

Maths

Mémo de poche

Analyse

Polynômes du second degré

- Formes d'un polynôme du second degré

Forme développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Forme canonique : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

- Racines, forme factorisée et signe

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- ▶ Premier cas : $\Delta > 0$

f a deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Quitte à échanger les rôles de x_1 et x_2 :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0
		signe de a	0	signe de a

- ▶ Deuxième cas : $\Delta = 0$

f a une racine double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

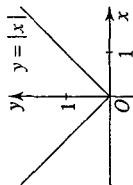
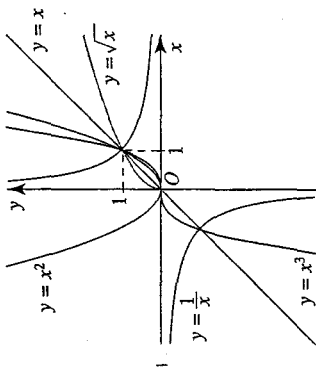
$f(x) = a(x - x_0)^2$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

- ▶ Troisième cas : $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Courbes représentatives des fonctions usuelles



$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Dérivation

- Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- ▶ Si pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
- ▶ Si pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- ▶ Si pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .
- ▶ Si pour tout x de I , $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I .
- ▶ Si pour tout x de I , $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I .

- Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k (k réel)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n ($n \geq 2$)	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku' \quad (k \text{ réel})$$

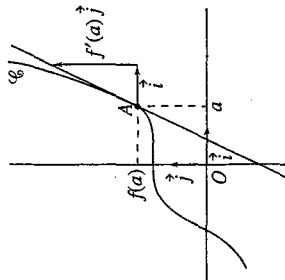
$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- Équation d'une tangente

Si f est dérivable en a , alors $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ est une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .



Suites arithmétiques, suites géométriques

- Suite arithmétique de raison r

Pour tout n de \mathbb{N} :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r = \dots$$

- ▶ Somme de termes consécutifs

Somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{1^{er} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}}$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Suite géométrique de raison q

Pour tout n de \mathbb{N} :

$$u_{n+1} = qu_n$$

$$u_n = u_0 q^n = u_1 q^{n-1} = \dots$$

- ▶ Somme de termes consécutifs

Somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , $q \neq 1$:

$$S = \frac{\text{1^{er} \text{ terme} \times (1 - q^{\text{nombre de termes}})}{1 - q}}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1.$$

Géométrie

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

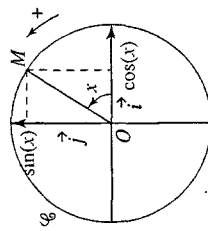
Trigonométrie

$$\vec{OM} = \cos(x)\vec{i} + \sin(x)\vec{j}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$



► Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

► Droites, vecteur directeur, vecteur normal

- Toute droite admet une équation de la forme : $ax + by + c = 0$ (a et b non simultanément nuls).
coefficient directeur : $-\frac{b}{a}$
un vecteur directeur : $\vec{u}(-b; a)$
un vecteur normal : $\vec{n}(a; b)$
- Toute droite non parallèle à la droite des ordonnées admet une équation réduite de la forme : $y = px + q$
coefficient directeur : p
ordonnée à l'origine : q
un vecteur directeur : $\vec{n}(1; p)$
- Toute droite parallèle à la droite des ordonnées admet une équation réduite de la forme : $x = m$
un vecteur directeur : \vec{j}

► Équations de cercles

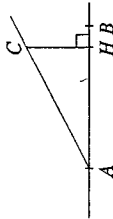
Le cercle de centre I et de rayon R admet pour équation : $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2$.

► Produit scalaire

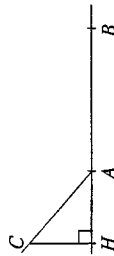
- Différentes expressions
Avec un cosinus : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ sinon.
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Avec les coordonnées en repère orthonormal (expression analytique) :

pour $\vec{u}(x, y), \vec{v}(x', y')$,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ si $H \in [AB]$



$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$ si $H \in [AB]$



• Vecteurs orthogonaux

Des vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.
 $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

► Statistiques et probabilités

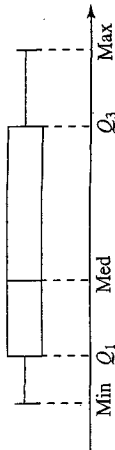
► Statistiques

Pour une série statistique $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_p, n_p)$:

- Effectif total : $n = n_1 + n_2 + \dots + n_p$
- Moyenne : $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i$
- Variance : $V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2$

► Écart-type : $\sigma = \sqrt{V}$.

► Boîte-à-moustaches :



► Probabilité d'un événement

$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
Si les événements A et B sont incompatibles, alors :
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Dans le cas de l'équiprobabilité :

$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$.

► Loi de Bernoulli de paramètre p

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

$E(X) = p,$
 $V(X) = p(1 - p),$
 $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

► Loi binomiale de paramètre (n, p)

Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et n :

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$
 $E(X) = np,$
 $V(X) = np(1 - p),$
 $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

► Coefficients binomiaux

Pour tous n et k de \mathbb{N} :

$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1,$
 $\binom{n}{1} = n$ si $n \geq 1$.
 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}$ si $0 \leq k \leq n$.
 $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{1+k}$ si $0 \leq k \leq n$.

► Triangle de Pascal

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	3	3	1	4	6	4	1
1	3	3	1	4	6	4	1	5	10
1	4	6	4	1	5	10	10	5	1
1	5	10	10	5	1	6	15	20	15
1	6	15	20	15	6	1	7	21	35
1	7	21	35	35	21	7	1	8	28
1	8	28	56	70	56	28	8	1	9
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55
1	12	66	220	462	792	924	792	462	220
1	13	78	286	643	1287	1716	1716	1287	643
1	14	91	364	900	1848	2730	2730	1848	900
1	15	105	462	1287	2730	4353	4353	2730	1287
1	16	120	572	1716	3770	6350	6350	3770	1716
1	17	136	696	2300	5019	8190	8190	5019	2300
1	18	153	837	2967	6630	10920	10920	6630	2967
1	19	171	993	3816	8710	14187	14187	8710	3816
1	20	190	1170	4862	11335	18476	18476	11335	4862
1	21	210	1365	6119	14560	23034	23034	14560	6119
1	22	231	1584	7644	18475	29524	29524	18475	7644
1	23	253	1829	9400	24310	38164	38164	24310	9400
1	24	276	2102	11424	31500	50070	50070	31500	11424
1	25	300	2403	13740	40525	66177	66177	40525	13740
1	26	325	2733	16380	51900	87630	87630	51900	16380
1	27	351	3103	20370	66150	117653	117653	66150	20370
1	28	378	3514	25760	84000	160098	160098	84000	25760
1	29	406	3967	32700	106000	215181	215181	106000	32700
1	30	435	4464	41450	134400	290696	290696	134400	41450
1	31	465	5007	52200	171000	395121	395121	171000	52200
1	32	496	5600	65140	218400	533541	533541	218400	65140
1	33	528	6253	81450	281400	724284	724284	281400	81450
1	34	561	6968	101400	364400	984856	984856	364400	101400
1	35	595	7747	125350	474000	1338564	1338564	474000	125350
1	36	630	8593	153700	616000	1843440	1843440	616000	153700
1	37	666	9509	186850	807000	2576640	2576640	807000	186850
1	38	703	10500	235400	1064000	3643440	3643440	1064000	235400
1	39	741	11579	300150	1414000	5143440	5143440	1414000	300150
1	40	780	12750	384000	1884000	7143440	7143440	1884000	384000
1	41	820	14017	499850	2524000	9943440	9943440	2524000	499850
1	42	861	15384	651400	3414000	13643440	13643440	3414000	651400
1	43	903	16855	844500	4544000	18843440	18843440	4544000	844500
1	44	946	18434	1095000	6014000	26443440	26443440	6014000	1095000
1	45	990	20125	1428500	8014000	36443440	36443440	8014000	1428500
1	46	1035	21943	1870000	10744000	50443440	50443440	10744000	1870000
1	47	1081	23893	2456500	14414000	69443440	69443440	14414000	2456500
1	48	1128	25981	3236000	19344000	96443440	96443440	19344000	3236000
1	49	1176	28214	4276500	26144000	133443440	133443440	26144000	4276500
1	50	1225	30608	5646000	35644000	184443440	184443440	35644000	5646000
1	51	1275	33170	7426500	48644000	254443440	254443440	48644000	7426500
1	52	1326	35908	9806000	66144000	354443440	354443440	66144000	9806000
1	53	1378	38831	12986500	89144000	484443440	484443440	89144000	12986500
1	54	1431	41957	17186000	119644000	664443440	664443440	119644000	17186000
1	55	1485	45295	22866500	161644000	924443440	924443440	161644000	22866500
1	56	1540	48854	30566000	219644000	1254443440	1254443440	219644000	30566000
1	57	1596	52644	40966500	299644000	1724443440	1724443440	299644000	40966500
1	58	1653	56675	54866000	409644000	2344443440	2344443440	409644000	54866000
1	59	1711	60957	73166500	561644000	3184443440	3184443440	561644000	73166500
1	60	1770	65491	96866000	761644000	4344443440	4344443440	761644000	96866000
1	61	1830	70288	128166500	1036644000	5844443440	5844443440	1036644000	128166500
1	62	1891	75350	169166000	1416644000	7844443440	7844443440	1416644000	169166000
1	63	1953	80688	223166500	1866644000	1064443440	1064443440	1866644000	223166500
1	64	2016	86314	294666000	2546644000	1444443440	1444443440	2546644000	294666000
1	65	2080	92239	389666500	3466644000	1944443440	1944443440	3466644000	389666500
1	66	2145	98475	515666000	4716644000	2644443440	2644443440	4716644000	515666000
1	67	2211	105034	671666500	6316644000	3544443440	3544443440	6316644000	671666500
1	68	2278	111928	868666000	8416644000	4744443440	4744443440	8416644000	868666000
1	69	2346	119170	1111666500	1116644000	6344443440	6344443440	1116644000	1111666500
1	70	2415	126774	1428666000	1486644000	8444443440	8444443440	1486644000	1428666000
1	71	2485	134754	1846666500	1996644000	1144443440	1144443440	1996644000	1846666500
1	72	2556	143124	2406666000	2696644000	1544443440	1544443440	2696644000	2406666000
1	73	2628	151898	3156666500	3646644000	2044443440	2044443440	3646644000	3156666500
1	74	2701	161081	4146666000	4916644000	2744443440	2744443440	4916644000	4146666000
1	75	2775	170688	5436666500	6586644000	3744443440	3744443440	6586644000	5436666500
1	76	2850	180734	7116666000	8816644000	5044443440	5044443440	8816644000	7116666000
1	77	2926	191234	9286666500	1176644000	6744443440	6744443440	1176644000	9286666500
1	78	3003	202194	1206666000	1586644000	9044443440	9044443440		