TS

Les nombres complexes (1)

Le 4 septembre 2018

→ droite réelle

→ plan complexe

touches $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\bullet}$

calculer de tête $(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$

Le 14-11-2017

$z = z' \Leftrightarrow \overline{z} = \overline{z'}$

Le jeudi 5 octobre 2017

TS Complexes

Toutes les identités étudiées pour les nombres réels restent valables pour les complexes.

identités remarquables

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \qquad 1 + z + \ldots + z^n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$

formule fondamentale de l'algèbre

Le mardi 4 septembre 2018

Cours de complexes (1)
Parler de conjugaison sur la calculatrice (CPLX)

Les nombres complexes seront étudiés dans trois chapitres.

Pour commencer…

On prend la calculatrice TI 83 Premium-CE.
On appuie sur les touches $\boxed{\text{2nde}}$ puis $\boxed{\bullet}$. On obtient i sur l'écran.
On élève au carré. On obtient – 1.
Ainsi, $\mathrm{i}^2 = -1$.
i est un « nombre » dont le carré est négatif et vaut – 1.
Le but du chapitre est d'étudier une nouvelle catégorie de « nombres » qui utilise le nombre i, appelée « nombres complexes ».

I. Introduction

1°) Bref historique

Nombres impossibles → nombres imaginaires (Descartes) → nombres complexes

2°) Ensembles de nombres

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$x+7=0 \qquad 3x+7=0 \qquad x^2-2=0 \qquad x^2+1=0$

L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ ($\cancel{x = \sqrt{-1} \text{ ou } x = -\sqrt{-1}}$)

À chaque fois que l'on gagne quelque chose, on perd quelque chose (c'est souvent vrai dans d'autres contextes).
Par exemple, quand on passe de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, on perd la relation d'ordre.

3°) Problème

Construire un ensemble de nombres qui va contenir $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2+1=0$ admette des solutions et prolonger les opérations connues dans $\mathbb{R}$ à ce nouvel ensemble de nombres de telle manière qu'elles aient les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.

II. Ensemble des complexes

1°) Définition

Nous admettrons qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ qui vérifie les conditions précédentes.
Les éléments de cet ensemble sont appelés **nombres complexes**.

2°) Opérations

L'ensemble des nombres complexes est muni des opérations d'addition et de multiplication avec les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$.

3°) Nombre i

Nous admettrons sans démonstration l'existence d'un « **nombre imaginaire** » noté **i** tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

4°) Comparaison des ensembles de nombres

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

III. Écriture algébrique des nombres complexes

1°) Propriété (admise sans démonstration)

Tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + \text{i}b$ avec $(a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2$.

2°) Exemples

$3 + 2\text{i} \in \mathbb{C}$ $(a = 3\ ;\ b = 2)$

$5 \in \mathbb{C}$ $(a = 5\ ;\ b = 0)$

$4\text{i} \in \mathbb{C}$ $(a = 0\ ;\ b = 4)$

$3 + \text{i}\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ $(a = 3\ ;\ b = \sqrt{2})$

$5 - 7\text{i} \in \mathbb{C}$ $(a = 5\ ;\ b = -7)$

Remarques d'écritures :

- $3 + \text{i} \times (-2)$ s'écrit $3 - 2\text{i}$.
- $2 + \text{i} \times 1$ s'écrit $2 + \text{i}$.
- $1 + \text{i} \times \sqrt{2}$ s'écrit $1 + \text{i}\sqrt{2}$.

3°) Vocabulaire

- $a + \text{i}b$ est la **forme algébrique** du nombre complexe z.
- a est appelé la **partie réelle** de z ; on écrit $\text{Re}\, z = a$.
- b est appelé la **partie imaginaire** de z ; on écrit $\text{Im}\, z = b$.

⚠ La partie imaginaire est b et non ib ; c'est un réel.

4°) Cas particuliers

- Si $b = 0$ (c'est-à-dire $\text{Im}\, z = 0$), alors $z = a$; z est un **réel**.
- Si $a = 0$ (c'est-à-dire $\text{Re}\, z = 0$), alors $z = \text{i}b$; z est un **imaginaire pur**.

Un **imaginaire pur** est un nombre qui s'écrit sous la forme ib où b est un réel.
L'ensemble des imaginaires purs est noté $\text{i}\mathbb{R}$.

N.B. : 0 est le seul nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur.

$\mathbb{R}$ et $\text{i}\mathbb{R}$ sont deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R} \cap \text{i}\mathbb{R} = \{\ 0\ \}$

$\mathbb{R}$ et $\text{i}\mathbb{R}$ sont deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$ qui ne forment pas une partition de $\mathbb{C}$.

On notera que $\text{i} \in \text{i}\mathbb{R}$ de manière évidente.

5°) Exemple

$z = \underbrace{-3}_{\text{Re}\, z} + \underbrace{5}_{\text{Im}\, z}\,\text{i}$

$\text{Re}\, z = -3$

$\text{Im}\, z = 5$

6°) Égalité de deux nombres complexes ; nullité d'un nombre complexe

$z = a + \text{i}b \quad ((a\,;b) \in \mathbb{R}^2)$

$z' = a' + \text{i}b' \quad ((a'\,;b') \in \mathbb{R}^2)$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

(Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.)

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

(Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire est nulle).

Il s'agit de conditions nécessaires et suffisantes.

7°) Récapitulatif

$z=a+\mathrm{i}b$ $\left((a\,;b)\in\mathbb{R}^2\right)$

$\mathrm{Re}\,z=a$
$\mathrm{Im}\,z=b$

$\mathrm{i}^2=-1$

$z=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,z=0$ et $\mathrm{Im}\,z=0$

$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,z=\mathrm{Re}\,z'$ et $\mathrm{Im}\,z=\mathrm{Im}\,z'$

$z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,z=0$

$z\in\mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,z=0$

IV. Interprétation géométrique (XIX^e siècle : Argand-Cauchy-Gauss)

Argand (1768-1822)
Cauchy (1789-1857)
Gauss (1777-1855)

On va voir que les nombres complexes servent en géométrie. Ce changement de cadre sera repris à la fin du chapitre et dans les chapitres ultérieurs sur les nombres complexes.

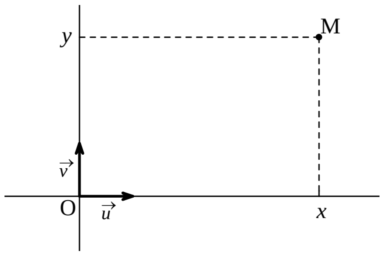
On sait que les réels peuvent être mis en correspondance avec les points d'une droite munie d'un repère (on parle de « droite réelle »). De même, les nombres complexes vont pouvoir être mis en correspondance avec les points du plan muni d'un repère.

1°) Définition

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

$\mathrm{M}(x\,;\,y)$ est un point quelconque du plan.

On appelle **affixe** de M le nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$.
Le point M est appelé l'**image** du nombre complexe z.



$z=x+\mathrm{i}y$ est l'affixe de M.

On observera sur le graphique l'absence de flèches au bout des axes. Le sens est donné par les vecteurs du repère. Il est donc inutile de rajouter des flèches au bout des axes.

2°) Notation

$\mathrm{M}(z)$ ou $\mathrm{M}(x+\mathrm{i}y)$
On lit le « point M d'affixe z ».

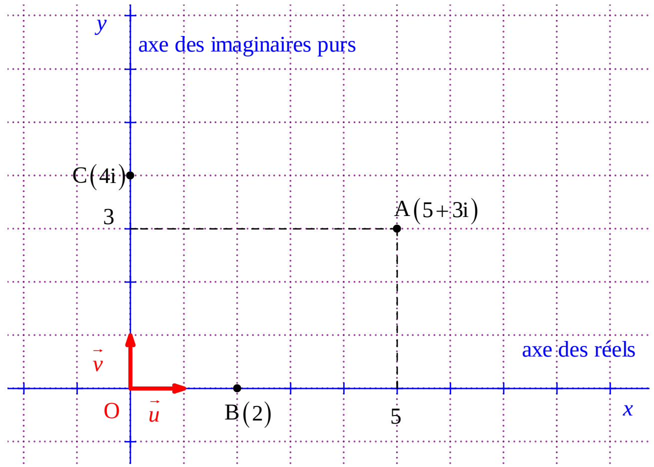
L'affixe d'un point M est souvent notée z_{M} (lettre z suivie du nom du point en indice).

3°) Exercice

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

Placer :
- le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}}=5+3\mathrm{i}$.
- le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}}=2$.
- le point C d'affixe $z_{\mathrm{C}}=4\mathrm{i}$.

A a pour affixe $5+3\mathrm{i}$ signifie que A a pour coordonnées $(5\,;3)$.



On peut écrire $\mathrm{A}(5+3\mathrm{i})$ ou $z_{\mathrm{A}}=5+3\mathrm{i}$.
Par contre, on n'écrit pas : $\mathrm{A}=5+3\mathrm{i}$.
Un point n'est pas égal à un nombre complexe.

On notera que le point O, origine du repère, a pour affixe 0.

4°) Vocabulaire

• Le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est appelé **plan complexe**.

• L'axe de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}\right)$ est appelé **l'axe des réels**.

• L'axe de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{v}\right)$ est appelé **l'axe des imaginaires purs**.

V. Calculs dans $\mathbb{C}$

Cauchy (1789-1857)

1°) Principe

On peut effectuer les mêmes opérations que dans $\mathbb{R}$ (addition, multiplication, division) avec les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$ (en particulier, tout nombre complexe non nul admet un inverse pour la multiplication).
On tiendra compte dans les calculs que $\mathrm{i}^2 = -1$.

2°) Exemples

Calculons (on pourra repasser les i en rouge dans chaque expression) :

$z_1 = (3+2\mathrm{i}) + (5-3\mathrm{i}) = 8-\mathrm{i}$ (on peut faire « tomber » les parenthèses)

$z_2 = (-3\mathrm{i})(-5\mathrm{i}) = 15\mathrm{i}^2 = -15$

$z_3 = (3+2\mathrm{i})(5-3\mathrm{i}) = 15-9\mathrm{i}+10\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2 = 15+\mathrm{i}-6\times(-1) = 21+\mathrm{i}$

$z_4 = (3+2\mathrm{i})^2 = 9+12\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2 = 5+12\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} z_5 &= \frac{1}{3+2\mathrm{i}} \\ &= \frac{1\times(3-2\mathrm{i})}{(3+2\mathrm{i})\times(3-2\mathrm{i})} \\ &= \frac{3-2\mathrm{i}}{9-4\mathrm{i}^2} \\ &= \frac{3-2\mathrm{i}}{9+4} \\ &= \frac{3-2\mathrm{i}}{13} \\ &= \frac{3}{13}-\frac{2}{13}\mathrm{i} \end{aligned}$$

N.B. : Une écriture algébrique ne doit pas contenir de i au dénominateur.

Bilan :

Les règles de calcul sont les mêmes que le calcul algébrique ; seule, la variable change *x* est i.

On peut vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice (Numworks, TI modèle TI 82 Stats ou TI-83 Plus, Casio) ou d'un logiciel de calcul formel sur ordinateur (cf. **3°)**).

3°) Utilisation de la calculatrice

La calculatrice permet de faire des calculs avec les nombres complexes.

• Sur calculatrice TI 82 Stats (pas les modèles TI 82 tout court) :

Pour calculer $(1+\mathrm{i})^2$, taper $\boxed{(}$ 1 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\bullet}$ $\boxed{)}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{entrer}}$.

On peut obtenir la forme algébrique d'un quotient avec des valeurs exactes il faut utiliser la commande frac.

Ainsi, pour $\frac{1+\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$, il est possible d'obtenir le résultat sous la forme $-\frac{1}{13}+\frac{5}{13}\mathrm{i}$.

• Sur calculatrice Casio Graph 35 +

$\boxed{\text{OPTN}}$ et $\boxed{\text{F2}}$ (CPLX)

4°) Quelques formules de calcul

$z = a+\mathrm{i}b$ $\left((a\,;b)\in\mathbb{R}^2\right)$
$z' = a'+\mathrm{i}b'$ $\left((a'\,;b')\in\mathbb{R}^2\right)$

Somme	$z+z' = (a+a')+\mathrm{i}(b+b')$
Produit	$zz' = (aa'-bb')+\mathrm{i}(ab'+a'b)$
Inverse $(z\neq 0)$	$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$

Égalités qui se déduisent des identités remarquables :

$(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2-b^2+2\mathrm{i}ab$
$(a-\mathrm{i}b)^2 = a^2-b^2-2\mathrm{i}ab$
$(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2$

On notera que dans $\mathbb{C}$, on peut factoriser une expression de la forme a^2+b^2eeee :
$a^2+b^2 = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)eeee$.

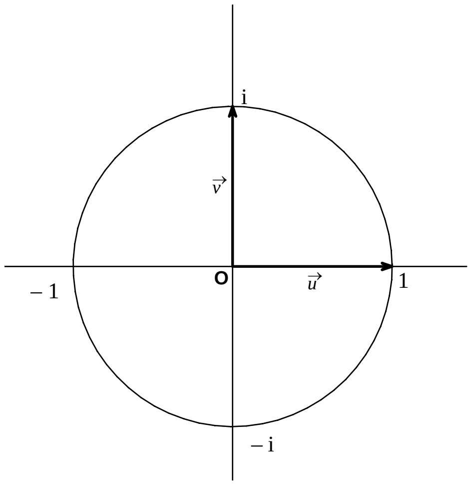
Calcul mental

Il est intéressant de s'entraîner à effectuer mentalement des calculs tels que $(1+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$, $(2+3\mathrm{i})^2$, $(1+3\mathrm{i})^2$...
Il est intéressant de s'entraîner à effectuer mentalement des calculs de produits de complexes (calcul raisonné ou réfléchi).

5°) Puissances de i

$\mathrm{i}^0=1$
$\mathrm{i}^1=\mathrm{i}$
$\mathrm{i}^2=-1$
$\mathrm{i}^3=\mathrm{i}\times(\mathrm{i}^2)=\mathrm{i}\times(-1)=-\mathrm{i}$
$\mathrm{i}^4=\mathrm{i}\times(\mathrm{i}^3)=\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})=1$
$\mathrm{i}^5=\mathrm{i}^4\times\mathrm{i}=\mathrm{i}$
$\mathrm{i}^6=\mathrm{i}^5\times\mathrm{i}=\mathrm{i}\times\mathrm{i}=-1$
$\mathrm{i}^7=\mathrm{i}^6\times\mathrm{i}=-\mathrm{i}$
$\mathrm{i}^8=\mathrm{i}^7\times\mathrm{i}=-\mathrm{i}\times\mathrm{i}=1$
$\mathrm{i}^9=\mathrm{i}^8\times\mathrm{i}=1\times\mathrm{i}=\mathrm{i}$

On observer une « cyclicité » d'ordre 4.



$\mathrm{i}^{2023}=?$

On effectue la division euclidienne de 2023 par 4.

2023	4
3	505

$2023=4\times505+3$

On a donc $\mathrm{i}^{2023}=-\mathrm{i}$.

On peut vérifier à l'aide de la calculatrice.

On peut observer l'analogie avec la trigonométrie.

Un résultat important :

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}}$$

Généralisation :

On veut calculer i^n où $n\in\mathbb{N}$.

• Si $n=4p$ avec $p\in\mathbb{N}$ alors $\mathrm{i}^n=\mathrm{i}^{4p}=\left(\mathrm{i}^4\right)^p=1^p=1$.

• Si $n=4p+1$ avec $p\in\mathbb{N}$, alors $\mathrm{i}^n=\mathrm{i}^{4p+1}=\mathrm{i}^{4p}\times\mathrm{i}=\mathrm{i}$.

• Si $n=4p+2$ avec $p\in\mathbb{N}$, alors $\mathrm{i}^n=\mathrm{i}^{4p+2}=\mathrm{i}^{4p}\times\mathrm{i}^2=-1$.

• Si $n=4p+3$ avec $p\in\mathbb{N}$, alors $\mathrm{i}^n=\mathrm{i}^{4p+3}=\mathrm{i}^{4p}\times\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$.

Le résultat reste valable pour $n\in\mathbb{Z}$.

6°) Règle du produit nul

On a la même règle que dans l'ensemble des réels.

Pour tous nombres complexes z et z', $zz'=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z'=0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

VI. Calcul littéral ; équations dans $\mathbb{C}$

1°) Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z+\mathrm{i}=\mathrm{i}z-1 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow 2z-\mathrm{i}z=-\mathrm{i}-1$$
$$\Leftrightarrow (2-\mathrm{i})z=-\mathrm{i}-1$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{-\mathrm{i}-1}{2-\mathrm{i}}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{(-\mathrm{i}-1)(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{-1-3\mathrm{i}}{5}$$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$$\boxed{S=\left\{\frac{-1-3\mathrm{i}}{5}\right\}}$$

On peut aussi écrire la solution sous la forme $-\dfrac{1+3\mathrm{i}}{5}$.

2°) Exemple 2

Factoriser z^2+1 dans $\mathbb{C}$.

Astuce : $1=-\mathrm{i}^2$.

$z^2+1=z^2-\mathrm{i}^2$ (identité remarquable)

$$\boxed{z^2+1=(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}$$

3°) Exemple 3

Pour tout nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ $\left((x\,;y)\in\mathbb{R}^2\right)$, on pose $Z=z^2-2z+3$.
Écrire Z sous forme algébrique en fonction de x et y.

$Z=z^2-2z+3$
$=(x+\mathrm{i}y)^2-2(x+\mathrm{i}y)+3$
$=x^2+2x\mathrm{i}y-y^2-2x-2\mathrm{i}y+3$

On regroupe les « i » et les « non i ».

$=\underbrace{x^2-y^2-2x+3}_{\in\mathbb{R}}+\mathrm{i}\,\underbrace{y(2x-2)}_{\in\mathbb{R}}$ (On n'est pas obligé de factoriser la partie imaginaire.)

On en déduit que :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{Re}\,Z=x^2-y^2-2x+3\\ \mathrm{Im}\,Z=y(2x-2)\end{array}}$$

On peut vérifier sur la calculatrice Numworks en remplaçant x par π et y par e.

4°) Exemple 4 (très important)

Pour tout nombre complexe $z\neq 2\mathrm{i}$, on pose $Z=\dfrac{z-3}{z-2\mathrm{i}}$.
On pose $z=x+\mathrm{i}y$, x et y étant deux réels tels que $(x\,;y)\neq(0\,;2)$.
Exprimer $\mathrm{Re}\,Z$ et $\mathrm{Im}\,Z$ en fonction de x et de y.

1ère étape : On écrit le numérateur et le dénominateur **sous forme algébrique**.

$Z=\dfrac{(x+\mathrm{i}y)-3}{(x+\mathrm{i}y)-2\mathrm{i}}$

$=\dfrac{(x-3)+\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}(y-2)}$ (forme algébrique : expression de la forme $a+\mathrm{i}b$ où a et b sont deux réels)

2e étape : On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.

$=\dfrac{\left[(x-3)+\mathrm{i}y\right]\left[x-\mathrm{i}(y-2)\right]}{\left[x+\mathrm{i}(y-2)\right]\left[x-\mathrm{i}(y-2)\right]}$

3e étape : On effectue intelligemment les calculs au numérateur et au dénominateur.

$=\dfrac{(x-3)\times x-y\left[-(y-2)\right]+\mathrm{i}\left[(x-3)\times\left[-(y-2)\right]+yx\right]}{x^2+(y-2)^2}$

développement à 4 facteurs

$(a+\mathrm{i}b)(a'+\mathrm{i}b')=(aa'-bb')+\mathrm{i}(ab'+a'b)$

identité remarquable : $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)=a^2+b^2$

$=\dfrac{x^2+y^2-3x-2y+\mathrm{i}(2x+3y-6)}{x^2+(y-2)^2}$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{Re}\,Z=\frac{x^2+y^2-3x-2y}{x^2+(y-2)^2}}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\,Z=\frac{2x+3y-6}{x^2+(y-2)^2}}$$

VII. Conjugué d'un nombre complexe

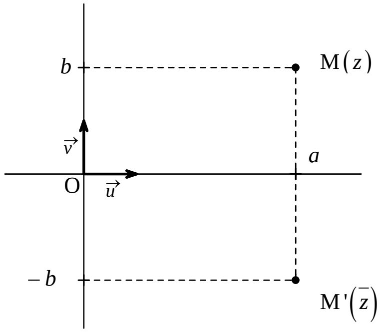
1°) Définition [conjugué d'un nombre complexe]

Le **conjugué** d'un nombre complexe $z=a+\mathrm{i}b$ avec $(a\,;b)\in\mathbb{R}^2$ est le nombre complexe $\overline{z}=a-\mathrm{i}b$.

Commentaire :

La notation avec une barre ne prête pas à confusion avec celles employées dans d'autres domaines (en numération pour écrire un entier naturel dans une base ; en probabilités pour désigner un événement contraire ; en statistique pour désigner la moyenne d'une série ; en géométrie pour écrire une mesure algébrique).

2°) Image dans le plan complexe



$M' = S_{(Ox)}(M)$

> L'image de $\bar{z}$ dans le plan complexe est le symétrique de l'image de z par rapport à l'axe des réels.

C'est une image mentale fondamentale à retenir.

°) Propriété immédiate : conjugué d'un conjugué

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \bar{\bar{z}} = z$

Conséquence [équivalence fondamentale pour deux nombres complexes z et z'] **:**

$z = z' \Leftrightarrow \bar{z} = \overline{z'}$

4°) Exemples

$\overline{3+\mathrm{i}} = 3-\mathrm{i}$

$\overline{1-2\mathrm{i}} = 1+2\mathrm{i}$

$\overline{5\mathrm{i}} = -5\mathrm{i}$

$\overline{7} = 7$

> Le mot conjugué s'emploie dans les deux situations suivantes :
>
> - $2-3\mathrm{i}$ est le conjugué de $2+3\mathrm{i}$
> - $2-3\mathrm{i}$ et $2+3\mathrm{i}$ sont deux nombres complexes conjugués.

5°) Conjugué d'une somme

• Propriété

> $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
> Le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués.

• Démonstration (ROC)

$z = a + \mathrm{i}b \quad ((a\,;b) \in \mathbb{R}^2)$

$z' = a' + \mathrm{i}b' \quad ((a'\,;b') \in \mathbb{R}^2)$

On a : $z + z' = (a+a') + \mathrm{i}(b+b')$.

Par suite,

$$\begin{aligned}\overline{z+z'} &= (a+a') - \mathrm{i}(b+b') \\ &= (a - \mathrm{i}b) + (a' - \mathrm{i}b') \\ &= \bar{z} + \overline{z'}\end{aligned}$$

• Conjugué d'une différence

On démontre de même que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \overline{z-z'} = \bar{z} - \overline{z'}$. On pourra utiliser directement cette propriété sans démonstration.

6°) Conjugué d'un produit

• Propriété

> $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \overline{zz'} = \bar{z} \times \overline{z'}$
> Le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués.

• Démonstration (ROC)

On pose $z = a + \mathrm{i}b \quad ((a\,;b) \in \mathbb{R}^2)$ et $z' = a' + \mathrm{i}b' \quad ((a'\,;b') \in \mathbb{R}^2)$.

On a : $zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b)$.

Donc $\overline{zz'} = (aa' - bb') - \mathrm{i}(ab' + a'b)$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\bar{z} \times \overline{z'} &= (a - \mathrm{i}b)(a' - \mathrm{i}b') \\ &= (aa' - bb') - \mathrm{i}(ab' + a'b)\end{aligned}$$

On en déduit que $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

• Généralisation

Le conjugué d'un produit d'un nombre quelconque de facteurs est égal au produit des conjugués.

7°) Conjugué d'une puissance

• Propriété

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$$

• Démonstration (ROC)

$$z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}_{n \text{ facteurs}}$$

On applique le résultat sur le produit.

$$\begin{aligned} \overline{z^n} &= \overline{z \times z \times \ldots \times z} \\ &= \overline{z} \times \overline{z} \times \ldots \times \overline{z} \\ &= \left(\overline{z}\right)^n \end{aligned}$$

8°) Conjugué d'un inverse

• Propriété

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

• Démonstration (ROC)

On a : $z \times \dfrac{1}{z} = 1$.

Donc $\overline{z \times \dfrac{1}{z}} = \overline{1}$.

La propriété du produit permet d'écrire :

$$\overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1$$

$z \neq 0$ donc $\overline{z} \neq 0$

$$\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}}$$

9°) Conjugué d'un quotient

• Propriété

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

• Démonstration (ROC)

On a : $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.

Par conséquent,

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}}$$

$= \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}$ (propriété du conjugué d'un produit ; les parenthèses autour de $\dfrac{1}{z'}$ ne sont pas forcément utiles)

$= \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z'}}$ (propriété du conjugué d'un inverse)

$$= \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

10°) Expressions des parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe à l'aide du conjugué

• Propriété

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \begin{cases} \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \\ \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2\text{i}} \end{cases}$$

Dans la deuxième formule, on ne s'étonnera pas de la présence du i au dénominateur (bien que l'on ait dit qu'une partie imaginaire ne contient pas de i). La réponse est donnée dans la démonstration.

• Démonstration (ROC)

On pose : $z = a + \text{i}b$ ($(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$).

On a alors : $\overline{z} = a - \text{i}b$.

$z + \overline{z} = 2a$ donc $a = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

$z - \overline{z} = 2\text{i}b$ donc $b = \dfrac{z - \overline{z}}{2\text{i}}$

• Utilisation

Ces formules ont surtout un intérêt théorique. Elles sont utilisées dans la démonstration de la propriété énoncée dans le paragraphe suivant.

11°) Caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide du conjugué

• Propriété

$z \in \mathbb{C}$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$$

$$z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$$

• Démonstration (ROC)

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} = 0 \\ &\Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{z} = z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{z + \overline{z}}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{z} = -z \end{aligned}$$

• Utilisation

On se sert de cette propriété pour démontrer dans certains cas (abstraits) qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur (voir exercices).
Pour démontrer qu'un nombre complexe est un réel, il suffit de calculer son conjugué et de démontrer qu'il est égal au nombre de départ.
Pour démontrer qu'un nombre complexe est un imaginaire pur, il suffit de calculer son conjugué et de démontrer qu'il est égal à l'opposé du nombre de départ.

12°) Récapitulatif sur les conjugués

$$z = a + \mathrm{i}b \quad \left(\left(a\,;b\right) \in \mathbb{R}^2\right)$$

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b$$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

$$\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \\ \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} \end{cases}$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$$

$$z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$$

Sur calculatrice TI-83 Premium CE :

math CMPLX
1 : conj(
2 : réel(
3 : imag(

VIII. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1°) Exemple : nombres complexes de carré donné

• **(Cas particulier)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -9 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow z^2+9=0\\ &\Leftrightarrow z^2-(3\mathrm{i})^2=0\\ &\Leftrightarrow (z-3\mathrm{i})(z+3\mathrm{i})=0 \quad \text{(équation produit nul ; on applique la règle du produit nul)}\\ &\Leftrightarrow z=3\mathrm{i} \text{ ou } z=-3\mathrm{i}\end{aligned}$$

Les solutions de (1) dans $\mathbb{C}$ sont 3i et – 3i.

• **(Cas général)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = a$ (a réel fixé).

1^er^ cas : $\boxed{a>0}$	**2^e^ cas :** $\boxed{a=0}$	**3^e^ cas :** $\boxed{a<0}$
$S_{\mathbb{C}}=\left\{\sqrt{a}\,;-\sqrt{a}\right\}$	$S_{\mathbb{C}}=\{0\}$	$S_{\mathbb{C}}=\left\{\mathrm{i}\sqrt{-a}\,;-\mathrm{i}\sqrt{-a}\right\}$ N.B. : $-a>0$

1^er^ cas : 2 solutions réelles distinctes opposés.
3^e^ cas : 2 solutions imaginaires pures distinctes (opposées et conjuguées).

• **Mise en application directe :**

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -4$ sont 2i et – 2i.
On écrit cela directement sans passer par l'étape d'écriture avec des racines carrées.

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -1$ sont i et – i.
On écrit cela directement sans passer par l'étape d'écriture avec des racines carrées.

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -3$ sont $\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

• **Utilisation (exemple fondamental) :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^2 = -4$.

On ne développe pas.

2°) Démonstration dans le cas général

a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2+bz+c=0$ (E).

$$\begin{aligned}\text{(E)} &\Leftrightarrow a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=0 \qquad : a \;\; (a\neq 0)\\ &\Leftrightarrow z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0\\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0\\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0\end{aligned}$$

On pose : $\Delta = b^2-4ac$.

$$\begin{aligned}\text{(E)} &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0\\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\end{aligned}$$

L'hypothèse « a, b, c réels » entre en scène à partir de maintenant.

En effet, on peut dire que $\Delta \in \mathbb{R}$ et, partant, que $\dfrac{\Delta}{4a^2} \in \mathbb{R}$.

On se raccroche au paragraphe **1°)**.

<u>1^er^ cas :</u> $\boxed{\Delta > 0}$

$$\text{(E)} \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\\ \text{ou}\\ z+\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ \text{ou}\\ z=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$$

2^e cas : $\boxed{\Delta = 0}$

$$\text{(E)} \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=0$$

$$\Leftrightarrow z=-\frac{b}{2a}$$

3^e cas : $\boxed{\Delta < 0}$

$$\text{(E)} \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ z+\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ z=\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Il est important de retenir la **forme canonique** d'un polynôme du second degré dans le cas général :

$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \quad az^2+bz+c=a\left[\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]}$ ou encore $\forall z \in \mathbb{C} \quad az^2+bz+c=a\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$.

Définition [racine d'un polynôme] : voir paragraphe sur les polynômes complexes

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients complexes de degré quelconque.
On dit qu'un nombre complexe α est une racine de $P(z)$ pour exprimer que $P(\alpha)=0$.

3°) Règle

$az^2+bz+c=0 \quad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a\neq 0$

$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

1^er cas : $\boxed{\Delta>0}$ L'équation admet 2 racines réelles distinctes : $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2^e cas : $\boxed{\Delta=0}$ L'équation admet 1 racine réelle double : $z_0=-\dfrac{b}{2a}$.

3^e cas : $\boxed{\Delta<0}$ L'équation admet 2 racines complexes distinctes : $z_1=\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Ces deux racines sont conjuguées.

Ces formules restent valables dans le cas où *a*, *b*, *c* sont des complexes tels que $\Delta\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$.

4°) Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$.

Considérons le polynôme z^2+z+1.

Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=1$; $c=1$

Calcul du discriminant

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 1^2-4\times1\times1\\ &= -3\end{aligned}$$

On a : $\Delta<0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$$z_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad z_2=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_1=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \qquad z_2=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

Soit *S* l'ensemble des solutions de l'équation.

$$\boxed{S=\left\{\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

5°) Factorisation d'un polynôme du second degré

$f(z)=az^2+bz+c \quad \left((a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a\neq 0\right)$
On note z_1 et z_2 les racines distinctes ou confondues.
$\forall z\in\mathbb{C} \quad f(z)=a(z-z_1)(z-z_2)$

6°) Somme et produit des racines

$$z_1+z_2=-\frac{b}{a}$$
$$z_1z_2=\frac{c}{a}$$

7°) Complément : discriminant réduit

$az^2+bz+c\neq 0 \quad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a\neq 0$
On pose $b=2b'$.

$\boxed{\Delta'=b'^2-ac}$ (formule du discriminant réduit)

1er cas : $\boxed{\Delta'>0}$ L'équation admet 2 racines réelles distinctes : $z_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $z_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

2e cas : $\boxed{\Delta'=0}$ L'équation admet 1 racine réelle double : $z_0=-\dfrac{b'}{a}$.

3e cas : $\boxed{\Delta'<0}$ L'équation admet 2 racines complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-b'-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$ et $z_2=\dfrac{-b'+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$.

On utilise ces formules lorsque *b* est un entier pair ; on obtient alors les expressions des solutions déjà simplifiées.

8°) Utilisation d'outils de calculs

● Sur calculatrice, utilisation d'un programme ou du solveur d'équations (calculatrice TI 83 Premium CE, calculatrices Casio, calculatrices faisant du calcul formel).
Attention, dans le cas d'un programme sur calculatrice, les solutions peuvent être données sous forme de valeurs approchées et non en valeurs exactes.
Les calculatrices possédant un « bon » solveur d'équations donnent les solutions en valeurs exactes à l'aide de radicaux.
Pour la calculatrice TI-83 Premium CE, touche $\boxed{\text{résol}}$ puis choix PlySmlt2.

Programme sur calculatrice

Modifier le programme de 1ère afin de tenir compte du cas $\Delta<0$ (avec i).

● Sur logiciel de calcul formel en mode complexe.

9°) Complément sur somme et produit des racines : recherche de deux nombres connaissant la somme et le produit

● Étude de la condition nécessaire

a et *b* sont deux complexes.

a et *b* sont solutions de l'équation $(z-a)(z-b)=0$

$z^2-az-bz+ab=0$ (on développe)

$z^2-\underbrace{(a+b)}_{S}z+\underbrace{ab}_{P}=0$ (on réduit)

Identité à connaître par cœur :

$(z-a)(z-b)=z^2-Sz+P$ où *S* est la somme de *a* et *b* et *P* leur produit.

Conclusion :

a et *b* sont solutions de l'équation $z^2-Sz+P=0$ d'inconnue *z* avec $S=a+b$ et $P=ab$.

Il s'agit d'une équation du second degré <u>à coefficients complexes</u> (car *S* et *P* sont des complexes).

● Étude de la condition suffisante

Si deux nombres sont solutions de l'équation $z^2-Sz+P=0$, alors leur somme est égale à $-\dfrac{-S}{1}=S$ (le 1 au dénominateur correspond au coefficient de z^2) et leur produit est égal à $\dfrac{P}{1}=P$.

10°) Retour sur l'équation $z^2=a$ avec a réel (reprise du 1°))

● On n'utilise pas le discriminant pour résoudre cette équation.

● Les solutions sont appelées « racines carrées complexes » de *a*. On n'utilise cependant pas la notation sous forme de radical. Nous y reviendrons dans le paragraphe **XI**.

IX. Premières applications géométriques des nombres complexes

1°) Remarque préliminaire

Dans tout le paragraphe, on se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Il est intéressant de souligner le changement de cadre déjà abordé au début du chapitre.
On va utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie.

2°) Définition de l'affixe d'un vecteur

À tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées cartésiennes $(x\,;\,y)$ on fait correspondre son affixe $z_{\vec{w}} = x + \mathrm{i}y$.

$\vec{w}(x\,;\,y) \Leftrightarrow \vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

3°) Propriété 1 : égalité de 2 vecteurs

$\vec{w}$ et $\vec{w}\,'$ sont deux vecteurs quelconques.

$\vec{w} = \vec{w}\,' \Leftrightarrow z_{\vec{w}} = z_{\vec{w}'}$

4°) Propriété 2 : affixe d'un vecteur défini par deux points

• Énoncé

$\mathrm{A}(z_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(z_{\mathrm{B}})$ sont deux points quelconques de *P*.
Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$.
$z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$

• Démonstration

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left|\begin{array}{l} x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} &= x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} + \mathrm{i}y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} \\ &= (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) + \mathrm{i}(y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}) \\ &= (x_{\mathrm{B}} + \mathrm{i}y_{\mathrm{B}}) - (x_{\mathrm{A}} + \mathrm{i}y_{\mathrm{A}}) \\ &= z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

• Exemple

$\mathrm{A}(2+3\mathrm{i})$ $\quad$ $\mathrm{B}(4+\mathrm{i})$

Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} &= z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \\ &= 4 + \mathrm{i} - (2 + 3\mathrm{i}) \\ &= 2 - 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(2-2\mathrm{i})$

On écrit $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = \ldots.$.
On se garde bien d'écrire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \ldots.$.
Un vecteur n'est pas égal à un complexe.
On travaille avec des affixes des points ; on ne repasse pas aux coordonnées.
Le but du paragraphe est d'apprendre à travailler avec des affixes.

Le 1-12-2022

T exp $\quad z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ $\quad$ notation conventionnelle

Le 25-12-2022

T exp $\quad z_{\vec{u}}$ $\quad$ notation conventionnelle

5°) Propriété 3 : règles de calcul sur les affixes

• Énoncé

$\vec{w}(z)$ et $\vec{w}\,'(z')$ sont deux vecteurs quelconques.
$\lambda \in \mathbb{R}$
Le vecteur $\vec{w} + \vec{w}\,'$ a pour affixe $z + z'$.
Le vecteur $\lambda\vec{w}$ a pour affixe λz.

$z_{\vec{w}+\vec{w}'} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}$
$z_{\lambda\vec{w}} = \lambda z_{\vec{w}}$

• **Démonstration**

Très facile, non faite ici.

6°) Propriété 4 : affixe du milieu d'un segment

• **Énoncé**

$A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points quelconques de *P*.

Le milieu M du segment [AB] a pour affixe $z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

• **Démonstration**

M milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow z_A - z_M + z_B - z_M = 0$

$\Leftrightarrow z_A + z_B - 2z_M = 0$

$\Leftrightarrow z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

7°) Propriété 5 : affixe d'un barycentre

• **Énoncé**

$A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points quelconques de *P*.
a et *b* sont deux réels tels que $a + b \neq 0$.
Le barycentre G des points pondérés (A ; *a*) et (B ; *b*) a pour affixe $z_G = \dfrac{az_A + bz_B}{a+b}$.

• **Démonstration**

G barycentre des points pondérés (A ; *a*) et (B ; *b*) $\Leftrightarrow a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow a(z_A - z_G) + b(z_B - z_G) = 0$

$\Leftrightarrow az_A - az_G + bz_B - bz_G = 0$

$\Leftrightarrow az_A + bz_B = (a+b)z_G$

$\Leftrightarrow z_G = \dfrac{az_A + bz_B}{a+b}$

• **Généralisation**

- Pour trois points

G : (A ; *a*), (B ; *b*), (C ; *c*) $\quad (a+b+c \neq 0)$

$z_G = \dfrac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}$

- Pour *n* points

G : $(A_1 ; a_1), (A_2 ; a_2), \ldots, (A_n ; a_n) \quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0\right)$)

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i z_{A_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}$$

X. Applications du plan complexe dans lui-même

On se place dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) Définition

Une **application** du plan complexe est une « fonction » de *P* (ou d'une partie de *P*) dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe un point $M'(z')$.

Lorsque *f* est une bijection de *P* dans lui-même (c'est-à-dire si tout point du plan admet un unique antécédent par *f*), on dit que *f* est une **transformation** du plan complexe.

2°) Exemple

$$\begin{array}{rcl} f : \; P & \longrightarrow & P \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \text{ avec } z' = z^2 \end{array}$$

Déterminer les affixes des images de $A(3)$ et $B(1+i)$.

$z_{A'} = (z_A)^2 = 3^2 = 9$ donc $A'(9)$

$z_{B'} = (z_B)^2 = (1+i)^2 = 2i$ donc $B'(2i)$

3°) Vocabulaire

• $\mathrm{M'}$ est appelé l'**image** de M par *f*. On écrit $f(\mathrm{M})=\mathrm{M'}$.

• L'expression de z' en fonction de *z* est appelée l'« **expression complexe** » de *f*.

• Les **antécédents** d'un point A par *f* sont les points qui ont pour image A par *f*.

• On dit qu'un point M du plan est **invariant** par *f* lorsque $\mathrm{M'}=\mathrm{M}$ c'est-à-dire $f(\mathrm{M})=\mathrm{M}$ (M est confondu avec son image par *f*).

On appelle point invariant un point confondu avec son image.

Pour déterminer les points invariants d'une application *f*, on doit résoudre l'équation $z'=z$.

Exemple :

Pour l'application *f* donnée dans le paragraphe 2°), les points invariants sont les points d'affixes 0 et 1 (solutions de l'équation $z^2=z$).

3°) Applications importantes du plan complexe

• L'application $\mathrm{M}(z)\mapsto\mathrm{M'}(\overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des réels.

• L'application $\mathrm{M}(z)\mapsto\mathrm{M'}(-z)$ est la symétrie centrale par rapport à l'origine du repère.

• L'application $\mathrm{M}(z)\mapsto\mathrm{M'}(-\overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

• L'application $\mathrm{M}(z)\mapsto\mathrm{M'}(\mathrm{Re}\,z)$ est la projection orthogonale sur l'axe des réels.

• L'application $\mathrm{M}(z)\mapsto\mathrm{M'}(\mathrm{Im}\,z)$ est la projection orthogonale sur l'axe des images.

• L'application $\mathrm{M}(z)\mapsto\mathrm{M'}(\mathrm{i}z)$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (quart de tour direct de centre O).

Homothétie

Une homothétie est une transformation du plan définie par un point O (centre) et un réel *k* non nul appelé rapport.
Il s'agit de la transformation qui à tout point M du plan fait correspondre le point $\mathrm{M'}$ défini par $\overrightarrow{\mathrm{OM'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

Du point de vue complexe, si O désigne l'origine du repère, l'homothétie de centre O et de rapport *k* se traduit par : $z'=kz$.

L'inversion plane

On se place dans le plan *P*.

Définition :

Soit O un point fixé du plan *P*.
On note $P^*=P\setminus\{\mathrm{O}\}$ (on parle de plan épointé).
On appelle inversion plane de pôle O et de puissance 1 l'application qui à tout point M de P^* associe le point $\mathrm{M'}$ de *P* tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM'}}=\dfrac{1}{\mathrm{OM}^2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

$\mathrm{M'}$ appartient à la demi droite $[\mathrm{OM})$ et $\mathrm{OM'}=\dfrac{1}{\mathrm{OM}}$.

figure

On a $\mathrm{OM'}=\dfrac{1}{\mathrm{OM}}$.
Cette égalité explique le nom d'inversion pour désigner l'application.
La distance $\mathrm{OM'}$ est l'inverse de la distance OM.

Définition :

Soit O un point fixé du plan *P*.
Soit *k* un réel strictement positif.
On note $P^*=P\setminus\{\mathrm{O}\}$ (on parle de plan épointé).
On appelle inversion plane de pôle O et de puissance *k* l'application qui à tout point M de P^* associe le point $\mathrm{M'}$ de *P* tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM'}}=\dfrac{k}{\mathrm{OM}^2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

$\mathrm{M'}$ appartient à la demi droite $[\mathrm{OM})$ et $\mathrm{OM'}=\dfrac{k}{\mathrm{OM}}$.

Plus généralement, pour *k* réel strictement positif, on définit l'inversion de centre O et de puissance *k* par $\overrightarrow{\mathrm{OM'}}=\dfrac{1}{\mathrm{OM}^2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

L'inversion plane de pôle O et de puissance *k* est notée $\mathrm{Inv}_{(\mathrm{O},\,k)}$.

L'inversion possède des propriétés intéressantes :
L'image d'une droite passant par O, privée du point O, est elle-même.
L'image d'un cercle passant par O, privé du point O, est une droite.

Cette dernière propriété permet de démontrer une célèbre relation métrique dans le cercle, appelée relation de Ptolémée.

Propriété :

Dans le plan complexe dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, l'inversion plane de pôle O et de puissance 1 est définie par l'expression complexe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$.

Plus généralement, pour k réel strictement positif, l'inversion plane de pôle O et de puissance k est définie par l'expression complexe $z' = \frac{k}{\bar{z}}$.

XI. Racines carrées et nombres complexes

1°) Utilisation de la calculatrice

Sur les calculatrices modèles TI, on peut obtenir un nombre complexe dont le carré est égal à un nombre complexe donné.
Par exemple, si on tape sur la touche racine carrée puis $3+4\mathrm{i}$, on obtient $2+\mathrm{i}$.
Cela signifie que $2+\mathrm{i}$ au carré est égal à $3+4\mathrm{i}$. On peut vérifier ce résultat par un calcul immédiat.
On dit que $2+\mathrm{i}$ est *une* (l'article est fondamental) racine carrée complexes du nombre $3+4\mathrm{i}$.

On retiendra que : $(2+\mathrm{i})^2 = 3+4\mathrm{i}$ donc $2+\mathrm{i}$ est *une* racine carrée du nombre complexe $3+4\mathrm{i}$.

2°) Mise en garde sur la notation

On n'emploie pas l'écriture avec le symbole radical. On n'écrit pas $\sqrt{3+4\mathrm{i}} = 2+\mathrm{i}$.

L'explication est donnée dans le paragraphe suivant.

3°) Résultat admis sans démonstration

Nous admettrons que tout nombre complexe admet deux racines complexes opposées.

Ce résultat explique le pluriel employé dans le titre ainsi que le fait que le symbole de racine carrée ne s'emploie pas pour un nombre complexe.

4°) Détermination des racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique

La méthode pour calculer « à la main » les racines carrées complexes sera étudiée dans le supérieur.

Nous ne les utiliserons pas cette année.
Les racines carrées de nombres complexes sont hors programme, mais il est bon d'avoir quelques connaissances dessus pour ne pas commettre de bourdes.
Les racines carrées de nombres complexes sont utilisées dans la résolution des équations du second degré à coefficients complexes.

XII. Fonctions polynômes complexes

Les notions sur les fonctions polynômes complexes sont les mêmes que pour les fonctions polynômes réelles.

1°) Définition

Une **fonction polynôme** est une fonction f vérifiant les deux conditions :
C_1 : $\mathcal{D}_f = \mathbb{C}$;
C_2 : il existe des nombres complexes a_0, a_1, … a_n avec $a_n \neq 0$ tels que
$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.

Rappels :
$z^1 = z$
$z^0 = 1$

2°) Vocabulaire

- L'expression $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ est appelée **polynôme en *z***.
- z est la **variable** du polynôme.
- Les nombres complexes a_0, a_1, … a_n sont appelés les **coefficients du polynôme** (a_k : coefficient de z^k).

Nous admettrons que l'écriture développée réduite est unique donc que les coefficients du polynôme sont uniques.
- Lorsque tous les coefficients ne sont pas nuls, l'exposant le plus élevé n est le **degré du polynôme**. On écrit $\deg\left[f(z)\right] = n$.
- Les expressions $a_n z^n$, $a_{n-1} z^{n-1}$, …, $a_1 z$, a_0 sont appelées **monômes** du polynôme (ce sont des monômes en z sauf le monôme a_0 qui est un monôme constant).

On peut utiliser le symbole Σ : $f(z) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k z^k$.

3°) Exemple

$f(z) = 5z^4 - 2\mathrm{i}z^3 + z^2 + 3z - 1 + 2\mathrm{i}$

Les coefficients du polynôme sont $a_4 = 5$, $a_3 = -2\mathrm{i}$, $a_2 = 1$, $a_1 = 3$, $a_0 = -1+2\mathrm{i}$.
On a $\deg\left[f(z)\right] = 4$.

4°) Propriété du conjugué

On reprend les notations de la définition. On fait l'hypothèse que tous les coefficients a_0, a_1, … a_n sont des réels.

On a : $\forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

La démonstration est facile.
On utilise les propriétés du conjugué.

5°) Polynômes bicarrés

Définition :

On appelle polynôme bicarré à coefficients complexe tout polynôme de la forme az^4+bz^2+c où a, b, c sont des nombres complexes tels que a soit non nul.

6°) Racines (ou zéros) d'un polynôme complexe

Définition :

Même définition que pour les polynômes réels.

XIII. Nombres complexes en Python

1°) Écriture d'un nombre complexe

On utilise la commande Python `complex` pour définir un nombre complexe.
Cette commande est naturellement présente un Python. Il n'est pas nécessaire d'importer un module particulier.
Python utilise la lettre `j` pour désigner le nombre complexe i comme, par exemple, dans l'affichage ci-dessous.

Exemple :

```
z=complex(3,-4)
print(z)
```

On obtient l'affichage : `3-4j`.

2°) Trois fonctions à connaître

- `z.real` donne la partie réelle de z.
- `z.imag` donne la partie imaginaire de z.
- `z.conjugate()` donne le conjugué de z.

Il y a bien des parenthèses après conjugate (et pas après real et imag).

3°) Opérations sur les nombres complexes

Exemple :

`(1+1j)*(1-2j)` donne `(3-1j)`.