Exos *résolus* **1re S**

Maths
Mémento de poche

Analyse

Polynômes du second degré

• Formes d'un polynôme du second degré

Forme développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Forme canonique : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

• Racines, forme factorisée et signe

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

► **Premier cas : $\Delta > 0$**

f a deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Quitte à échanger les rôles de x_1 et x_2 :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

► **Deuxième cas : $\Delta = 0$**

f a une racine double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

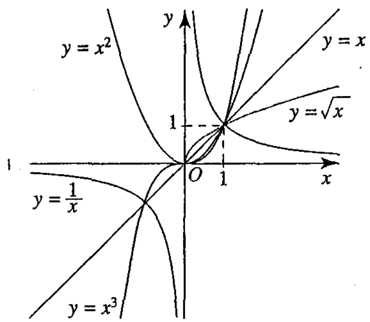
$f(x) = a(x - x_0)^2$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

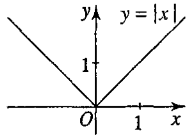
► **Troisième cas : $\Delta < 0$**

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	signe de a

Courbes représentatives des fonctions usuelles



$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$$



Dérivation

• Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

► Si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.

► Si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.

► Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

► Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

► Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

• Dérivées des fonctions usuelles

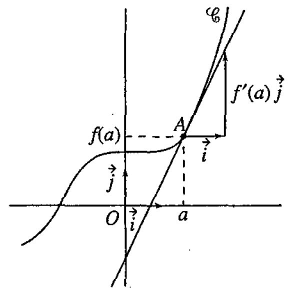
$f(x)$	$f'(x)$
k (k réel)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n $(n \geqslant 2)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

• Opérations sur les dérivées

$$(u + v)' = u' + v'$$
$$(ku)' = ku' \quad (k \text{ réel})$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

• Équation d'une tangente

Si f est dérivable en a, alors $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ est une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.



Suites arithmétiques, suites géométriques

• Suite arithmétique de raison r

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$
$$u_n = u_0 + nr = u_1 + (n - 1)r = \cdots$$

► **Somme de termes consécutifs**

Somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = \frac{\text{nombre de termes} \times (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

• Suite géométrique de raison q

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = qu_n$$
$$u_n = u_0 q^n = u_1 q^{n-1} = \cdots$$

► **Somme de termes consécutifs**

Somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q, $q \neq 1$:

$$S = \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} \times (1 - q^{\text{nombre de termes}})}{1 - q}.$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1.$$

Géométrie

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

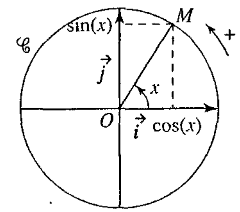
Trigonométrie

$\overrightarrow{OM} = \cos(x)\,\vec{i} + \sin(x)\,\vec{j}$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$

$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$



▶ **Valeurs remarquables**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Droites, vecteur directeur, vecteur normal

▶ Toute droite admet une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

(a et b non simultanément nuls).

coefficient directeur : $-\frac{b}{a}$

un vecteur directeur : $\vec{u}(-b\,;\,a)$

un vecteur normal : $\vec{n}(a\,;\,b)$

▶ Toute droite non parallèle à la droite des ordonnées admet une équation réduite de la forme :

$$y = px + q$$

coefficient directeur : p

ordonnée à l'origine : q

un vecteur directeur : $\vec{n}(1\,;\,p)$

▶ Toute droite parallèle à la droite des ordonnées admet une équation réduite de la forme :

$$x = m$$

un vecteur directeur : $\vec{j}$

Équations de cercles

Le cercle de centre I et de rayon R admet pour équation :

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2.$$

Produit scalaire

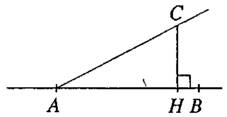
• Différentes expressions

Avec un cosinus :

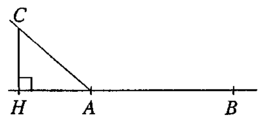
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \text{ si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0},$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \text{ sinon.}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

Avec les coordonnées en repère orthonormal (expression analytique) :

pour $\vec{u}(x, y)$, $\vec{v}(x', y')$,
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'.$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH \text{ si } H \in [AB)$$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH \text{ si } H \notin [AB)$$



• Vecteurs orthogonaux

Des vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Statistiques et probabilités

Statistiques

Pour une série statistique $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_p, n_p)$:

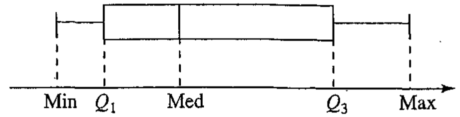
▶ **Effectif total :** $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$.

▶ **Moyenne :** $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i$.

▶ **Variance :** $V = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2$.

▶ **Écart-type :** $\sigma = \sqrt{V}$.

▶ **Boîte-à-moustaches :**



Probabilité d'un événement

$P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Si les événements A et B sont incompatibles, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Dans le cas général :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dans le cas de l'équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

Loi de Bernoulli de paramètre p

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

$$E(X) = p,$$
$$V(X) = p(1-p),$$
$$\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}.$$

Loi binomiale de paramètre (n, p)

Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
$$E(X) = np,$$
$$V(X) = np(1-p),$$
$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Coefficients binomiaux

Pour tous n et k de $\mathbb{N}$:

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1,$$
$$\binom{n}{1} = n \text{ si } n \geq 1.$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ si } 0 \leq k \leq n.$$
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{1+k} \text{ si } 0 \leq k \leq n.$$

Triangle de Pascal

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Intervalle de fluctuation à 95 %

L'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n, d'une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres n et p, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}\,;\,\frac{b}{n}\right]$ défini par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$,
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

Règle de décision au seuil 5 %

On suppose que la proportion d'un certain caractère est p.
On prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f du caractère.
Si f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation à 95 %, on rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion du caractère étudié est p.
Sinon, on ~~l'accepte~~. ne la rejette pas !!
(on considère l'hypothèse que est recevable)