$1^{ère}$ S Exercices sur les limites de suites

1 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

1°) Rentrer la suite dans la calculatrice afin d'obtenir un tableau de valeurs.
Recopier et compléter la phrase : « On peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$ ».

2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a : $u_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$.

Utiliser cette égalité pour justifier brièvement le résultat de la question 1°).

Dans les exercices suivants, pour répondre aux questions sur le comportement des suites, on pourra :

- commencer par **tabuler** la suite sur calculatrice ;

- utiliser l'**écriture symbolique** de la limite d'une suite (en rédigeant ainsi : « On peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$ »).

2 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

3 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (0,6)^n$.

1°) Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2°) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-4}$.
On pourra utiliser un programme (ne pas détailler l'écriture du programme).

4 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

1°) Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2°) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $|u_n| < 10^{-6}$.

5 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^3 - n$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

6 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

7 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - n^2$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

8 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 7$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

9 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 9$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{4}{u_n}\right)$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

10 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1°) Tabuler et représenter la suite (u_n) sur la calculatrice.
Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2°) On admet que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$ (résultat que l'on peut justifier par un raisonnement de proche en proche).
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-4}$ (on pourra utiliser un programme).

11 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 7$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ (prendre un centimètre pour unité graphique).
Effectuer la construction itérative des termes de la suite sur l'axe des abscisses.

2°) Que peut-on penser du sens de variation de la suite (u_n) et de son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

3°) On admet que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 2$ (résultat que l'on peut justifier par un raisonnement de proche en proche).
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n - 2 < 10^{-3}$.

12 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

Tabuler la suite (u_n) sur la calculatrice.

Comparer les valeurs de u_n avec les premières décimales du nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Remarque : Le nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé **« nombre d'or »**.

$\boxed{13}$ Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \sqrt[n]{2}$ (u_n est la **racine n-ième** de 2 ; on peut aussi écrire $u_n = 2^{\frac{1}{n}}$ qui est une notation en exposant fractionnaire).

Tabuler la suite (u_n) sur la calculatrice.
Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

$\boxed{14}$ Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 1.
On inscrit dans ce cercle un polygone régulier convexe $\mathcal{P}_n$ à n côtés (avec $n \geqslant 4$).

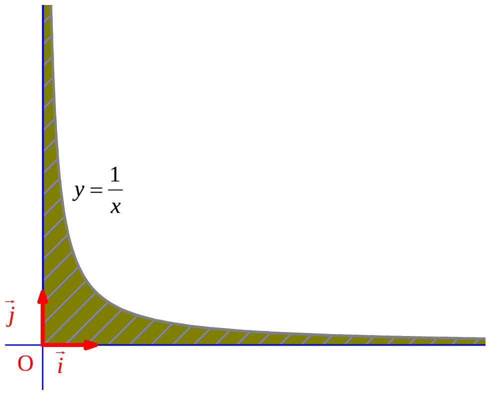
1°) Soit A et B deux sommets consécutifs du polygone.
Exprimer la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$ en fonction de n.
2°) Démontrer que l'aire du triangle AOB est égale à $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$; en déduire l'aire $\mathcal{A}_n$ du polygone $\mathcal{P}_n$.
3°) À l'aide de la calculatrice, étudier le comportement de $\mathcal{A}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Pouvait-on prévoir le résultat ?

$\boxed{15}$ Le premier jour de propagation d'une épidémie sur une population de 1 500 personnes, 90 personnes ont été contaminées. Ensuite, le nombre de nouvelles personnes contaminées diminue chaque jour de 10 %.
On désire étudier l'évolution de cette épidémie.

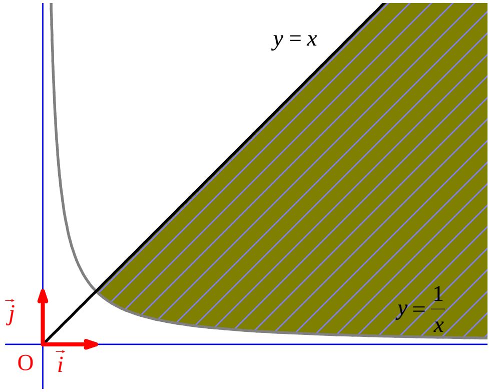
1°) Pour chaque entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de nouvelles personnes contaminées le jour n. Ainsi $u_1 = 90$.
a) Étudier la nature de la suite (u_n). En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien de jours on peut considérer que l'épidémie est stoppée, c'est-à-dire qu'il y a moins d'une personne contaminée par jour.
2°) On s'intéresse au nombre S_n de personnes contaminées au total depuis le premier jour jusqu'au jour n.
a) Exprimer S_n en fonction de n.
b) Vers quelle valeur semble tendre le nombre total de personnes contaminées lorsque le nombre de jours devient « grand » ?
c) Quel pourcentage de la population sera contaminé par la grippe ?

Dans les exercices $\boxed{16}$ à $\boxed{21}$, les points de la représentation graphique de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ sont situés dans la partie hachurée du plan.
Indiquer dans chaque cas si (u_n) est obligatoirement convergente (indiquer alors la limite), obligatoirement divergente (préciser alors le comportement) ou si plusieurs cas sont possibles (sans chercher à justifier).

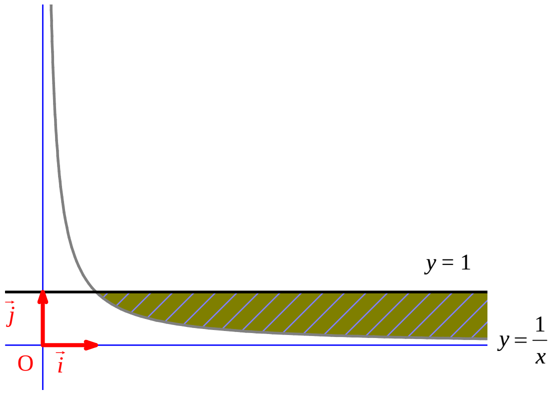
$\boxed{16}$ **Graphique**



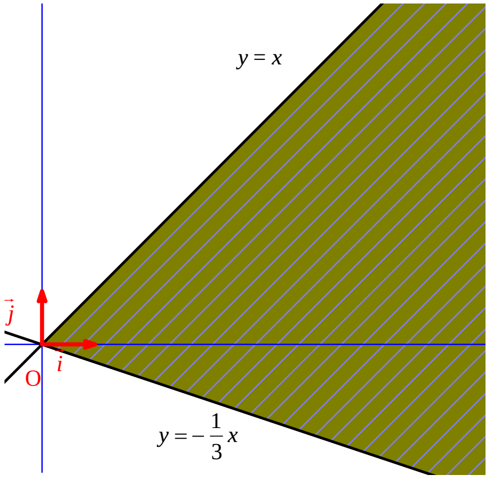
$\boxed{17}$ **Graphique**



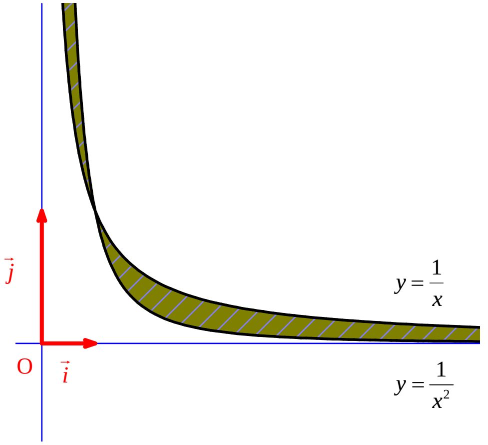
$\boxed{18}$ **Graphique**



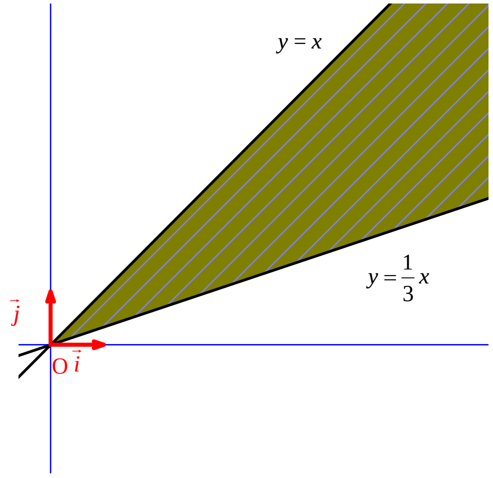
19 **Graphique**



20 **Graphique**



21 **Graphique**



22 On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

Faire des essais sur la calculatrice pour plusieurs valeurs de u_0.

Que peut-on penser du comportement de la suite $\left(u_n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

23 On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+2}$.

1°) Que peut-on penser du comportement de la suite $\left(u_n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

2°) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100$.

24 On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 3n + 1$.

1°) Que peut-on penser du comportement de la suite $\left(u_n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

2°) Avec un logiciel de calcul formel, on a rentré la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right) = x^2 + 3x + 1$ et résolu un certain nombre d'inéquations en mode approché.

Dans le tableau ci-dessous, on donne dans la colonne de gauche les inéquations et dans la colonne de droite les réponses fournies par le logiciel.

$f(x) \geqslant 1\,000$	$x \leqslant -33{,}142534664594$ ou $x \geqslant 30{,}142534664593$
$f(x) \geqslant 10\,000$	$x \leqslant -101{,}5062498047$ ou $x \geqslant 98{,}506249804699$
$f(x) \geqslant 100\,000$	$x \leqslant -317{,}7297424342$ ou $x \geqslant 314{,}7297424342$

Utiliser ces résultats pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

- $u_n \geqslant 1\,000$
- $u_n \geqslant 10\,000$
- $u_n \geqslant 100\,000$

On admet que la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0 (démonstration facile).

Recopier et compléter alors les phrases suivantes :

• Si $n \geqslant \ldots$, alors $u_n \geqslant 1\,000$.

• Si $n \geqslant \ldots$, alors $u_n \geqslant 10\,000$.

• Si $n \geqslant \ldots$, alors $u_n \geqslant 100\,000$.

$\boxed{25}$ Dans une kermesse, un organisateur de jeux dispose d'une roue comportant 20 cases : 18 cases noires et 2 cases rouges.
Lors du lancer de la roue, toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
Le joueur décide de lancer la roue *n* fois de suite (*n* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1).
1°) Exprimer en fonction de *n* la probabilité p_n qu'il obtienne au moins une fois une case rouge.
2°) Que peut-on penser de la limite de (p_n) lorsque *n* tend vers $+\infty$?
Donner une interprétation concrète de ce résultat.

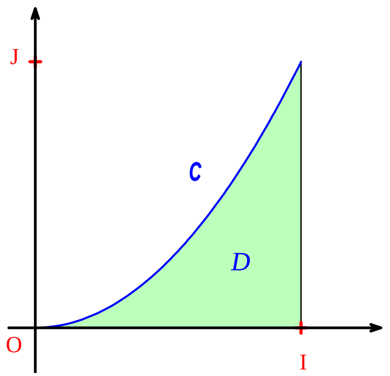
$\boxed{26}$ Pour réduire les inégalités entre salariés, une entreprise propose que, pour ses salariés de catégorie B gagnant 2000 € par mois, on augmente les salaires de 2 % par an, alors que pour ceux de la catégorie C gagnant 1500 € par mois, on augmente les salaires de 5 % par an, jusqu'à ce que les salaires des deux catégories s'équilibrent.
On note (B_n) et (C_n) les suites des salaires annuels de chaque catégorie.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $\mathrm{U}_n = \dfrac{\mathrm{C}_n}{\mathrm{B}_n}$.

1°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (U_n).
2°) Déterminer à l'aide de la calculatrice l'année où C_n deviendrait strictement supérieur à B_n.
3°) Pour que les salariés de la catégorie C rattrapent en seulement 6 ans l'écart de salaire, quel taux d'augmentation devrait-on leur proposer ?

$\boxed{27}$ **Aire sous la parabole**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = x^2$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine *D* situé entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
On se propose de déterminer une valeur approchée de $\mathcal{A}$.



1°) **Avec cinq intervalles**

On subdivise [0 ; 1] en cinq intervalles de même longueur et on construit les figures suivantes.

Figure ①

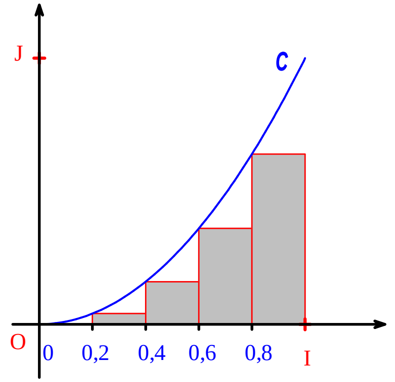
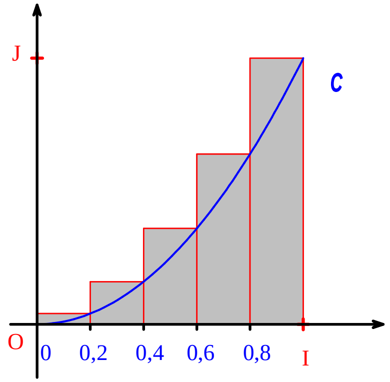


Figure ②



Chaque rectangle a un sommet appartenant à la courbe.

Reproduire ces figures dans le cahier.

a) Calculer la somme des aires des rectangles contenus dans *D* (figure ①).
b) Calculer la somme des aires des rectangles qui contiennent *D* (figure ②).
c) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

2°) **Avec *n* subdivisions**

On subdivise l'intervalle [0 ; 1] en *n* intervalles ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) de même longueur $\dfrac{1}{n}$.
On construit comme ci-dessus *n* rectangles qui sont contenus dans *D* et *n* rectangles qui contiennent *D*.

a) Démontrer que la somme des aires des rectangles contenus dans *D* est donnée par

$$\mathrm{A}_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}$$

et que la somme des aires des rectangles qui contiennent *D* est donnée par $\mathrm{B}_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$.

b) On rappelle la formule sommatoire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Donner des expressions simplifiées de A_n et B_n.
c) Déterminer le rang *n* à partir duquel on a : $\mathrm{B}_n - \mathrm{A}_n \leqslant 10^{-4}$.
d) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-4}.

Corrigé

Dans tous les exercices, on s'intéresse au **comportement asymptotique** d'une suite.
On s'intéressera accessoirement au **comportement global** de la suite (monotonie, majoration, minoration…).

Les exercices de ce chapitre reposent sur des **constatations numériques et graphiques** (conjectures).

Les suites sont définies soit en **mode explicite** soit en **mode récurrent**.

L'utilisation de la calculatrice ou d'un tableur permet de calculer les termes et de faire les graphiques en « nuages de points » (points non reliés).
Le tableur offre une meilleure visibilité des résultats qu'une calculatrice.

Lorsque la suite est définie en mode explicite, la détermination de **valeurs seuils** peut être effectuée :

- par **essais successifs** (tâtonnements)

- par **programmation** (algorithme avec boucle « Tantque »)

- en utilisant un **logiciel de calcul formel** (rapide et efficace)

Les exercices portent sur la convergence ou de la divergence de suites.

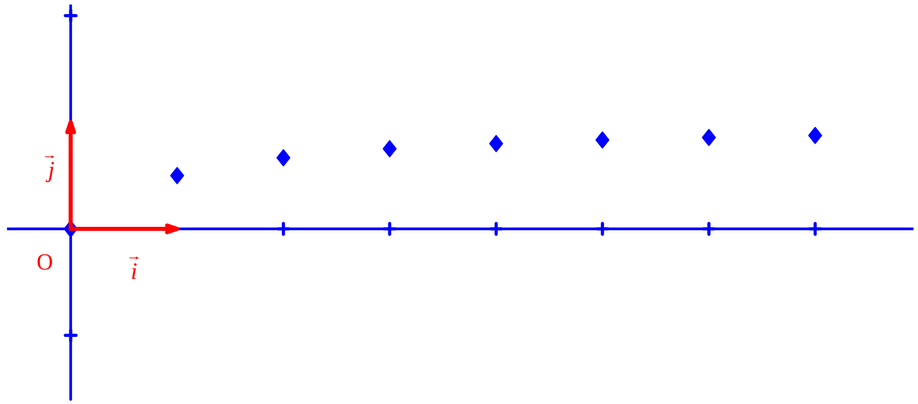
Lorsqu'une suite converge, il est intéressant de pouvoir apprécier la **vitesse de convergence** (rapidité de convergence).

Dans ce chapitre, il n'y a pas de propriétés (à part les quelques limites de référence qui sont données à la fin du cours). On s'appuie principalement sur l'intuition.

$\boxed{1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{n}{n+1}$

La suite (u_n) est définie en mode explicite.

La suite est représentée par le nuage de points suivant.
Il s'agit de points isolés (non reliés).



On pourrait aussi tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ puis sélectionner les points de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse est un entier naturel.

Il est intéressant de faire apparaître la « barre de 1 » (droite horizontale d'équation $y = 1$, « asymptote horizontale » en $+\infty$).

1°) **Comportement de u_n en $+\infty$**

• On s'appuie sur l'observation du tableau de valeurs obtenu sur la calculatrice et éventuellement sur la représentation graphique de la suite sous forme d'un nuage de points.

• Dans cette question, on ne justifier pas : on donne le comportement asymptotique sans justifier (en utilisant une formulation de la forme : « On peut penser que … »).

Dans cet exercice, on utilise directement la notation symbolique pour donner la phrase réponse.

Il y a plusieurs formulations et notations possibles :

• On peut penser que la limite de u_n est 1 lorsque n tend vers $+\infty$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

• On peut penser que u_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

• On peut penser que la suite (u_n) converge vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.
On peut penser que la suite (u_n) est convergente et que sa limite est égale à 1.

Il est à noter que le tableau de valeurs obtenu sur la calculatrice permet d'apprécier la vitesse de convergence (ou limite de la suite).

Du point de vue de la monotonie (qui n'est pas demandée dans cette question), l'observation du tableau de valeurs et du nuage de points laisse penser que la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.
On peut aisément démontrer ce résultat par le calcul (calcul littéral, en utilisant par exemple la méthode de la différence).
Il faut noter qu'aucun lien n'est mis en évidence cette année entre monotonie et convergence.
Ce n'est pas parce que la suite (u_n) est croissante qu'elle tend vers 1.

Le lien entre convergence et monotonie sera mis en évidence en Terminale sous forme d'une propriété.

On notera que la valeur 1a valeur 1 n'est jamais atteinte (les termes se rapprochent de plus en plus de1 sans jamais être égal à 1).

2°)

Cette question justifie un peu le 1°).

• **Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$.**

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ (on est obligé de mettre $\mathbb{N}^*$ car lorsque l'on va forcer la factorisation, on va diviser par n donc n doit être non nul)

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$ **(on force la factorisation au dénominateur)**

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

Vu la simplicité de la question, il vaut mieux partir de l'expression initiale de u_n.

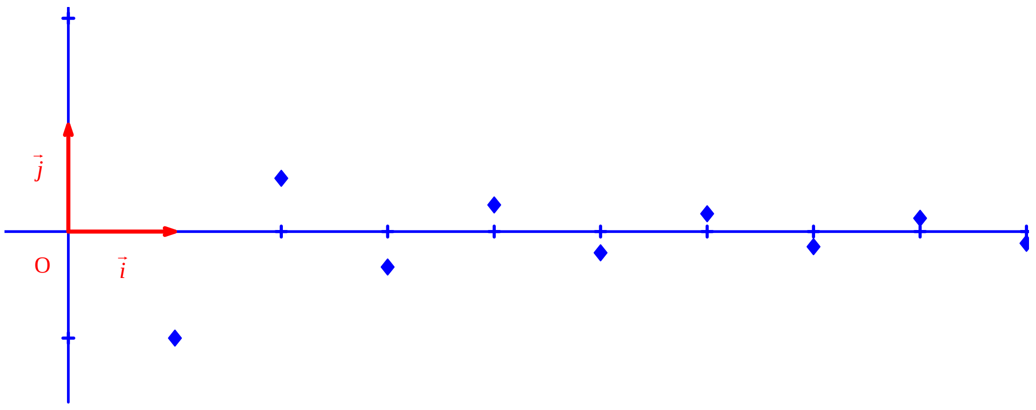
• **Utilisons cette égalité pour justifier brièvement le résultat de la question 1°).**

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
On peut donc en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (en admettant les résultats intuitifs de limite d'une somme et de limite d'un quotient).

On aurait aussi pu exploiter la réécriture $\dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{n}{n+1}$ pour justifier ce résultat.

$\boxed{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

La suite (u_n) est définie en mode explicite.



L'observation du tableau de valeurs et du nuage de points obtenus sur la calculatrice fait apparaître un **« comportement oscillant »**.
La suite (u_n) n'est pas monotone.
Les termes sont alternativement positifs ou négatifs suivant la parité de l'indice comme on peut le voir facilement sur l'expression du terme général de la suite : u_n est du signe de $(-1)^n$ donc si l'indice est pair le terme est positif, si l'indice est impair, le terme est négatif.

On peut néanmoins observer que les termes se rapprochent de 0.

On peut donc penser que la suite (u_n) converge vers 0.

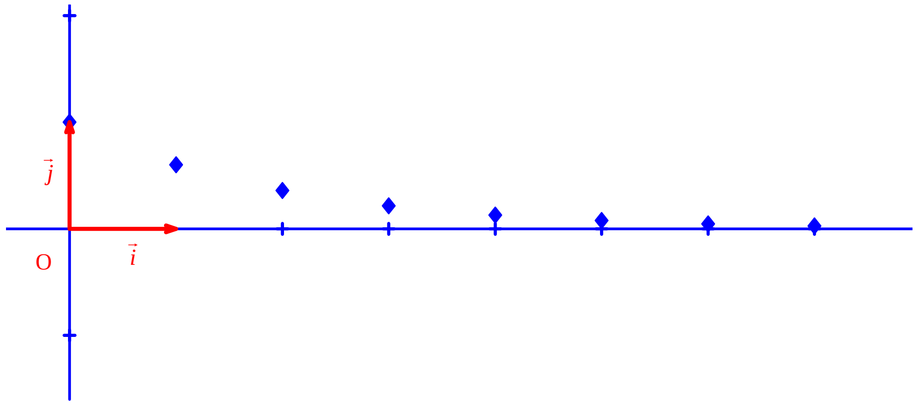
On peut donc penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La limite n'est jamais atteinte (la limite peut être atteinte dans certains cas, par exemple dans le cas d'une suite constante).

Ce résultat est vrai et pourra être démontré en Terminale.
Cet exercice montre un exemple de suite non monotone qui converge vers 0.

$\boxed{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = (0,6)^n$

Les parenthèses autour de 0,6 sont des parenthèses de sécurité.



1°) **Comportement de u_n en $+\infty$.**

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 0 ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$).

2°) **Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-4}$.**

À l'aide la calculatrice, on peut dire que le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-4}$ est 19.

On peut procéder par tâtonnements sur la calculatrice ou bien on peut créer un programme (avec une boucle « Tantque »).
L'algorithme correspondant à ce programme est un algorithme permettant la détermination d'une valeur seuil.
En Terminale, on pourra résoudre ce type de question par le calcul en utilisant la fonction logarithme népérien.

Commentaires généraux sur la suite (u_n) :

• La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,6 (et de premier terme 1).
• Elle est décroissante car $u_0 > 0$ et $0 < 0,6 < 1$.

Faire le graphique.

Montrer le « tube »]– 0,0001 ; 0,0001[sur l'axe des ordonnées.

Comme la suite (u_n) est décroissante, on peut écrire la proposition suivante : « Si $n \geqslant 19$, alors $u_n < 10^{-4}$ ».

$\boxed{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

Les parenthèses autour de $-\dfrac{1}{3}$ sont indispensables.

1°) **Comportement de u_n en $+\infty$.**

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 0 ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$).

2°) **Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $|u_n| < 10^{-6}$.**

À l'aide la calculatrice, on peut dire que le plus petit entier naturel n tel que $|u_n| < 10^{-6}$ est 13.

En Terminale, on pourra résoudre ce type de question par le calcul en utilisant la fonction logarithme népérien.

Commentaires généraux sur la suite (u_n) :

• La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ (et de premier terme 1).
• Elle est non monotone car sa raison est strictement négative.

$\boxed{5}$ $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = n^3 - n$

Comportement de u_n en $+\infty$.

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$).

On pourra démontrer ce résultat en Terminale.
La suite (u_n) est divergente (elle diverge vers $+\infty$).

On ne peut pas calculer la limite cette année ; ce n'est pas précis.

$\boxed{6}$ $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

Comportement de u_n en $+\infty$.

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$).

On pourra démontrer ce résultat en Terminale.
La suite (u_n) est divergente (elle diverge vers $+\infty$).

$\boxed{7}$ $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5 - n^2$

Comportement de u_n en $+\infty$.

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à $-\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Cela peut se justifier intuitivement grâce au résultat admis dans le cours : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.
On pourra démontrer ce résultat rigoureusement en Terminale.

La suite (u_n) est divergente (elle diverge vers $-\infty$).

$\boxed{8}$ $\begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 0,5u_n + 2 \end{cases}$

Comportement de u_n en $+\infty$.

Avec la calculatrice :

- On calcule $u_1 = 5{,}5$; $u_2 = 4{,}75$; $u_3 = 4{,}375$; …

- On effectue la représentation graphique de la suite (en marche d'escalier ou en toile d'araignée).

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 4 ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$).

$\boxed{9}$ $\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{4}{u_n}\right) \end{cases}$

Comportement de u_n en $+\infty$.

Avec la calculatrice :

- On calcule $u_1 \approx 4{,}72$; $u_2 \approx 2{,}78$; $u_3 \approx 2{,}1$; $u_4 \approx 2$; $u_5 \approx 2$ …

- On effectue la représentation graphique de la suite (en marche d'escalier ou en toile d'araignée).

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 2 ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$).

$\boxed{10}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$

1°) **Comportement de u_n en $+\infty$.**
On tabule et on représente la suite (u_n) sur la calculatrice.

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 0 ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$).

2°) On admet que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$ (résultat que l'on peut justifier par un raisonnement de proche en proche).

Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-4}$ (on pourra utiliser un programme).

$u_{99} = 0{,}101$

$u_{100} = 0{,}1$

$\boxed{11}$ $\begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ (prendre un centimètre pour unité graphique).
Effectuer la construction itérative des termes de la suite sur l'axe des abscisses.

2°) **Sens de variation et comportement asymptotique de la suite (u_n)**

Le graphique effectué dans la question 1°) permet l'observation d'un « point de convergence ».

Avec le graphique, on peut penser que la suite (u_n) est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

3°) On admet que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$.
Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $u_n - 2 < 10^{-3}$ (1).

(1) $\Leftrightarrow u_n < 2{,}001$

On a : $u_4 = 2{,}0145$
$u_5 = 2{,}0036$

Donc le plus entier naturel n tel que $u_n < 2{,}001$ est **5**.

On veut démontrer par un raisonnement de proche en proche que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$.

On considère la phrase $P(n)$: « $u_n > 2$ » (il s'agit d'une phrase ouverte)

…

$u_k > 2$

…………

$u_k + 2 > 4$

…………

$\sqrt{u_k + 2} > 2$

$u_{k+1} > 2$

Recopier et justifier les deux passages marqués par des flèches.

$\boxed{12}$ $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 1} \\ \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \ \ \boldsymbol{u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}} \end{cases}$

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398...$

En comparant les valeurs de u_n obtenues sur calculatrice avec les premières décimales du nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, on constate qu'elles sont égales à partir d'un certain rang.

On peut donc penser que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Commentaires :

• On pourra effectivement démontrer ce résultat en Terminale.

• Le nombre d'or est un nombre irrationnel extrêmement célèbre en mathématiques.

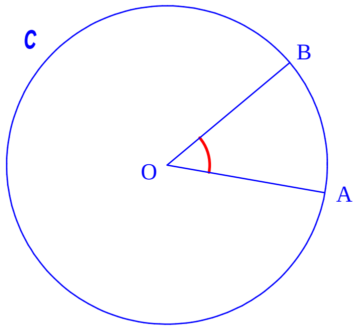
$\boxed{14}$ **Polygones réguliers**

$\mathcal{C}$: cercle de centre O et de rayon 1

$\mathcal{P}_n$: polygone régulier convexe à n côtés (avec $n \geqslant 4$) inscrit dans $\mathcal{C}$

1°) A et B : sommets consécutifs du polygone

Faire une figure avec le cercle $\mathcal{C}$ et les points A et B.



Exprimons la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$ en fonction de *n*.

Les angles au centre ont tous la même mesure.

La mesure d'un angle plein est 2π.

Donc $\widehat{\text{AOB}} = \dfrac{2\pi}{n}$.

Tous les angles au centre ont pour mesure $\dfrac{2\pi}{n}$.

2°)

• Démontrons que l'aire du triangle AOB est égale à $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{AOB}} &= \frac{1}{2}\text{OA} \times \text{OB} \times \sin\widehat{\text{AOB}} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin\frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

(formule de l'aire d'un triangle vue dans le chapitre des relations métriques)

• Déduisons-en l'aire $\mathcal{A}_n$ du polygone $\mathcal{P}_n$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= n\mathcal{A}_{\text{AOB}} \\ &= \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

3°) **Étudions le comportement de $\mathcal{A}_n$ lorsque *n* tend vers + ∞.**
Pouvait-on prévoir le résultat ?

Il semble que $\mathcal{A}_n$ tend vers π lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarques :

• On peut dire que $\mathcal{A}_n < \pi$ puisque l'on est dans le disque

• On pourrait faire de même avec le périmètre.
On pourrait aussi s'intéresser au périmètre du polygone régulier.

• Cet exercice peut être relié à la méthode d'Archimède.

$\boxed{15}$ **Étude de l'évolution d'une épidémie**

Nombre de personnes de la population : 1500

Nombre de personnes contaminées le premier jour : 90

Le nombre de nouvelles personnes contaminées diminue chaque jour de 10 %.

1°) u_n : nombre de personnes contaminées le jour n $(n \geqslant 1)$

a)

• Étudions la nature de la suite (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n \times 0,9$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_1 = 90 et de raison $q = 0,9$.

• Déduisons-en l'expression de u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 90 \times 0,9^{n-1}$ (attention la suite est définie à partir de l'indice 1, d'où la présence de l'exposant $n-1$)

b) **Déterminons à partir de combien de jours on peut considérer que l'épidémie est stoppée.**

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 1$.

On peut considérer que l'épidémie est stoppée au bout de 43 jours.

2°) S_n : nombre de personnes contaminées au total depuis le premier jour jusqu'au jour n

a) **Exprimons S_n en fonction de n.**

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= 90 \times \frac{1-0,9^n}{1-0,9} \\ &= 900\left(1-0,9^n\right) \end{aligned}$$

b) **Déterminons vers quelle valeur semble tendre le nombre total de personnes contaminées lorsque le nombre de jours devient « grand ».**

Il semble que S_n tende vers 900 lorsque n tend vers + ∞.
Cette limite sera justifiée en Terminale grâce à une propriété du cours.

c) **Déterminons quel pourcentage de la population sera contaminé par la grippe.**

$$\frac{900}{1500} = \frac{3}{5} = 0,6$$

60 % de la population sera contaminé par la grippe.

Cet exercice montre une utilisation des limites de suites dans une suite situation concrète : évolution d'une épidémie.

Au bout d'un moment la calculatrice elle sait plus…

On pourrait caractériser les domines par des inéquations.

$\boxed{16}$ La suite (u_n) est convergente (sa limite est égale à 0).

Ce théorème sera justifié en Terminale avec le « théorème des gendarmes » (ou « théorème d'encadrement »).

$\boxed{17}$ On ne peut rien dire du comportement asymptotique de la suite (u_n).
Elle peut être convergente ou divergente (limite infinie ou pas de limite).

$\boxed{18}$ On ne peut rien dire du comportement asymptotique de la suite (u_n).

$\boxed{19}$ On ne peut rien dire du comportement asymptotique de la suite (u_n).

$\boxed{20}$ La suite (u_n) est convergente (sa limite est égale à 0).

$\boxed{21}$ La suite (u_n) est divergente (sa limite est égale à + ∞).

$\boxed{22}$ $\boldsymbol{(u_n)\ \begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}}$

Faisons des essais sur la calculatrice pour plusieurs valeurs de u_0.

Il semble que :

• si $u_0 \geqslant 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$;

• si $0 \leqslant u_0 < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\boxed{23}$ $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{n+2}}$

1°) **Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers + ∞ ?**

On peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2°) **Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100$ (1).**

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{n+2} > 100$

$\Leftrightarrow n+2 > 10\,000$

$\Leftrightarrow n > 9998$

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100$ est 9999.

$\boxed{24}$ $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = n^2 + 3n + 1$

1°) **Comportement asymptotique de la suite (u_n)**

On peut penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2°) $f : x \mapsto x^2 + 3x + 1$

Résultats du logiciel de calcul formel :

$f(x) \geqslant 1\,000$	**$x \leqslant -33{,}1425346646$ ou $x \geqslant 30{,}1425346646$**
$f(x) \geqslant 10\,000$	**$x \leqslant -101{,}506249805$ ou $x \geqslant 98{,}5062498047$**
$f(x) \geqslant 100\,000$	**$x \leqslant -317{,}729742434$ ou $x \geqslant 314{,}729742434$**

Les résultats du logiciel de calcul formel s'interprètent ainsi :

• L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 1\,000$ est la réunion d'intervalles

$]-\infty\,;\,A_1] \cup [A_2\,;\,+\infty[$ avec $A_1 = -33{,}142534664...$ et $A_2 = 30{,}142534664...$.

• L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 10\,000$ est la réunion d'intervalles

$]-\infty\,;\,B_1] \cup [B_2\,;\,+\infty[$ avec $B_1 = -101{,}50624980...$ et $B_2 = 98{,}506249804...$.

• L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 100\,000$ est la réunion d'intervalles

$]-\infty\,;\,C_1] \cup [C_2\,;\,+\infty[$ avec $C_1 = -317{,}72974243...$ et $B_2 = 314{,}72974243...$.

• Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 1\,000$ est **31** (plus petit entier naturel supérieur ou égal à A_2).

• Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10\,000$ est **99**.

• Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 100\,000$ est **315**.

On peut compléter les phrases :

• Si $n \geqslant$ **31**, alors $u_n \geqslant 1\,000$.

• Si $n \geqslant$ **99**, alors $u_n \geqslant 10\,000$.

• Si $n \geqslant$ **315**, alors $u_n \geqslant 100\,000$.

Cet exercice montre bien l'intérêt d'outils de calcul formel car la résolution par le calcul des inéquations considérées dans cet exercice s'avèrerait extrêmement fastidieuse.

Les résultats obtenus grâce au logiciel permettent de porter l'attention non sur les calculs mais sur leur interprétation et leur utilisation pour la résolution des questions.

$\boxed{25}$ **Suites et probabilités**

roue comportant 20 cases
- 18 cases noires
- 2 cases rouges.

n lancers de suite ($n \geqslant 1$)

Les n lancers sont réalisés dans des conditions identiques indépendantes.

1°) **Exprimons en fonction de n la probabilité p_n que le joueur obtienne au moins une fois une case rouge.**

Pour un lancer, la probabilité d'obtenir une case noire est égale à : $\dfrac{18}{20} = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$.

$p_n = P$(« le joueur obtient au moins une fois une case rouge »)

$= 1 - P$(« le joueur n'obtient aucune case rouge »)

$= 1 - P$(« le joueur n'obtient que des cases noires ») (reformulation de l'événement contraire)

$= 1 - 0{,}9 \times 0{,}9 \ldots \times 0{,}9$ (on applique le principe multiplicatif ; le produit comporte n facteurs)

$= 1 - 0{,}9^n$

$p_n = 1 - 0{,}9^n$

Commentaire :

On pourrait aussi faire appel à la loi binomiale.
Mais cela donne une solution plus longue donc mieux vaut éviter de parler de loi binomiale.

2°) **Limite de p_n lorsque $n \to +\infty$**

On tabule la suite sur la calculatrice.

On peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$ (autrement dit : on peut penser que la suite (p_n) converge vers 1).

Commentaire :

• Ce résultat sera justifié rigoureusement en Terminale (un résultat du cours permettra de dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$).

• En tabulant les termes sur la calculatrice, on constate que la suite (p_n) semble croissante.
Ce résultat est visualisable également sur le nuage de points que l'on peut obtenir.
On peut démontrer aisément que la suite (p_n) est croissante à partir de l'indice 1.

On peut penser que lorsque n tend vers + ∞, la probabilité d'obtenir au moins une fois une case rouge tend vers 1.

Concrètement, lorsque le nombre de lancers devient de plus en plus grand, on est quasiment certain d'obtenir au moins une fois une case rouge (ce résultat semble logique).

La détermination de valeurs seuils permet de faire le lien entre ce chapitre et l'algorithmique.

26

1°) **Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (U_n).**

• Relation de récurrence pour la suite (B_n) :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_{n+1} = B_n \times 1,02$

La suite (B_n) est une suite géométrique de premier terme $B_0 = 2000 \times 12 = 24000$ et de raison 1,02.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = 24000 \times 1,02^n$

• Relation de récurrence pour la suite (C_n) :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad C_{n+1} = C_n \times 1,05$

La suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 1500 \times 12 = 18000$ et de raison 1,05.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n = 18000 \times 1,05^n$

• Nature de la suite (U_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \frac{C_n}{B_n} = \frac{18 \times 1,02^n}{24 \times 1,05^n} = \frac{3}{4} \times \frac{1,02^n}{1,05^n} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1,02}{1,05}\right)^n$$

La suite (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = \frac{3}{4}$ et de raison $q = \frac{1,02}{1,05}$.

2°) **Déterminons l'année où $C_n > B_n$.**

Méthode : tabuler (U_n) sur calculatrice et regarder quand $U_n > 1$ ou tabuler les deux suites

On trouve $n = 10$.

Conclusion : le salaire des salariés de la catégorie C sera strictement supérieur au salaire des salariés de la catégorie B au bout de 10 ans.

3°) **Déterminons le taux d'augmentation qu'il faudrait proposer aux salariés de la catégorie C pour qu'ils rattrapent en seulement 6 ans l'écart de salaire.**

Soit t le pourcentage d'augmentation cherché.

La suite (C_n) est alors une suite géométrique de premier terme $C_0 = 18000$ et de raison $q = 1 + \frac{t}{100}$.

On cherche t tel que $C_6 < B_6$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 18000 \times q^6 > 24000 \times 1,02^6$

$\Leftrightarrow q^6 > \frac{4}{3} \times 1,02^6$

$\Leftrightarrow q > \sqrt[6]{\frac{4}{3} \times 1,02^6}$ car $q > 0$ (on utilise la racine sixième, obtenue avec la calculatrice)

$\Leftrightarrow q > 1{,}02 \times \sqrt[6]{\frac{4}{3}}$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} > 1{,}02 \times \sqrt[6]{\frac{4}{3}}$

$\Leftrightarrow t > 100\left(1{,}02 \times \sqrt[6]{\frac{4}{3}} - 1\right)$

Avec la calculatrice, on obtient : $100\left(1{,}02 \times \sqrt[6]{\frac{4}{3}} - 1\right) = 7{,}009736...$.

Pour que les salariés C soient mieux payés que les salariés B au bout de six ans, il suffit de choisir $t > 7{,}01$ soit une augmentation chaque année d'au moins 7,01 %.

$\boxed{27}$ Aire sous une parabole

1°)

a) **Calculons la somme des aires des rectangles contenus dans *D*.**

$$\begin{aligned} A_5 &= \text{somme des aires des 4 rectangles situés « au-dessous » de la courbe*} \\ &= 0{,}2 \times \left(0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}6^2 + 0{,}8^2\right) \quad ** \\ &= 0{,}24 \end{aligned}$$

* On pourrait noter a_1, a_2, a_3, a_4 les aires respectives des rectangles sous la courbe. Idem pour les rectangles au-dessus de la courbe. Mais ce n'est pas très utile.

** Tous les rectangles ont un même côté, une même « base », de 0,2 et pour « hauteurs » respectives $f(0,2)$, $f(0,4)$, …, $f(0,8)$ c'est-à-dire $0{,}2^2$, $0{,}4^2$, …, $0{,}8^2$.

b) **Calculons la somme des aires des rectangles qui contiennent *D*.**

$$\begin{aligned} B_5 &= \text{somme des aires des 5 rectangles situés « au-dessus » de la courbe} \\ &= 0{,}2 \times \left(0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}6^2 + 0{,}8^2 + 1^2\right) \\ &= 0{,}44 \end{aligned}$$

c) **Déduisons-en un encadrement de $\mathcal{A}$.**

On a : $A_5 \leqslant \mathcal{A} \leqslant B_5$ soit $0{,}24 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 0{,}44$.

On obtient un encadrement d'amplitude 0,2.

2°) Dans cette question, on généralise au cas *n* quelconque ce qui a été fait pour *n* = 5 dans la question 1°).

A_n : somme des aires des rectangles qui sont contenus dans *D*

B_n : somme des aires des rectangles qui contiennent *D*

a) **Démontrons que $A_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2}{n^3}$ et que $B_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}{n^3}$.**

$$A_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

$$B_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$$ (on laisse $\frac{n}{n}$ plutôt que 1)

On peut écrire les expressions de A_n et de B_n avec le symbole Σ :

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$B_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

On va ensuite pouvoir transformer les expressions.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{i^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{i=n-1} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{i=n-1} i^2 \end{aligned}$$

(il s'agit d'une simple mise en facteur, le $\frac{1}{n^2}$ est une constante qui ne dépend pas de *i*)

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{i^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{i=n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{i=n} i^2 \end{aligned}$$

b) **Donnons des expressions simplifiées de A_n et B_n.**

À l'aide de la formule explicite de la somme des carrés des premiers entiers naturels rappelée dans l'énoncé, on va déterminer une expression explicite de A_n et de B_n en fonction de *n*.

$$\sum_{i=1}^{i=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ (formule sommatoire que l'on peut obtenir avec un logiciel de calcul formel)

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n-1)\left[2(n-1)+1\right]}{6}$$

$$= \frac{(n-1)\left[2(n-1)+1\right]}{6n^2}$$

$$= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

c) **Déterminons le rang *n* à partir duquel on a : $\mathrm{B}_n - \mathrm{A}_n \leqslant 10^{-4}$.**

$$\mathrm{B}_n - \mathrm{A}_n = \frac{(n+1)(2n+1)-(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$= \frac{2n^2+1+3n-2n^2-1+3n}{6n^2}$$

$$= \frac{6n}{6n^2}$$

$$= \frac{1}{n}$$

On pourrait aussi le faire directement avec les expressions développées de A_n et de B_n en fonction de *n*.

$$\mathrm{B}_n - \mathrm{A}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}$$

On se place dans $\mathbb{N}^*$ pour les équivalences suivantes.

$$\frac{1}{n} \leqslant 10^{-4} \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1}{10^{-4}}$$ (comme tous les membres sont strictement positifs, on peut passer à l'inverse)

$$\Leftrightarrow n \geqslant 10^4$$

Le plus entier naturel tel que l'on ait une amplitude inférieure ou égale à 10^{-4} est n = 10 000.

d) **Déduisons-en un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à 10^{-4}.**

$\mathrm{A}_{10000} = 0,33328333...$

$\mathrm{B}_{10000} = 0,33338333...$

$\mathrm{A}_{10000} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \mathrm{B}_{10000}$

L'amplitude de l'encadrement obtenu est 10^{-4}.

Pour aller plus loin :

On va franchir un degré d'abstraction supplémentaire en passant de la méthode des grands nombres (on remplace n par de très grandes valeurs) à l'outil des limites.

$\mathrm{A}_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$	$\mathrm{B}_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$
$= \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$	$= \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$
$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$	$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$

En faisant apparaître $\frac{1}{n}$ et en utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{B}_n = \frac{1}{3}$.

Un théorème de Terminale (théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement) permet de dire que $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$.

Ce théorème dit que si (u_n), (v_n), (w_n) sont trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \mathbf{l}$ où $\mathbf{l}$ est un réel, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \mathbf{l}$.

(si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite alors (v_n) converge vers la même limite).

Cet exercice permet d'entrevoir la « méthode des rectangles » pour calculer des aires sous des courbes de fonctions.
Cette méthode sera revue en terminale.

Avec Geogebra on fait aisément apparaître les rectangles au-dessus et au-dessous de la courbe (on utilise les commandes « SommeInférieure » et « SommeSupérieure »). On voit alors bien la « perte » d'aire.

Plus généralement, l'aire sous une courbe se calculer grâce à une intégrale.

$f(x) = x^2$

On cherche une fonction F définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = f(x)$ c'est-à-dire que

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = x^2$ (la dérivée de F est égale à *f*).

Une fonction F vérifiant cette propriété est appelée une **primitive** de *f* sur $\mathbb{R}$.

La fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3}$ vérifie cette propriété.

On démontre en Terminale que l'aire du domaine est donnée par la formule $\mathcal{A} = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Il s'agit un résultat exprimé en unité d'aire.

La notion de primitive est étudiée dans un chapitre spécial en Terminale.

On verra par exemple la fonction logarithme népérien en Terminale qui est une primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{x} \qquad \mathrm{F}(x) = \ln x$

Le problème d'existence des primitives est un problème complexe qui sera abordé en Terminale.