de *a* et *b*.**

D'après la question précédente, si d est un entier qui divise a et b, alors d divise 3.
Donc $d=1$ ou $d=3$ ou $d=-1$ ou $d=-3$.

Or le PGCD de a et b est un diviseur commun positif à a et b.
Donc $\text{PGCD}(a\,;b)=1$ ou $\text{PGCD}(a\,;b)=3$.

2°) **Déterminons le PGCD de *a* et *b* suivant les valeurs de *n* en utilisant les congruences modulo 3.**

$n \equiv \ldots$ (mod. 3)	0	1	2
$a \equiv \ldots$ (mod. 3)	2	1	0
$b \equiv \ldots$ (mod. 3)	1	2	0

D'après ce tableau,

• si n est congru à 0 ou à 1 modulo 3, alors a et b ne sont pas divisibles par 3 et par conséquent, $\text{PGCD}(a\,;b)=1$ [on peut donc dire que a et b sont premiers entre eux].

• si n est congru à 2 modulo 3, alors a et b sont divisibles par 3 et par conséquent, $\text{PGCD}(a\,;b)=3$.

Question supplémentaire à la fin de l'exercice :

Reprendre la question en supposant que n est un entier relatif.

$\boxed{8}$

$n \in \mathbb{N}$

Déterminons le PGCD de *n* et de 4 suivant les valeurs de *n*.

On peut utiliser la calculatrice pour conjecturer rapidement le résultat.

Soit d un diviseur positif commun à n et 4.

$d \mid n$ et $d \mid 4$

Or les diviseurs positifs de 4 sont 1, 2 et 4.

On va donc distinguer 3 cas.

• Si n est de la forme $4k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $\text{PGCD}(n\,;4)=4$.

• Si n est de la forme $4k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $\text{PGCD}(n\,;4)=2$.

• Si n est | de la forme $4k+1$ ou $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $\text{PGCD}(n\,;4)=1$.
impair

Utilisation du lemme d'Euclide

$\boxed{9}$ Reprise de l'exercice $\boxed{2}$.

$n \in \mathbb{N}$

1°)

• **Démontrons à l'aide du lemme d'Euclide que $\text{PGCD}(n\,;n+1)=\text{PGCD}(n\,;1)$.**

On a : $n+1=n\times 1+1$.

Par conséquent, $\text{PGCD}(n\,;n+1)=\text{PGCD}(n\,;1)$ d'après le lemme d'Euclide.

• **Déduisons-en la valeur du PGCD de *n* et $n+1$.**

On en déduit que $\text{PGCD}(n\,;n+1)=1$.

Ce résultat peut être retenu sous la forme « Deux entiers consécutifs sont premiers entre eux ».

2°)

• Démontrons à l'aide du lemme d'Euclide que $\text{PGCD}(n\,;n+2)=\text{PGCD}(n\,;2)$.

On a : $n+2=n\times1+2$.

Par conséquent, $\text{PGCD}(n\,;n+2)=\text{PGCD}(n\,;2)$ d'après le lemme d'Euclide.

• Déduisons-en la valeur du PGCD de n et $n+2$.

On utilise le résultat de l'exercice $\boxed{2}$.

• Si n est pair, $\text{PGCD}(n\,;n+2)=2$.

• Si n est impair, $\text{PGCD}(n\,;n+2)=1$.

$\boxed{10}$ Reprise de l'exercice $\boxed{5}$

$n\in\mathbb{N}$

Déterminons $\text{PGCD}(n\,;n^2+1)$ en utilisant le lemme d'Euclide.

On a : $n^2+1=n\times n+1$.
Donc d'après le lemme d'Euclide, $\text{PGCD}(n^2+1\,;n)=\text{PGCD}(n\,;1)=1$.

Remarque importante :

On notera que lorsque l'on applique le lemme d'Euclide, on ne se préoccupe pas de savoir si l'égalité correspond à une division euclidienne.
En particulier, dans notre exercice, peu importe que l'égalité $n^2+1=n\times n+1$ traduise la division euclidienne de n^2+1 par n (ce qui est le cas si $n>1$).

$\boxed{11}$ Reprise de l'exercice $\boxed{9}$

a et b désignent deux entiers naturels quelconques non tous les deux nuls.

Démontrons en utilisant le lemme d'Euclide que $\text{PGCD}(a+b\,;a+2b)=\text{PGCD}(a\,;b)$.

$a+2b=(a+b)\times1+b \qquad (1)$

$a+b=b\times1+a \qquad (2)$

Donc d'après le lemme d'Euclide,

(1) donne $\text{PGCD}(a+b\,;a+2b)=\text{PGCD}(a+b\,;b)\quad(1')$.

(2) donne $\text{PGCD}(a+b\,;b)=\text{PGCD}(a\,;b)\quad(2')$.

D'après $(1')$ et $(2')$, on a donc $\text{PGCD}(a+b\,;a+2b)=\text{PGCD}(a\,;b)$.

Mise en garde à propos des égalités (1) et (2) :

On écrit un faux algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide, c'est quand on a vraiment des divisions euclidiennes, ce qui n'est pas le cas ici.

Le 13-1-2016

Clara Hérissé (TS2)

En utilisant le lemme d'Euclide, on part de l'égalité (1) qui a été établie à savoir $a+2b=(a+b)\times1+b$, qui permet d'écrire : $\text{PGCD}(a+b\,;a+2b)=\text{PGCD}(a+b\,;b)$
et on reprend le deuxième membre à droite, soit
$\text{PGCD}(a+b\,;b)=\text{PGCD}(a\,;b)$, pour arriver à $\text{PGCD}(a+b\,;a+2b)=\text{PGCD}(a\,;b)$.
La démonstration se fait en deux étapes.

Utilisation de l'algorithme d'Euclide

$\boxed{12}$ **Algorithme d'Euclide**

1°) 963 et 153

Déterminons le PGCD des nombres 963 et 153 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$963=153\times6+45$
$153=3\times45+18$
$45=2\times18+\boxed{9}$
$18=2\times9+0$

Donc $\text{PGCD}(963\,;153)=9$.

2°) 49 980 et 28 420
Déterminons le PGCD des nombres 49 980 et 28 420 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$49980=28420\times1+21560$
$28420=21560\times1+6860$
$21560=6860\times3+\boxed{980}$
$6860=980\times7+0$

Donc $\text{PGCD}(49980\,;28420)=980$

3°) 180 et 336

Déterminons le PGCD des nombres 180 et 336 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$336=180\times1+156$
$180=156\times1+24$
$156=24\times6+\boxed{12}$
$24=12\times2+0$

Donc $\text{PGCD}(180\,;336)=12$

Remarque : Si l'on prend les nombres dans l'ordre donné par l'énoncé, on peut observer ce qui se passe pour la première division euclidienne. Elle a pour effet d'échanger 180 et 336.

$180=336\times0+180$
$336=180\times1+156$
$180=156\times1+24$
$156=24\times6+\boxed{12}$
$24=12\times2+0$

On vérifie les résultats à la calculatrice.

13

Soit *a* et *b* deux entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a\,;b)=7$.
La dernière division euclidienne de reste nul étant écrite, les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide sont respectivement : 3 ; 2 ; 1 ; 4.
Quelles sont les valeurs de *a* et *b* ?

D'après l'énoncé, il y a quatre étapes dans l'algorithme d'Euclide (autrement dit, quatre divisions euclidiennes).

On a $\text{PGCD}(a\,;b)=7$ par hypothèse donc le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide est égal à 7.

On note *r* le reste de la division euclidienne de *a* par *b* et *r* ' le reste de la division euclidienne de *b* par *r*.

L'algorithme d'Euclide appliqué à *a* et *b* s'écrit :
$a=b\times\mathbf{3}+r$
$b=r\times\mathbf{2}+r'$
$r=r'\times\mathbf{1}+7$ (car le PGCD est le dernier reste non nul)
$r'=7\times\mathbf{4}+0$

Par suite, en remontant de bas en haut :
$r'=28$
$r=28\times1+7=35$
$b=70+28=98$
$a=98\times3+35=329$

On vérifie à chaque fois que le reste est strictement inférieur au diviseur.

On écrit le « squelette » de l'algorithme d'Euclide puis on calcule les valeurs en partant du bas.

Vérification : On écrit l'algorithme d'Euclide avec les valeurs numériques.
On vérifie que l'algorithme d'Euclide fonctionne bien.

$329=98\times3+35$
$98=35\times2+28$
$35=28+7$
$28=7\times4+0$

On observe que chaque égalité correspond bien à une division euclidienne c'est-à-dire que chaque reste est strictement inférieur au diviseur.

14

Soit *a* et *b* deux entiers naturels premiers entre eux.
La dernière division euclidienne de reste nul étant écrite, les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide sont respectivement : 3 ; 2 ; 1 ; 4.
Quelles sont les valeurs de *a* et *b* ?

Comme *a* et *b* sont premiers entre eux, leur PGCD est égal à 1 ; c'est donc le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide.

On note *r* le reste de la division euclidienne de *a* par *b* et *r* ' le reste de la division euclidienne de *b* par *r*.

L'algorithme d'Euclide appliqué à *a* et *b* s'écrit :
$a=b\times3+r$
$b=r\times2+r'$
$r=r'\times1+1$
$r'=4\times1+0$

Par suite, en remontant de bas en haut, on obtient :
$r'=4$
$r=4+1=5$
$b=2\times5+4=14$
$a=47$

Vérification : On écrit l'algorithme d'Euclide avec les valeurs numériques.

$47=14\times3+5$
$14=5\times2+4$
$5=4\times1+1$
$4=1\times4+0$

Résolution de problèmes concrets

15

1°) **Déterminons le nombre maximal de paquets que Marc pourra réaliser.**

Soit *n* le nombre maximal de paquets que Marc pourra réaliser.

n est un entier naturel.

Comme Marc veut utiliser toutes les billes et que les paquets soient identiques, *n* doit diviser 135 et 108 (donc *n* est un diviseur positif de 135 et de 108).
Comme, de plus, il veut en faire le plus grand nombre possible, *n* doit être le plus grand possible.
Alors *n* est le PGCD de 135 et 108.

Déterminons le PGCD des nombres 108 et 135.

- Utilisons l'algorithme d'Euclide.

$135=108\times1+27$
$108=27\times4+0$
Donc $\text{PGCD}(135\,;108)=27$.

• On peut aussi utiliser directement la calculatrice.

On en déduit que Marc pourra faire 27 paquets de billes.

2°) **Déterminons le nombre de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet.**

$\frac{108}{27} = 4$

$\frac{135}{27} = 5$

Il y aura donc 4 billes rouges dans chaque paquet et 5 billes noires dans chaque paquet.

$\boxed{\textbf{16}}$

182 brins de muguet – 78 roses

Déterminons le nombre maximal de bouquets que Julie pourra faire et la composition de chaque bouquet.

1ère méthode :

On détermine le PGCD de 78 et de 182 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

Division euclidienne de 182 par 78 : $182 = 78 \times 2 + 26$.

Division euclidienne de 78 par 26 : $78 = 3 \times 26 + 0$.

Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD est le dernier reste non nul donc $\text{PGCD}(182\,;78) = 26$.

2e méthode :

On détermine le PGCD de 78 et de 182 à l'aide de la calculatrice.

Julie pourra donc faire au maximum 26 bouquets composés chacun de 3 roses (puisque $78 = 3 \times 26$) et de 7 brins de muguet (puisque $182 = 7 \times 26$).

Algorithme d'Euclide

$\boxed{\textbf{17}}$

L'algorithme suivant doit être recopié dans un cadre.

Entrées :
Saisir *a* et *b*

Traitement :
Tantque $b \neq 0$ **Faire**
r prend la valeur du reste de la division euclidienne de *a* par *b*
a prend la valeur *b*
b prend la valeur *r*
FinTantque

Sortie :
Afficher *a*

1°) Pierre a tort. On ne peut pas échanger les instructions « *a* prend la valeur *b* » et « *b* prend la valeur *r* » à l'intérieur de la boucle « Tantque ».

2°)

Entrées :
Saisir *a* et *b*

Traitement :
Tantque $b \neq 0$ **Faire**
a prend la valeur *b*
b prend la valeur du reste de la division euclidienne de *a* par *b*
FinTantque

Sortie :
Afficher *a*

Paul a tort.
Comme l'instruction « *a* prend la valeur *b* » est placée avant l'instruction « *b* prend la valeur du reste de la division euclidienne de *a* par *b* », cette dernière instruction peut être remplacée par l'instruction « *b* prend la valeur du reste de la division euclidienne de *b* par *b* » c'est-à-dire « *b* prend la valeur 0 ».
Il est indispensable d'introduire la variable *r*.

3°) Jacques souhaite connaître le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide.
Réécrire en le modifiant l'algorithme donné au début de l'énoncé pour qu'il puisse afficher à la fin le PGCD et le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide.
On introduit une nouvelle variable *c* qui va servir de compteur et dont la valeur finale donnera le nombre de divisions euclidiennes effectuées.

Entrée :
Saisir a et b

Initialisation :
c prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $b \neq 0$ **Faire**
  r prend la valeur du reste de la division euclidienne de a par b
  a prend la valeur b
  b prend la valeur r
  c prend la valeur $c+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher a, c

18 Accélération de l'algorithme d'Euclide (algorithme d'Euclide accéléré)

Il faut noter que $r < b$ et $r' \leqslant b$.

1°) **Résultat préliminaire**

Démontrons que $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;r')$.

On a $a = bq' - r'$.

Cette égalité ne fait intervenir que des entiers relatifs donc, d'après le lemme d'Euclide,
$\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;-r') = \text{PGCD}(b\,;r')$.

On applique une propriété évidente du cours :
$\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(a\,;-b) = \text{PGCD}(-a\,;b) = \text{PGCD}(-a\,;-b)$.

2°) Déterminons le PGCD de 548 et de 435 « à la main » en utilisant la méthode de l'algorithme d'Euclide « normal » et l'algorithme d'Euclide accéléré.

Algorithme d'Euclide « normal » pour le couple (548 ; 435)

$548 = 435 \times 1 + 113$
$435 = 113 \times 3 + 96$
$113 = 96 \times 1 + 17$
$96 = 17 \times 5 + 11$
$17 = 11 \times 1 + 6$
$11 = 6 \times 1 + 5$
$6 = 5 \times 1 + \boxed{1}$
$5 = 5 \times 1 + 0$

Algorithme d'Euclide accéléré pour le couple (548 ; 435)

$548 = 435 \times 1 + 113$
$435 = 113 \times 4 - 17$
$113 = 17 \times 7 - 6$
$17 = 6 \times 3 - \boxed{1}$
$6 = 1 \times 6 + 0$

Avec les deux algorithmes, on obtient : $\text{PGCD}(548\,;435) = 1$.

En pratique, nous n'utiliserons jamais l'algorithme d'Euclide accéléré. On pourrait mais nous ne le ferons pas. Nous utiliserons l'algorithme d'Euclide « normal ». L'algorithme d'Euclide accéléré est donné à titre de curiosité car il est intéressant à comprendre et à programmer.

3°)

a et b sont des entiers naturels.

Entrées :
Saisir a
Saisir b

Traitement :
Tantque $b \neq 0$ **Faire**
  r prend la valeur du reste de la division euclidienne de a par b
  r' prend la valeur $b - r$
  a prend la valeur b
  b prend la valeur $\min(r\,;r')$
FinTantque

Sortie :
Afficher a

Dans cet algorithme, il y a un ordre d'entrée : on rentre d'abord a puis b.
Lorsque b est non nul, on commence par effectuer la division euclidienne ou la division pseudo-euclidienne de a par b.

Si $b = 0$, il n'y a pas de passage dans la boucle. Le PGCD est égal à a qui s'affiche à la fin.

Question : Comment sait-on que ça accélère l'algorithme d'Euclide ?
On l'admet (on n'a pas possibilité de le démontrer ; on va juste le vérifier avec un exemple numérique dans la question 3°).

Dans cet algorithme d'Euclide accéléré, on obtient toujours $r = 0$ à un moment donné.

Étape	$b \neq 0$?	r	r'	a	b
0				548	435
1	Vrai	113	322	435	113
2	Vrai	96	17	113	17
3	Vrai	11	6	17	6
4	Vrai	5	1	6	1
5	Vrai	0	1	1	0
6	Faux				

Le jeudi 23 janvier 2020 revu le 4-4-2020

Programme Python

```
def pgcd(a,b):
    while b !=0:
          x=a%b
          y=b-x
          a=b
          b=min(x,y)
    return a
```

```
def pgcd(a,b):
    while b !=0:
          a,b=b,min(a%b,b-a%b)
    return a
```

Le programme n'a pas vraiment d'intérêt en dehors de cet exercice !

4°) Démontrer qu'avec ce nouvel algorithme, chaque reste est inférieur ou égal à la moitié du précédent.
Titre à changer.

On a : $a = bq + r$ ou $a = b(q+1) - r'$.

À l'étape suivante, b devient le dividende et r ou r' devient le diviseur.

On a : $\min(r\,;r') \leqslant r$ et $\min(r\,;r') \leqslant r'$.

Donc par addition membre à membre, on a : $2\min(r\,;r') \leqslant r + r'$.

D'où $\min(r\,;r') \leqslant \dfrac{r+r'}{2}$.

Or $r + r' = b$. Par suite, $\min(r\,;r') \leqslant \dfrac{b}{2}$.

On peut dégager de cette démonstration un petit lemme utile à connaître portant sur l'encadrement de la moyenne arithmétique de deux réels u et v.

On a : $\min(u\,;v) \leqslant \dfrac{u+v}{2} \leqslant \max(u\,;v)$.
La moyenne arithmétique de deux réels est toujours comprise entre le plus petit et le plus grand des deux réels.
Cette propriété se généralise à la moyenne arithmétique de plusieurs réels.

5°) On note k l'exposant entier naturel de la plus haute puissance de 2 inférieure ou égale à b.
Démontrer que le nombre d'étapes de l'algorithme est inférieur ou égal à $k+1$.

Notons ρ_i le reste considéré à l'étape i ($\rho_i = \min(r_i\,;r'_i)$) à enlever.

On note l le nombre d'étapes de l'algorithme.
On peut alors considérer les restes ρ_1, ρ_2, … ρ_l de l'algorithme à l'étape 1, 2, …, l.

Exemple :

Considérons l'algorithme d'Euclide accéléré pour le couple $(1005\,;797)$.

Étape 1	$1005 = 797 \times 1 + 208$	$\rho_1 = 208$
Étape 2	$797 = 208 \times 4 - 35$	$\rho_2 = 35$
Étape 3	$208 = 35 \times 6 - 2$	$\rho_3 = 2$
Étape 4	$35 = 2 \times 17 + 1$	$\rho_4 = 1$
Étape 5	$2 = 1 \times 2 + 0$	$\rho_5 = 0$

On vérifie pour cet exemple que chaque reste de la méthode d'Euclide accélérée est inférieur ou égal à la moitié du précédent ce qui n'est pas le cas de l'algorithme d'Euclide normal.

On observe bien sur cet exemple que chaque reste est inférieur ou égal à la moitié du précédent.

Cas général :

On commence par effectuer la division euclidienne ou la division pseudo-euclidienne de a par b.
k est le plus grand entier naturel tel que $2^k \leqslant b$.
On a donc $2^{k+1} > b$.

On va raisonner par l'absurde en supposant que $l > k+1$.

D'après la question précédente, on a : $\rho_2 \leqslant \dfrac{\rho_1}{2}$; $\rho_3 \leqslant \dfrac{\rho_2}{2}$; … ; $\rho_k \leqslant \dfrac{\rho_{k-1}}{2}$; $\rho_{k+1} \leqslant \dfrac{\rho_k}{2}$.

On obtient aisément $\rho_3 \leqslant \dfrac{\rho_1}{2^2}$, $\rho_4 \leqslant \dfrac{\rho_1}{2^3}$ … $\rho_{k+1} \leqslant \dfrac{\rho_1}{2^k}$ (par une sorte de mini démonstration par récurrence ou par un raisonnement de proche en proche).

Or $\rho_1 \leqslant \dfrac{b}{2}$. D'où $\rho_{k+1} \leqslant \dfrac{b}{2^{k+1}}$.

Par définition de k, on a $2^k \leqslant b < 2^{k+1}$ donc $\dfrac{b}{2^{k+1}} < 1$.

Or $\rho_{k+1} \in \mathbb{N}$ d'où $\rho_{k+1} = 0$.
Donc l'algorithme ne se poursuit pas au-delà de la $(k+1)$-ième étape.
Il est donc absurde d'avoir supposé $l > k+1$.

On en déduit que le nombre d'étapes de l'algorithme est inférieur ou égal à $k+1$.

Complément :

Quand on écrit un algorithme (ou un programme), on cherche toujours à évaluer le nombre d'opérations (nombres de calculs, nombre de tours). Cela sert à connaître l'efficacité de l'algorithme.
Parfois on cherche juste à avoir un ordre de grandeur du nombre d'opérations d'un algorithme.
Pour l'algorithme d'Euclide « normal », il est impossible de connaître le nombre d'étapes à l'avance.
Avec l'algorithme d'Euclide accéléré, on obtient un majorant du nombre d'étapes ce qui nous renseigne sur le coût et la performance de l'algorithme (intéressant en programmation informatique).

On peut s'interroger sur l'intérêt d'étudier des algorithmes de recherche du PGCD puisque la calculatrice donne tout de suite le PGCD. L'un des intérêts est de comprendre comment procède la calculatrice.

Expression de l'entier naturel k qui correspond à la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à b :

$2^k \leqslant b < 2^{k+1}$ donne $\ln 2^k \leqslant \ln b < \ln 2^{k+1}$ soit $k \ln 2 \leqslant \ln b < (k+1)\ln 2$.

On a donc $k \leqslant \dfrac{\ln b}{\ln 2} < k+1$.

Par suite, $k = \mathrm{E}\left(\dfrac{\ln b}{\ln 2}\right)$.

$\boxed{19}$ Algorithme des différences

1°) On peut écrire : $a = b \times 1 + a - b$. Donc d'après le lemme d'Euclide, on a : $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = \mathrm{PGCD}(b\,;a-b)$.

2°)

a) Déterminons le PGCD de 500 et de 448 en utilisant la méthode des différences successives.

$$
\begin{aligned}
&500-448=52\\
&448-52=396\\
&396-52=344\\
&344-52=292\\
&292-52=240\\
&240-52=188\\
&188-52=136\\
&136-52=84\\
&84-52=32\\
&52-32=20\\
&32-20=12\\
&20-12=8\\
&12-8=4\\
&8-4=4\\
&4-4=0
\end{aligned}
$$

Donc $\mathrm{PGCD}(500\,;448) = 4$.

On vérifie ce résultat à la calculatrice.

b) La question est de savoir si l'on est sûr que l'un des deux nombres soit effectivement à un moment égal à 0.
Or, par construction, le plus grand des deux nombres décroît au cours des différentes étapes. Il décroît même strictement tant que l'autre nombre n'est pas nul. Mais cette stricte décroissance d'entiers naturels ne peut pas se poursuivre indéfiniment : il arrive donc un moment où le plus petit des deux nombres vaut 0 et où le plus grand des deux nombres garde la même valeur. Quand c'est le cas, le nombre non nul est le PGCD. À l'étape d'avant les deux nombres étaient nécessairement égaux…

3°)

a)

- $a = 210$ et $b = 140$

Étape	$b \neq 0$?	d	a	b
0			210	140
1	V	70	140	70
2	V	70	70	70
3	V	0	70	0
4	F			

- $a = 10$ et $b = 5$

Étape	$b \neq 0$?	d	a	b
0			10	5
1	V	5	5	5
2	V	0	5	0
3	F			

b) Programmer l'algorithme sur la calculatrice.

Programme Python :

```
def pgcd(a,b):
    while b!=0 :
          d=abs(a-b)
          a=b
          b=d
    return(a)
```

Pour avoir une valeur absolue sur la calculatrice, faire $\boxed{\text{math}}$ puis NUM puis 1 : abs(.

Passage du langage naturel au « langage calculatrice » :

```
: Prompt A, B
: While B ≠ 0
: |A – B| → D
: B → A
: D → B
: End
: Disp A
```

Propriétés du PGCD

$\boxed{20}$

$(m\,;n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$

Déterminons $\text{PGCD}\big(mn\,;(2m+1)n\big)$.

$\text{PGCD}\big(mn\,;(2m+1)n\big)=n\text{PGCD}(m\,;2m+1)$ car $n>0$

Or d'après la propriété fondamentale (lemme d'Euclide*), on a : $\text{PGCD}(m\,;2m+1)=\text{PGCD}(m\,;1)$.

Comme $\text{PGCD}(m\,;1)=1$, on en déduit que $\text{PGCD}\big(mn\,;(2m+1)n\big)=n\times 1$ soit $\text{PGCD}\big(mn\,;(2m+1)n\big)=n$.

* La propriété mise en œuvre est la suivante :

> a, b, q et r sont des entiers relatifs non nuls.
>
> Si $a=bq+r$, alors $\text{PGCD}(a\,;b)=\text{PGCD}(b\,;r)$.

On applique la propriété avec :

$$a=2m+1\ ;\ b=m\ ;\ r=1$$

Autre version :

$2m+1=2m+1 \quad (1)$

On applique le lemme d'Euclide.

Donc d'après (1), $\text{PGCD}(m\,;2m+1)=\text{PGCD}(m\,;1)=1$.

$$\begin{aligned}\text{PGCD}\big(mn\,;(2m+1)n\big)&=n\,\text{PGCD}(m\,;1)\\&=n\times 1\\&=n\end{aligned}$$

Variante (le mercredi 7-12-2016 par Flavie Dessertenne TS1, qui trouvait la méthode plus courte) :

On a : $(2m+1)n=2mn+n$.

Donc d'après le lemme d'Euclide,

$$\begin{aligned}\text{PGCD}\big(mn\,;(2m+1)n\big)&=\text{PGCD}(mn\,;n)\\&=n \quad \text{car } n \text{ divise } mn\end{aligned}$$

$\boxed{21}$

$n\in\mathbb{N}$

$a=n^2+3n\ ;\ b=n^2+5n+6$

1°) **Factorisons *a* et *b*.**

$a=n(n+3)$

$b=(n+2)(n+3)$ (factorisation évidente ou utilisant les racines d'un polynôme du second degré)

On peut aussi considérer le polynôme x^2-5x+6.

On a bien obtenu deux factorisations de a et b sous forme de produits d'entiers, valables quel que soit l'entier naturel n.

On note que ces deux factorisations font apparaître un facteur commun, $n+3$, dont on va se servir dans la question suivante.

> Mauvaise idée :
>
> $a=n(n+3)$
>
> $b=n\left(n+5+\dfrac{6}{n}\right)$
>
> Ces deux factorisations font apparaître le facteur commun n mais la factorisation de b n'est pas une factorisation en produit d'entiers.
> De plus, la factorisation de b n'est valable que pour n non nul.

2°) **Déterminons le PGCD de *a* et *b* suivant les valeurs de *n*.**

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(a\,;b)&=\text{PGCD}\big(n(n+3)\,;(n+2)(n+3)\big)\\&=(n+3)\times\text{PGCD}(n\,;n+2) \quad \text{(propriété du PGCD ; il faut préciser que } n+3>0\text{)}\end{aligned}$$

On utilise ensuite le résultat sur le PGCD de n et de $n+2$ établi à l'exercice $\boxed{2}$ et repris dans l'exercice $\boxed{9}$.

D'après le lemme d'Euclide, $\text{PGCD}(n\,;n+2)=\text{PGCD}(n\,;2)$.

1er cas : n pair

Dans ce cas, $\text{PGCD}(n\,;2)=2$ donc $\text{PGCD}(a\,;b)=2(n+3)$.

2e cas : n impair

Dans ce cas, $\text{PGCD}(n\,;2)=1$ donc $\text{PGCD}(a\,;b)=n+3$.

$\boxed{22}$

Déterminons tous les couples $(a\,;b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $\begin{cases} ab=1452 & (1) \\ \text{PGCD}(a\,;b)=11 & (2) \end{cases}$.

Deux remarques :

• On peut observer d'emblée que le système est symétrique (et non linéaire) : si (a ; b) est solution, alors (b ; a) solution.

• XCas ne permet pas de résoudre ce système.

1ère méthode : Résoudre l'exercice en utilisant la calculatrice.

On observe d'après la première égalité que a et b sont deux diviseurs positifs associés de 1452.
On écrit tous les couples de diviseurs positifs associés de 1452 puis on calcule le PGCD.
On peut aussi carrément envisager tous les entiers naturels inférieurs à 1452.
On effectue une recherche exhaustive sur calculatrice en rentrant la fonction $f : x \mapsto \text{PGCD}\left(x, \dfrac{1452}{x}\right)$ définie sur l'ensemble des diviseurs positifs de 1452.

Sur calculatrice TI, on tape : $\text{Y}_1=\text{pgcd}\left(\text{X}, \dfrac{1452}{\text{X}}\right)$.

2e méthode :

1ère partie :

On considère un couple $(a\,;b)$ d'entiers naturels qui vérifie les égalités (1) et (2).

D'après (2), on peut poser $a=11a'$ ($a'\in\mathbb{N}$) et $b=11b'$ ($b'\in\mathbb{N}$).

On sait que a' et b' sont premiers entre eux.

L'égalité (1) donne alors $11a'\times 11b'=1452 \quad (1')$.

$$\begin{aligned}
(1') &\Leftrightarrow 121a'b'=1452 \\
&\Leftrightarrow a'b'=\frac{1452}{121} \\
&\Leftrightarrow a'b'=12 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a'=1 \\ b'=12 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a'=3 \\ b'=4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a'=4 \\ b'=3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a'=12 \\ b'=1 \end{cases} \quad \text{(voir explication ci-dessous)} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=132 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=33 \\ b=44 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=44 \\ b=33 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=132 \\ b=11 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les diviseurs positifs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Les couples de diviseurs associés positifs formés d'entiers premiers entre eux sont : $(1\,;12)$, $(12\,;1)$, $(3\,;4)$ et $(4\,;3)$. On ne retient pas les couples $(2\,;6)$ et $(6\,;2)$ qui ne sont pas formés d'entiers premiers entre eux (puisqu'ils sont tous les deux divisibles par 2).

2e partie :

On effectue une vérification.

Conclusion :

Les couples cherchés sont (11 ; 132), (33 ; 44), (44 ; 33), (132 ; 11).

Il est tout à fait possible de faire un raisonnement par équivalences car
$(2) \Leftrightarrow \exists (a', b')\in\mathbb{N}^2$ tel que $a=11a'$, $b=11b'$, a' et b' premiers entre eux.

$\boxed{23}$

a et b : entiers relatifs non nuls

Démontrons $\text{PGCD}(a^n\,;b^n)=\left[\text{PGCD}(a\,;b)\right]^n$.

On pose $d=\text{PGCD}(a\,;b)$.

On note a' et b' les entiers tels que $a=da'$ et $b=db'$.
On sait que a' et b' sont premiers entre eux (propriété issue du cours).

$$\begin{aligned}
\text{PGCD}(a^n\,;b^n) &= \text{PGCD}(d^n\times a'^n\,;d^n\times b'^n) \\
&= d^n\times\text{PGCD}(a'^n\,;b'^n) \quad (\text{car } d^n>0)
\end{aligned}$$

Or a' et b' premiers entre eux donc a'^n et b'^n sont premiers entre eux (avec méthode possible par la décomposition en facteurs premiers).

$$\begin{aligned}\text{PGCD}\left(a^n\,;b^n\right)&=d^n\times 1\\&=d^n\\&=\left[\text{PGCD}\left(a\,;b\right)\right]^n\end{aligned}$$

Propriété du cours :

Si x et y sont deux entiers premiers entre eux, pour tout $\left(n\,;\,p\right)$ d'entiers naturels, x^n et y^p sont premiers entre eux.

Il s'agit d'une propriété qui peut être démontrée de deux manières.

- la voie des facteurs premiers : deux nombre sont premiers entre eux si les facteurs des nombres de la décomposition en facteurs premiers sont différents entre eux.

- la voie par la propriété élémentaire : si a est premier avec b_1, a premier avec b_2, …, a premier avec b_r, alors a est premier avec le produit $b_1b_2\,...\,b_r$.

Égalité de Bezout

24

On utilise la partie réciproque du théorème de Bezout (partie facile).

$n\in\mathbb{Z}$

1°) $\boldsymbol{a=n}$ $\boldsymbol{b=2n+1}$

Démontrons que les entiers *a* et *b* sont premiers entre eux.

Il s'agit de trouver une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers égale à 1.

$$\begin{aligned}b-2a&=2n+1-2n\\&=1\end{aligned}$$

La combinaison linéaire est choisie telle que les n s'annulent.

Autre méthode : On écrit $b=2a+1$ qui donne immédiatement $b-2a=1$.

$b-2a$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs égale à 1 donc a et b sont premiers entre eux.

2°) $\boldsymbol{a=2n+1}$ $\boldsymbol{b=6n+4}$

Démontrons que les entiers *a* et *b* sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned}b-3a&=6n+4-6n-3\\&=1\end{aligned}$$

$b-3a$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs égale à 1 donc a et b sont premiers entre eux.

3°) $\boldsymbol{a=2n+3}$ $\boldsymbol{b=3n+5}$

Démontrons que les entiers *a* et *b* sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned}2b-3a&=6n+10-6n-9\\&=1\end{aligned}$$

$2b-3a$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs égale à 1 donc a et b sont premiers entre eux.

Dans chaque cas, on peut vérifier en donnant à n des valeurs (ce sont des cas particuliers).

25 **Recherche de couples de Bezout**

Étape 1 : $4788=3\times1428+504$

Étape 2 : $1428=2\times504+420$

Étape 3 : $504=1\times420+84$

Étape 4 : $420=5\times84$

1°) **Déterminons un couple $\boldsymbol{\left(u\,;v\right)\in\mathbb{Z}^2}$ tel que $\boldsymbol{4788u+1428v=84}$.**

$$\begin{aligned}84&=504-420\\&=504-\left(1428-2\times504\right)\\&=504\times3-1428\\&=\left(4788-3\times1428\right)\times3-1428\\&=3\times4788-9\times1428-1428\quad\text{(on a développé la ligne précédente)}\\&=3\times4788-10\times1428\end{aligned}$$

Le couple $\left(3\,;-10\right)$ convient.

2°) On utilise les quotients.

		4788	1428		
4788	L_1	1	0		
1428	L_2	0	1		
504	L_3	1	-3	$L_3\leftarrow L_1-3\times L_2$	$4788=3\times1428+504$
420	L_4	-2	7	$L_4\leftarrow L_2-2\times L_3$	$1428=2\times504+420$
84	L_5	3	-10	$L_5\leftarrow L_3-1\times L_4$	$504=1\times420+84$
		↑	↑		
		u	v		

26 **Recherche de couples de Bezout**

Dans cet exercice, l'algorithme (ou plutôt le programme) « Bezout » nous donne le même résultat que celui trouvé par le calcul.
On pourrait aussi utiliser la technique de la fonction affine mentionnée dans le cours et qui est mise en pratique dans l'exercice suivant.

1°) **726 et 137**

Cherchons un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $726u + 137v = 1$.

On applique l'algorithme d'Euclide.

$726 = 137 \times 5 + 41$
$137 = 41 \times 3 + 14$
$41 = 14 \times 2 + 13$
$14 = 13 \times 1 + 1$
$13 = 13 \times 1$

On observe que le PGCD de 726 et de 137 est égal à 1.

On peut aussi écrire l'algorithme d'Euclide accéléré :
$726 = 137 \times 5 + 41$
$137 = 41 \times 3 + 14$
$41 = 14 \times 3 - 1$
$14 = 1 \times 14 + 0$

1ère méthode : On « remonte » l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{aligned}1 &= 14 - 13 \times 1\\ &= 14 - (41 - 14 \times 2)\\ &= 14 \times 3 - 41\\ &= 3 \times (137 - 41 \times 3) - 41\\ &= 3 \times 137 - 41 \times 10\\ &= 3 \times 137 - (726 - 137 \times 5) \times 10\\ &= 53 \times 137 - 10 \times 726\end{aligned}$$

$53 \times 137 - 10 \times 726 = 1$
Un couple (u, v) cherché est le couple $(-10, 53)$.

2e méthode : On « descend » l'algorithme d'Euclide (utilisation d'un tableau).

		726	137		
726	L_1	1	0		
137	L_2	0	1		
41	L_3	1	– 5	$L_3 \leftarrow L_1 - 5 \times L_2$	$726 = 137 \times 5 + 41$
14	L_4	– 3	16	$L_4 \leftarrow L_2 - 3 \times L_3$	$137 = 41 \times 3 + 14$
13	L_5	7	– 37	$L_5 \leftarrow L_3 - 2 \times L_4$	$41 = 14 \times 2 + 13$
1	L_6	– 10	53	$L_6 \leftarrow L_4 - 1 \times L_3$	$14 = 13 \times 1 + 1$
		$\uparrow$	$\uparrow$		
		u	v		

2°) **2017 et 1771**

Cherchons un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $2017u + 1771v = 1$.

$2017 = 1771 \times 1 + 246$
$1771 = 246 \times 7 + 49$
$246 = 49 \times 5 + 1$

On observe que le PGCD de 2017 et de 1771 est égal à 1.

1ère méthode : On « remonte » l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{aligned}1 &= 246 - 49 \times 5\\ &= 246 - (1771 - 246 \times 7) \times 5\\ &= 246 - 1771 \times 5 + 246 \times 35\\ &= 246 \times 36 - 1771 \times 5\\ &= (2017 - 1171) \times 36 - 1771 \times 5\\ &= 2017 \times 36 - 1771 \times 41\end{aligned}$$

$2017 \times 36 - 1771 \times 41 = 1$

Un couple (u, v) cherché est le couple $(36, -41)$.

2e méthode : On « descend » l'algorithme d'Euclide (utilisation d'un tableau).

$2017 = 1771 \times 1 + 246$
$1771 = 246 \times 7 + 49$
$246 = 49 \times 5 + 1$

		2017	1771		
2017	L_1	1	0		
1771	L_2	0	1		
246	L_3	1	– 1	$L_3 \leftarrow L_1 - 1 \times L_2$	$2017 = 1771 \times 1 + 246$
49	L_4	– 7	8	$L_4 \leftarrow L_2 - 7 \times L_3$	$1771 = 246 \times 7 + 49$
1	L_5	36	– 41	$L_5 \leftarrow L_3 - 5 \times L_4$	$246 = 49 \times 5 + 1$
		↑ u	↑ v		

27

Utiliser la méthode de la fonction affine et la calculatrice pour déterminer un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs pour chaque égalité.

1°) $51u - 19v = 1$

$v = \dfrac{51u-1}{19}$

$f : x \mapsto \dfrac{51x-1}{19}$

$f(3) = 8$

Donc $51\times3-19\times8=1$.

$(3, 8)$ est $\boxed{\text{un}}$ couple qui convient.

2°) $32u + 15v = 1$

$v = \dfrac{1-32u}{15}$

$f : x \mapsto \dfrac{1-32x}{15}$

$f(8) = -17$

$32\times8+15\times(-17)=1$

$(8, -17)$ est $\boxed{\text{un}}$ couple qui convient.

Dans chaque cas, on rentre la fonction affine dans la calculatrice.
Après un réglage correct, on obtient un tableau de valeurs de *f* pour des valeurs entières de *x*. On cherche dans le tableau une valeur de *x* qui donne une image entière par *f*.

28

$4x - 3y = 5$ (E) avec $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$

1°) **Déterminons un couple $(x_0\,;y_0)$ d'entiers relatifs, solution « évidente » de l'équation (E).**

$4\times2-3\times1=5$

Le couple (2 ; 1) est une solution évidente de (E).

N.B. : On pourrait aussi prendre le couple (5 ; 5).

2°) **Déterminons toutes les solutions de (E).**

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow 4x-3y=4\times2-3\times1$

$\Leftrightarrow 4x-4\times2=3y-3\times1$

$\Leftrightarrow 4(x-2)=3(y-1)\quad(\mathrm{E}')$

1ère méthode :

D'après (E'), comme $(x-2)\in\mathbb{Z}$, $4 \mid 3(y-1)$.
Or 4 et 3 sont premiers entre eux.
Donc, d'après le théorème de Gauss, $4 \mid y-1$.
Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y-1=4k$ soit $y=1+4k$.
On remplace $y-1$ par $4k$ dans (E').

On obtient : $\cancel{4}(x-2)=3\times\cancel{4}k$ ce qui donne immédiatement $x-2=3k$ en simplifiant les deux membres par 4.
D'où $x=3k+2$.

Nous avons obtenu les couples $(3k+2\,;4k+1)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Nous n'avons raisonné que par des implications qui correspondent à des conditions nécessaires.
Nous devons donc vérifier que les solutions conviennent.

On vérifie que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $4\times(3k+2)-3\times(1+4k)=\cancel{12k}+8-\cancel{12k}-3$
$=5$

Les couples $(3k+2\,;4k+1)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ sont solutions de (E).

Conclusion :

On peut conclure de deux manières (rédaction à apprendre par cœur).

- Les solutions de (E) sont tous les couples $(3k+2\,;4k+1)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des solutions de (E) est $S=\{(3k+2\,;1+4k), k\in\mathbb{Z}\}$.

2e méthode :

D'après (E'), comme $(y-1)\in\mathbb{Z}$, $3 \mid 4(x-1)$.
Or 3 et 4 sont premiers entre eux.
Donc, d'après le théorème de Gauss, $3 \mid x-1$.
Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-2=3k$ soit $x=2+3k$.
On remplace $x-2$ par $3k$ dans (E').
On obtient : $4\times\cancel{3}k=\cancel{3}\times(y-1)$.

D'où $y-1=4k$ soit $y=1+4k$. On achève comme avec la 1ère méthode.
On trouve le même ensemble de solutions.

Point-méthode :

Il y a une rupture d'équivalence.
D'où la nécessité de faire une vérification à la fin.

Dans un premier temps, on démontre que $S \subset \{(3k+2\,;1+4k),\, k \in \mathbb{Z}\}$.
Dans un deuxième temps, on démontre que $\{(3k+2\,;1+4k),\, k \in \mathbb{Z}\} \subset S$.

On effectue un raisonnement déductif après l'équivalence.

$\boxed{29}$

$8x - 5y = 7$ (E) avec $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$

1°) **Déterminons un couple $(x_0\,;y_0)$ d'entiers relatifs, solution de l'équation (E).**

$8 \times 4 - 5 \times 5 = 7$

Donc le couple (4 ; 5) est une solution particulière de l'équation (E).

(On pourrait aussi déterminer un tel couple en utilisant l'algorithme d'Euclide ou le programme de la calculatrice ou encore la technique de la fonction affine mentionnée dans le cours.)

2°) **Déterminons toutes les solutions de (E).**

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow 8x - 5y = 8 \times 4 - 5 \times 5$$
$$\Leftrightarrow 8(x-4) = 5(y-5) \quad (\mathrm{E'})$$

On en déduit que $8 \mid 5(y-5)$ avec 8 et 5 premiers entre eux.
D'après le théorème de Gauss, il en résulte que $8 \mid y-5$.
Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 5 = 8k$ soit $y = 5 + 8k$.
On remplace $y-5$ par $8k$ dans $(\mathrm{E'})$.

On obtient : $\cancel{8}(x-4) = 5 \times \cancel{8}k$ d'où $x = 4 + 5k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Nous avons obtenu les couples $(4+5k\,;5+8k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Nous n'avons raisonné que par des implications qui correspondent à des conditions nécessaires.
Nous devons donc vérifier que les solutions conviennent.

On vérifie que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $8 \times (5k+4) - 5 \times (8k+5) = \cancel{40k} + 32 - \cancel{40k} - 25$
$= 7$

Conclusion :

Les solutions de (E) sont les couples de la forme $(4+5k\,;5+8k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{(4+5k\,;5+8k),\, k \in \mathbb{Z}\}$.

$\boxed{30}$

1°) *Résolution d'une équation diophantienne linéaire*

$8x + 5y = 100$ (E) avec $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$

Déterminons une solution particulière de (E) puis résolvons (E).

• Le couple $(0\,;20)$ est une solution particulière évidente de (E).

Remarque : Il y a d'autres choix possibles : par exemple, les couples (10 ; 4) et (5 ; 12).

Dans la suite, nous allons travailler avec le couple $(0\,;20)$ [il n'y a pas de raison particulière de choisir ce couple plutôt qu'un autre].

• On passe à la résolution proprement dite de l'équation (E).

1ère partie :

Considérons un couple $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de (E).

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow 8x + 5y = 8 \times 0 - 5 \times 20$$
$$\Leftrightarrow 8x = 5(20 - y) \quad (\mathrm{E'})$$

D'après $(\mathrm{E'})$, $8 \mid 5(20-y)$.

Or 8 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, $8 \mid 20 - y$.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $20 - y = 8k$ soit $y = 20 - 8k$.

On remplace $20 - y$ par $8k$ dans $(\mathrm{E'})$.

On obtient : $\cancel{8}x = 5 \times \cancel{8}k$ ce qui donne en simplifiant les deux membres par 8, $x = 5k$.

On obtient les couples $(5k\,;20-8k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2e partie :

Considérons un couple de la forme $(5k\,;20-8k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Vérifions qu'il est solution de (E).

On effectue un calcul :

$8 \times 5k + 5 \times (20 - 8k) = 100$

Donc le couple $(5k\,;20-8k)$ est bien solution de (E).

Conclusion :

Les solutions de (E) sont les couples de la forme $(5k\,;20-8k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On peut aussi conclure de la manière suivante :

L'ensemble des solutions de (E) est $S=\{(5k\,;20-8k),\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Avec les autres choix de solutions particulières, on obtient : $S=\{(5k+5\,;12-8k),\,k\in\mathbb{Z}\}$ ou $S=\{(10+5k\,;4-8k),\,k\in\mathbb{Z}\}$.

2°) **Application à un problème concret**

Cherchons le nombre d'hommes et de femmes présents.

Soit x le nombre d'hommes.
Soit y le nombre de femmes.

x et y sont des entiers naturels non nuls qui vérifient l'égalité $8x+5y=100$ donc $(x\,;y)$ est solution de (E).

D'après la question 1°), il existe un entier relatif k tel que $x=5k$ et $y=20-8k$.

Comme x et y sont des nombres de personnes, nous pouvons affirmer que $x>0$ et $y>0$.

Donc $\begin{cases}5k>0\\20-8k>0\end{cases}$ d'où $\begin{cases}k>0\\k<2{,}5\end{cases}$.

k peut donc prendre les valeurs 1 et 2.

1$^{\text{er}}$ cas : $k=1$

Dans ce cas, $x=5$ et $y=12$.

2$^{\text{e}}$ cas : $k=2$

Dans ce cas, $x=10$ et $y=4$.

Phrase réponse :

Il y a deux possibilités :

- Il peut y avoir 10 hommes et 4 femmes.

ou

- Il peut y avoir 5 hommes et 12 femmes.

En acceptant que x et y peuvent être nuls, nous aurions été conduits à accepter le cas où $k=0$.
Cela correspondrait à un groupe ne contenant aucun homme et 20 femmes.

Autre méthode :

$8x+5y=100$

$$\begin{aligned}8x&=100-5y\\&=5(20-y)\end{aligned}$$

On a donc $5\mid 8x$.
Or 5 et 8 sont premiers entre eux.
On en déduit que $5\mid x$.

On a : $x>0$ et $8x\leqslant 100$ donc x peut prendre les valeurs 5 et 10.
Donc $8x$ peut être égal à 40 et 80.

Dans ces deux cas respectifs, $5y$ est égal à 60 et 20 d'où y est égal à 12 et 4.

Les solutions possibles sont donc (5 ; 12) et (10 ; 4).

$\boxed{\textbf{31}}$

Déterminons si l'équation $6x-3y=17$ (1) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

(1) $\Leftrightarrow 3(2x-y)=17$

$2x-y$ est un entier relatif.

Or 3 n'est pas un diviseur de 17 (nombre premier).

Donc l'équation (1) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\textbf{32}}$

Déterminons PPCM(44 100 ; 3 036).

Rappel :

Pour obtenir le PPCM de deux entiers, il y a trois possibilités :

- en utilisant la calculatrice *(direct, c'est ce qu'il y a de plus rapide)* ;

- « à la main » c'est-à-dire sans utiliser la fonction PPCM de la calculatrice *(assez long, il faut passer par le PGCD ; on utilise* $\mathrm{PGCD}(a\,;b)\times\mathrm{PPCM}(a\,;b)=ab$ *)* ;

- en utilisant les nombres premiers *(plus longue, à éviter en général)*

Ici, les entiers sont de « grands » nombres donc il vaut mieux utiliser la calculatrice (1$^{\text{ère}}$ méthode).

1$^{\text{ère}}$ méthode :

Avec la calculatrice, on obtient : $\mathrm{PPCM}(44\ 100\,;3\ 036)=11\ 157\ 300$.

2^{e} méthode :

On commence par calculer le PGCD de 44 100 et de 3 036.
Pour cela, on applique l'algorithme d'Euclide au couple (44 100 ; 3 036).

On a successivement :

$44100 = 3036 \times 14 + 1596$
$3036 = 1596 \times 1 + 1440$
$1596 = 1440 \times 1 + 156$
$1440 = 156 \times 9 + 36$
$156 = 4 \times 36 + \mathbf{12}$
$36 = 12 \times 3 + 0$

Il en résulte que $\text{PGCD}(44100\,;3036) = 12$.

Par propriété, on a : $\text{PGCD}(44100\,;3036) \times \text{PPCM}(44100\,;3036) = 44100 \times 3036$

Donc $44\,100 \times 3\,036 = 12 \times \text{PPCM}(44\,100\,;3\,036)$.

On en déduit que $\text{PPCM}(44100\,;3\,036) = \dfrac{44100 \times 3036}{12}$
$= 11157300$

On vérifie le résultat avec la calculatrice (commande au-dessus du PGCD).

Il n'y pas d'algorithme simple pour trouver le PPCM de deux entiers.

3^{e} méthode : voir chapitre suivant

33

Cet algorithme ne fonctionne jamais lorsque les valeurs de a et b saisies en entrée sont des entiers naturels non nuls distincts.
En effet, si $a \neq b$, alors pour tout entier naturel $q \geqslant 1$, $qa \neq qb$.

On a une boucle infinie.

34

$n \in \mathbb{N}^*$

Déterminons $\text{PPCM}(2\,;n)$ suivant les valeurs de n.

On commence par conjecturer le résultat grâce à la calculatrice [taper $\text{Y}1 = \text{ppcm}(\text{X}, 2)$].

On utilise la calculatrice pour conjecturer le résultat. On remarque différents cas selon la parité de n.

On distingue deux cas selon que n est pair ou impair.

1er cas : n pair

Dans ce cas, $\text{PPCM}(2\,;n) = n$ car $2 \mid n$

2^{e} cas : n impair

Les multiples positifs de n sont n, $2n$, $3n$ …

n est divisible par n mais pas par 2.

$2n$ est divisible par n et par 2.

On en déduit que, dans ce cas, $\text{PPCM}(2\,;n) = 2n$.

Autre méthode :

On utilise la relation $\text{PGCD}(2\,;n) \times \text{PPCM}(2\,;n) = 2n$ et on utilise le résultat de l'exercice **1** concernant le PGCD de 2 et de n suivant les valeurs de n.

35

Déterminons tous les couples $(a\,;b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\begin{cases} ab = 1512 & (1) \\ \text{PPCM}(a\,;b) = 252 & (2) \end{cases}$.

Cet exercice est le pendant de l'exercice **22**, cette fois avec le PPCM. On reprend *mutatis mutandis* la même méthode qu'à l'exercice **22**. Nous pouvons même dire que l'on va s'y ramener.

On peut commencer par observer que le système est symétrique.

1ère méthode : Résoudre l'exercice en utilisant la calculatrice.

On observe d'après la première égalité que a et b sont deux diviseurs positifs associés de 1512.
On écrit tous les couples de diviseurs positifs associés de 1512 puis on calcule le PPCM.
On peut aussi carrément envisager tous les entiers naturels inférieurs à 1512.
On effectue une recherche exhaustive sur calculatrice en rentrant la fonction $\text{Y}1 = \text{ppcm}\left(\text{X}, \dfrac{1512}{\text{X}}\right)$.

2^{e} méthode :

J'avais noté strictement

1ère partie :

Méthode :

On raisonne en deux parties avec une première partie de recherche des solutions éventuelles et une deuxième partie de vérification.

Dans la première partie, on commence par chercher le PGCD de a et de b puis on se raccroche à l'exercice **22**.

On suppose que $(a\,;b)$ est un couple d'entiers naturels non nuls vérifiant le système.

Par propriété du cours, on a : $\text{PGCD}(a\,;b)\times\text{PPCM}(a\,;b)=ab$ donc d'après (1), on a :

$\text{PGCD}(a\,;b)=\dfrac{1512}{252}=6$.

On a alors $a=6a'$ et $b=6b'$ où a' et b' sont des entiers naturels premiers entre eux.

(1) s'écrit alors $6a'\times 6b'=1512 \quad (1')$.

$(1') \Leftrightarrow 36a'b'=1512$

$\Leftrightarrow a'b'=42$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a'=1\\b'=42\end{cases}$ ou $\begin{cases}a'=2\\b'=21\end{cases}$ ou $\begin{cases}a'=3\\b'=14\end{cases}$ ou $\begin{cases}a'=6\\b'=7\end{cases}$ ou $\begin{cases}a'=7\\b'=6\end{cases}$ ou $\begin{cases}a'=14\\b'=3\end{cases}$ ou $\begin{cases}a'=21\\b'=2\end{cases}$ ou $\begin{cases}a'=42\\b'=1\end{cases}$

(voir explication ci-dessous)

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=6\\b=252\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=12\\b=126\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=18\\b=84\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=36\\b=42\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=42\\b=36\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=84\\b=18\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=126\\b=12\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=252\\b=6\end{cases}$

Les diviseurs positifs de 42 sont 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.
Les couples de diviseurs associés positifs formés d'entiers premiers entre eux sont : $(1;42)$, $(2\,;21)$, $(3;14)$, $(6\,;7)$, $(7\,;6)$, $(14;3)$, $(21;2)$, $(42\,;1)$.

2^e partie :

On effectue une vérification.

Conclusion :

Les solutions sont les couples (6 ; 252), (12 ; 126), (18 ; 84), (36 ; 42), (42 ; 36), (84 ; 18), (126 ; 12), (252 ; 6).

36

$(a\,;b)\in(\mathbb{N}^*)^2$

$d=\text{PGCD}(a\,;b)$

$m=\text{PPCM}(a\,;b)$

Déterminons a et b sachant que $m-2d=11$ (1).

1^ère partie :

Comme $d=\text{PGCD}(a\,;b)$, on a $a=da'$ et $b=db'$ avec a' et b' entiers premiers entre eux.

D'après la relation liant le PGCD et le PPCM de deux entiers, on a : $a\times b=m\times d$ soit $a'db'd=md$ et donc $m=a'b'd$ (en divisant $d\neq 0$).

On a alors :

$(1) \Leftrightarrow a'b'd-2d=11$

$\Leftrightarrow d(a'b'-2)=11$

d est donc un diviseur positif de 11 soit $d=1$ ou $d=11$.

• Si $d=1$, alors $a'b'-2=11$ d'où $a'b'=13$.
Cette dernière égalité permet d'affirmer que a' et b' sont des diviseurs positifs de 13.
D'où $a'=1$ et $b'=13$ ou $a'=13$ et $b'=1$.
• Si $d=11$, alors $a'b'-2=1$ d'où $a'b'=3$.
Cette dernière égalité permet d'affirmer que a' et b' sont des diviseurs positifs de 3.
D'où $a'=1$ et $b'=3$ ou $a'=3$ et $b'=1$.

On passe enfin à la détermination des couples $(a\,;b)$ pour lesquels l'égalité (1) est vérifiée.

On utilise les égalités $a=da'$ et $b=db'$.

• Si $d=1$, on a deux couples solutions : (1 ; 13) et (13 ; 1).

• Si $d=11$, on a deux couples solutions : (11 ; 33) et (33 ; 11).

2^e partie :

On effectue une vérification.

Conclusion : Il y a quatre couples solutions (1 ; 13), (13 ; 1), (11 ; 33), (33 ; 11).

37

$\mathrm{T_A} = 68$

$\mathrm{T_B} = 200$

On calcule le PPCM.

$\mathrm{PPCM}(\mathrm{T_A}\,;\mathrm{T_B}) = 3400$ (obtenu avec la calculatrice)

Il s'agit d'un résultat en heures.

On effectue la division euclidienne de 3400 par 24.

$3400 = \underbrace{141}_{j} \times 24 + \underbrace{16}_{h}$

$31 + 28 + 31 + 30 = 120$
$141 - 120 = 21$

$10\text{ h} + 16\text{ h} = 26\text{ h}$ (pour trouver les 2h du matin, on ajoute 16 heures aux 10 heures initiales)

$26\text{ h} - 24\text{ h} = 2\text{ h}$

On retrouvera une configuration identique au 1er janvier 2014 le 23 mai à 2 h (du matin).

- $\mathrm{T_A} = 68$

$3400 = 68 \times 50$

Le satellite A a effectué 50 révolutions autour de la planète.

- $\mathrm{T_B} = 200$

$3400 = 200 \times 17$
Le satellite B a effectué 17 révolutions autour de la planète.

On a la même configuration le 1er janvier à minuit et le 23 mai à 2 h du matin.

38

Grâce à la calculatrice, on obtient : $\mathrm{PPCM}(56\,;78) = 2184$

On a : $\dfrac{2184}{56} = 39$ et $\dfrac{2184}{78} = 28$.

Donc la première roue fait 39 tours complets et la deuxième fait 28 tours complets.

39

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
En utilisant le résultat de l'exercice **21**, démontrer que $\mathrm{PPCM}(a^n\,;b^n) = [\mathrm{PPCM}(a\,;b)]^n$.

On a : $\mathrm{PGCD}(a^n\,;b^n) \times \mathrm{PPCM}(a^n\,;b^n) = a^n \times b^n$.

Par suite, comme $\mathrm{PGCD}(a\,;b) \neq 0$, on a :

$$\mathrm{PPCM}(a^n\,;b^n) = \left[\frac{a \times b}{\mathrm{PGCD}(a\,;b)}\right]^n$$

$$= [\mathrm{PPCM}(a\,;b)]^n$$

40

Déterminons « à la main » $\mathrm{PGCD}(56\,;84\,;105)$ en établissant la liste des diviseurs positifs de 56, 84 et 105.

Les diviseurs positifs de 56 sont : 1, 2, 4, $\boxed{7}$, 8, 14, 28, 56.

Les diviseurs positifs de 84 sont : 1, 2, 3, 4, 6, $\boxed{7}$, 12, 14, 21, 28, 42, 84.

Les diviseurs positifs de 105 sont : 1, 3, 5, $\boxed{7}$, 15, 21, 35, 105.

On en déduit : $\mathrm{PGCD}(56\,;84\,;105) = 7$.

41

Déterminons le PGCD de 798, 966 et 1239 en utilisant la calculatrice et la propriété d'associativité.

On écrit sur la calculatrice : $\mathrm{PGCD}(\mathrm{PGCD}(798\,;966)\,;1239)$.
On obtient : $\mathrm{PGCD}(798\,;966\,;1239) = 21$.

42

Déterminons trois entiers relatifs a, b, c tels que $\mathrm{PGCD}(a\,;b\,;c) = 1$ et tels qu'aucun des couples $(a\,;b)$, $(a\,;c)$, $(b\,;c)$ ne soit formé d'entiers premiers entre eux.

Il n'y a pas de méthode pour trouver un tel triplet. Il faut juste chercher un peu.

On peut prendre par exemple :

$a = 14$, $b = 21$, $c = 36$

$a = 6$, $b = 10$, $c = 15$

Lorsque $\text{PGCD}(a\,;b\,;c)=1$, on dit que *a*, *b*, *c* sont premiers entre eux dans leur ensemble.

43

Déterminons le PPCM de 630, 840 et 420.

Avec la calculatrice on obtient $\text{PPCM}(630\,;420)=1260$ et $\text{PPCM}(840\,;1260)=2520$.

On en déduit que $\text{PPCM}(840\,;630\,;420)=2520$.

On peut aussi directement écrire sur la calculatrice : $\text{PPCM}(840\,;\text{PPCM}(630\,;420))=2520$.

Une autre méthode consiste à factoriser chaque nombre par 10 :
$\text{PPCM}(840\,;630\,;420)=10\text{PPCM}(84\,;63\,;42)$.
On peut ensuite factoriser par 3.