$1^{\text{ère}}$ S1 **Devoir pour le jeudi 13 septembre 2012**

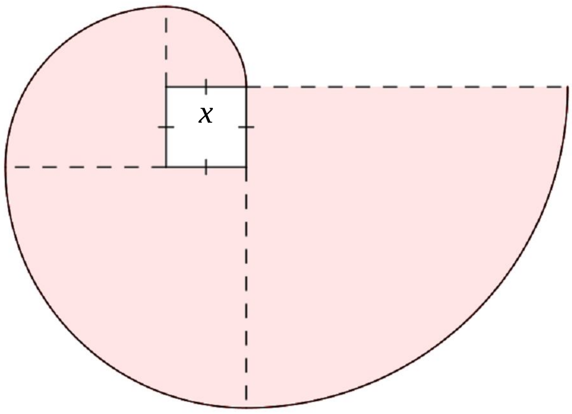
I. Une unité de longueur est fixée dans tout l'exercice.

Le carré sur la figure ci-dessous a pour côté x ($x > 0$).
La spirale est constituée de quarts de cercles ayant pour centres les sommets du carré.

On ne demande pas de refaire la figure sur la copie.

1°) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine colorié en fonction de x (donner le résultat sous forme simplifiée).

2°) Déterminer la valeur arrondie au millième de $\mathcal{A}$ lorsque $x = 2$.



II. Soit ABCD un quadrilatère quelconque du plan.

Comparer AC + BD au périmètre du quadrilatère.

Indication : appliquer l'inégalité triangulaire aux triangles ABC, ACD, ABD et BCD.

Conseils

Le devoir tout entier doit tenir sur une copie simple.
Cette contrainte est imposée pour favoriser la concision.

On prendra soin de bien mettre en évidence tous les résultats en les encadrant e rouge à la règle.

I. Lire fiche sur les valeurs approchées en mathématiques

Pour cet exercice, seront jugés la présentation des calculs, la rigueur dans les notations.

On pose directement les calculs sans démontrer d'alignement de points.
Il n'y a pas besoin de refaire la figure ni de nommer des points.

II.

Lire les fiches sur :

- l'inégalité triangulaire ;

- les inégalités.

Lire l'article « quadrilatère » sur Wikipedia.

Faire attention aux notations en géométrie (longueurs, segments).

Corrigé

I. Calcul littéral dan un cadre géométrique ; valeur approchée-valeur exacte

1°) Exprimons l'aire $\boldsymbol{A}$ du domaine colorié en fonction de x.

La spirale est constitué de 4 quarts de cercles ont pour rayons x, $2x$, $3x$, $4x$.
Le domaine colorié est donc composé de quatre quarts de disques de rayons x, $2x$, $3x$, $4x$.

Il n'y a pas besoin d'expliquer ce point. La démonstration est quasiment évidente.

L'aire d'un disque de rayon R est égale à πR^2.
Attention à bien faire la différence entre un cercle et un disque et donc à ne pas parler de « l'aire d'un cercle » mais de « l'aire d'un disque ».

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \frac{\pi\times x^2}{4}+\frac{\pi\times(2x)^2}{4}+\frac{\pi\times(3x)^2}{4}+\frac{\pi\times(4x)^2}{4}\\
&= \frac{\pi\times x^2}{4}+\frac{\pi\times 4x^2}{4}+\frac{\pi\times 9x^2}{4}+\frac{\pi\times 16x^2}{4}\\
&= \frac{\pi\times\left(x^2+4x^2+9x^2+16x^2\right)}{4}\\
&= \frac{\pi\times 30x^2}{4}\\
&= \frac{15\pi x^2}{2}
\end{aligned}$$

2°) Déterminons la valeur arrondie au millième de $\boldsymbol{A}$ lorsque $x = 2$.

Pour $x = 2$,
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \frac{15\pi\times 2^2}{4}\\
&= \frac{15\pi\times 4}{2}\\
&= 30\pi \quad \text{(valeur exacte)}
\end{aligned}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient $\boldsymbol{A} = 94{,}24777\ldots$

On utilise la touche π de la calculatrice.
On écrit toutes les décimales sauf la dernière dont on n'est pas sûr qu'elle soit exacte.
On écrit des petits points car l'écriture décimale est illimitée.

Donc $\boldsymbol{A} \approx 94{,}248$ (valeur arrondie au millième)

La valeur arrondie au millième de $\boldsymbol{A}$ est égale à 94,248.

On observera bien l'utilisation des symboles = et ≈.

II. Démonstration d'une inégalité géométrique

Objectifs de cet exercice :

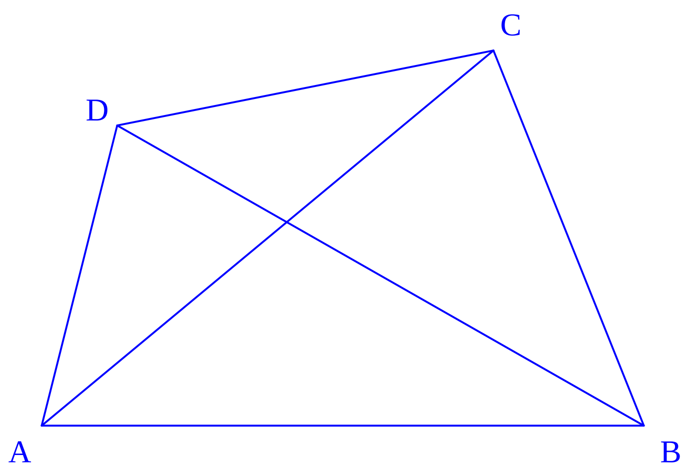
- revoir l'inégalité triangulaire ;
- revoir les règles sur les inégalités ;
- revoir les notations en géométrie (segments, longueurs).

ABCD quadrilatère quelconque du plan

Comparons AC + BD au périmètre du quadrilatère ABCD.

Il peut être intéressant avant de commencer à chercher de faire une figure dynamique en utilisant un logiciel de géométrie (par exemple *Geogebra*) de telle sorte que l'on puisse faire « bouger » les points A, B, C, D.
On demander d'afficher la somme AC + BD et le périmètre.
En effectuant plusieurs essais, on constate que la somme AC + BD est toujours inférieure ou égale au périmètre de ABCD.
Pa commodité, on peut simplement prendre le quadrilatère ABCD convexe et non croisé.

Le périmètre du quadrilatère ABCD est égal à : AB + BC + CD + DA.



L'énoncé dit que ABCD est un quadrilatère quelconque.
La figure ne doit donc pas représenter un quadrilatère particulier (trapèze, parallélogramme…).

L'inégalité triangulaire appliquée au triangle ABC permet d'écrire AC $\leqslant$ AB + BC (1).

L'inégalité triangulaire appliquée au triangle ACD permet d'écrire AC $\leqslant$ AD + DC (2).

L'inégalité triangulaire appliquée au triangle ABD permet d'écrire BD $\leqslant$ BA + AD (3).

L'inégalité triangulaire appliquée au triangle BCD permet d'écrire BD $\leqslant$ BC + CD (4).

On peut additionner membre les inégalités (1), (2), (3), (4) car elles sont toutes de même sens.

On obtient alors 2AC + 2BD $\leqslant$ 2(AB + BC + CD + DA).

On peut diviser par 2 les deux membres de cette inégalité sans changer le sens car 2 > 0.

Donc AC + BD $\leqslant$ AB + BC + CD + DA.

Ainsi, on a démontré que **AC + BD est inférieure ou égale au périmètre de ABCD**.

On peut énoncer ainsi la propriété que l'on vient de démontrer :

La somme des longueurs des diagonales d'un quadrilatère quelconque est toujours inférieure ou égale à son périmètre.

Une autre démarche possible :

On note $\boldsymbol{P}$ le périmètre du quadrilatère ABCD.

On démontre que $\text{AC} < \dfrac{\boldsymbol{P}}{2}$ et $\text{BD} < \dfrac{\boldsymbol{P}}{2}$.
D'où par addition membre à membre : AC + BD < $\boldsymbol{P}$.