

Racines carrées au dénominateur

I. Introduction

1. Des techniques enseignées au collège

Au collège, on dit fréquemment aux élèves qu'il ne faut pas garder de racine au dénominateur.

On leur apprend donc à enlever les racines au dénominateur.

L'étude des techniques associées fait partie des apprentissages traditionnels dans le cadre du calcul avec les racines carrées.

Cette règle est présentée d'une manière rigide aux élèves.

Ceux-ci l'appliquent souvent sans savoir le pourquoi d'une telle règle.

Or justifier cette règle n'a rien d'évident.

Une règle ne se justifie que par les applications qu'on en fait.

Le but de ce qui suit est d'apporter des éléments de réponse.

2. Deux exemples

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \quad (\text{on utilise la technique de la « quantité conjuguée » basée sur l'identité remarquable } (a+b)(a-b))$$

L'intérêt des techniques algébriques mises en œuvre dans ces deux exemples (techniques intéressantes en soi) ne saurait justifier les transformations d'écriture effectuées.

On pourrait invoquer des raisons esthétiques. Mais en quoi l'écriture $\frac{\sqrt{2}}{2}$ serait-elle plus belle que $\frac{1}{\sqrt{2}}$!

Il faut plutôt se poser la question : les transformations précédentes répondent-elles à un besoin mathématique ?

II. Une raison souvent invoquée

1. Si on connaît une valeur approchée de $\sqrt{2}$ (par exemple, 1,414) ou ce qui revient au même un encadrement de $\sqrt{2}$, on peut alors donner très facilement une valeur approchée de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (alors que cela ne serait pas évident sur l'écriture $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à cause de la division).

De même, pour le deuxième exemple.

2. L'application qui est faite au calcul de valeur approchée apparaît intéressante.

Mais cette raison souvent invoquée semble obsolète à l'époque actuelle vus les moyens techniques de calcul dont on dispose aujourd'hui. Autant la transformation présentait un intérêt réel autrefois lorsqu'il n'y avait pas de calculatrice, autant aujourd'hui cela ne présente guère plus d'intérêt.

Il reste cependant pratique quand on n'a pas de calculatrice à disposition ou que l'on veut déterminer une valeur approchée par calcul mental.

III. Une autre raison

Voici une égalité qui est vraie : $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

Comment peut-on voir que les nombres du premier membre et du second membre sont bien égaux ?

Il est intéressant de transformer l'écriture de chacun des deux nombres pour reconnaître qu'ils représentent en fait le même nombre.

L'écriture que l'on va donner est de la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont deux nombres rationnels.

Ce type d'écriture peut être appelé d'une certaine manière « écriture canonique » du nombre (elle est unique).

C'est une deuxième justification plus profonde et plus importante à l'époque actuelle que la première.

Pour reconnaître l'égalité de deux nombres, on a besoin d'une forme « canonique » (irréductible pour les fractions irréductibles).

IV. Critique et conclusion

Les applications précédentes apportent les raisons de la règle qui consiste à enlever les racines au dénominateur.

La modification de l'écriture d'un nombre comportant une racine carrée au dénominateur doit être motivée (comme toute modification d'écriture en athématiques) par un besoin précis.

En l'absence de motivation, il n'y a pas lieu de faire de modification d'écriture.

Une écriture avec une racine carrée au dénominateur n'a rien de gênant en soi.

Enlever la racine carrée au dénominateur d'un nombre ne simplifie pas forcément l'écriture du nombre. Bien au contraire, elle peut au contraire compliquer cette écriture.

La raison invoquée pour le calcul des valeurs approchées n'est pas toujours valable. Il est même parfois préférable de garder la forme initiale pour déterminer une valeur approchée ainsi que le montrent Jacques Chevallard dans un article et Gisèle Cirade dans sa thèse de doctorat.

V. Conclusion

Avant d'enlever une racine au dénominateur, il faut réfléchir à l'intérêt que cela présente pour la suite.

Une racine solitaire n'est pas gênante.

En revanche il est vrai qu'on a plutôt tendance à enlever une racine lorsqu'elle est intervenue dans une somme ou une différence au dénominateur (quoi cela ne puisse être érigée en règle absolue).

Comme les fractions irréductibles étudiées : procédé de simplification d'une fraction (le but est clairement mis en évidence : obtenir l'écriture fractionnaire la plus « simple possible d'un nombre »).

Personnellement, je préfère l'écriture $\sqrt{\frac{2}{3}}$ à $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (ensuite c'est une question de goût et de ce que veulent les professeurs).

Note :

¹ Pour $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on peut dire que l'écriture $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est plus parlante.

En effet, elle permet d'interpréter le nombre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (qui, sur cette écriture, est vu comme inverse de $\sqrt{2}$) d'une manière complètement différente : l'écriture $\frac{\sqrt{2}}{2}$ fait apparaître $\frac{1}{\sqrt{2}}$ comme la moitié de $\sqrt{2}$ ce qui est plus parlant que l'inverse.

Cette application apparaît tout de même assez limitée.