TS1

Bac blanc du 3 mai 2012
(4 h)

Énoncé à conserver. Ne rien écrire dessus.

*

* *

<u>Résultat non souligné ou non encadré : – 1</u>

I. (3 points) On pose $I = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$.

1°) À l'aide de la formule d'intégration par parties, démontrer que l'on a : $I = -J$ et $J = I + e^{\pi} + 1$.

2°) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

II. (3 points) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Le but de l'exercice est de déterminer un encadrement de $I = \int_1^3 f(x) \, dx$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq 0$, on a : $f(x) = x \times \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$; en déduire à l'aide d'une intégration par parties, que l'on a : $I = 3\ln\left(1 - \dfrac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - e^{-x}\right) dx$.

2°) Démontrer que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) \leqslant \ln\left(1 - e^{-x}\right) \leqslant \ln\left(1 - \dfrac{1}{e^3}\right)$.

En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln\left(1 - e^{-x}\right) dx$.

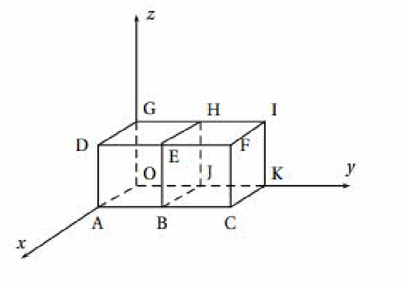
3°) Démontrer à l'aide des questions précédentes que l'on a : $a \leqslant I \leqslant 3a$ avec $a = \ln\left(\dfrac{1 - \dfrac{1}{e^3}}{1 - \dfrac{1}{e}}\right)$.

III. (4 points)

Cet exercice est un QCM qui comporte 8 questions. À chaque question, une seule des trois réponses notées a, b ou c est exacte.
Compléter le tableau donné sur la feuille de réponses. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlèvent pas de point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 2, 0), D(1, 0, 1), E(1, 1, 1), F(1, 2, 1), G(0, 0, 1), H(0, 1, 1), I(0, 2, 1), J(0, 1, 0), K(0, 2, 0) comme indiqués sur la figure ci-dessous :



1°) Le triangle GBI est :

Réponse a : isocèle. Réponse b : équilatéral. Réponse c : rectangle.

2°) Le plan d'équation $x = 1$ est le plan

Réponse a : (ABE). Réponse b : (BEH). Réponse c : (DEH).

3°) Le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{FC}$ est égal à :

Réponse a : 1. Réponse b : − 1. Réponse c : 2.

4°) Les points B, C, I, H forment :

Réponse a : un losange. Réponse b : un rectangle. Réponse c : un carré.

5°) Une représentation paramétrique de paramètre t de la droite (KE) est :

Réponse a : $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$. Réponse b : $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$. Réponse c : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

6°) Une équation du plan (GBK) est :

Réponse a : $2x + 2y - z - 2 = 0$. Réponse b : $x + y - 3 = 0$. Réponse c : $x + y + 2z = 2$.

7°) La distance du point C au plan (ADH) est :

Réponse a : $\sqrt{2}$. Réponse b : 2. Réponse c : $\frac{1}{2}$.

8°) Le volume du tétraèdre HJKB est égal à :

Réponse a : $\frac{1}{2}$. Réponse b : $\frac{1}{6}$. Réponse c : $\frac{1}{3}$.

IV. (4,5 points)

Pour chaque question, la probabilité doit être donnée sous forme d'une fraction irréductible.
Compléter les tableaux de réponse sur la feuille de réponse. Aucune justification n'est demandée sur la copie.

1°) Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.
D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.
On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

a) Calculer la probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire.
b) Calculer la probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire.
c) Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. Calculer la probabilité qu'il soit de marque M_2.

2°) Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.
Les boules sont indiscernables au toucher.
L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité d'obtenir trois boules de même couleur.
b) Calculer la probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes.
c) On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.
Calculer le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'événement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99.

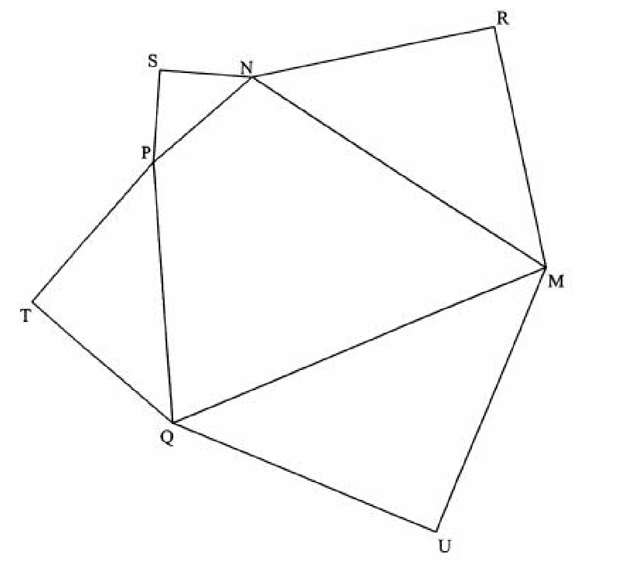
3°) Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.
On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :
- R_1 l'événement : « La première boule tirée est rouge » ;
- N_1 l'événement : « La première boule tirée est noire » ;
- R_2 l'événement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;
- N_2 l'événement : « La deuxième boule tirée est noire ».

a) Calculer la probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$.
b) Calculer la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_2$.
c) Calculer la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage.

V. (5,5 points)

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés d'une configuration.

On munit le plan orienté d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le quadrilatère MNPQ est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles MRN, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère MNPQ et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points R, S, T et U).



On désigne par :
m, *n*, *p*, *q*, les affixes respectives des points M, N, P, Q ;
r, *s*, *t*, *u* les affixes respectives des points R, S, T, U.

1°) Démontrer que l'on a : $r = \frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n$.

On admettra sans démonstration que l'on a : $s = \frac{1+i}{2}n + \frac{1-i}{2}p$, $t = \frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q$, $u = \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m$.

2°) a) Démontrer l'égalité : $u - s = i(t - r)$ (E).

b) Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments [RT] et [SU], d'une part, et pour les droites (RT) et (SU) d'autre part ?

3°) Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.

V. (5,5 points)

Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on donne les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{C}} = 2$ et $z_{\mathrm{D}} = 5 - \mathrm{i}$.

Aucun graphique n'est demandé sur la copie.

1°) On considère la transformation *f* du plan *P* qui à tout point M d'affixe *z* associe le point M' d'affixe $z' = (1+\mathrm{i})z + 3 - \mathrm{i}$.

a) Démontrer que *f* est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω, le rapport et l'angle.

b) Déterminer les images des points A et B par *f*.

2°) On considère la transformation *g* du plan *P* qui à tout point M d'affixe *z* associe le point M' d'affixe $z' = (-1+\mathrm{i})z + 5 + 5\mathrm{i}$.

Démontrer que *g* est une similitude directe et donner sans détailler la démarche ses éléments caractéristiques (on vérifiera en particulier que *g* a le même centre que *f*).

3°) On pose $h = g \circ f$.

a) Déterminer sans utiliser les nombres complexes la nature et les éléments caractéristiques de *h*.

b) On note E l'image du point C par *g*.

Déterminer sans calcul (c'est-à-dire sans utiliser les nombres complexes) l'image du point A par *h*.
En déduire, toujours sans calcul, que les points A, E et Ω sont alignés.

Feuille de réponses du bac blanc du 3 mai 2012

Prénom et nom : ……………………..…………………………………………………….

I (3)	II (3)	III (4)	IV (4,5)	V (5,5)
………	………	………	………	………

III. QCM

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	6°)	7°)	8°)	Total
Réponse									

IV.

1°)	a)	……………	2°)	a)	……………	3°)	a)	……………
	b)	……………		b)	……………		b)	……………
	c)	……………		c)	……………		c)	……………

Corrigé du contrôle du 3-5-2012

I. $\mathrm{I}=\int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$ $\qquad$ $\mathrm{J}=\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$

1°) **Démontrons que $\mathrm{I}=-\mathrm{J}$ et $\mathrm{J}=\mathrm{I}+e^{\pi}+1$.**

• On pose $u(x)=e^x$ et $v'(x)=\cos x$.
On a alors $u'(x)=e^x$ et $v(x)=\sin x$.

$$\mathrm{I}=\left[\,e^x \sin x\,\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\times e^x \, dx$$
$$=e^{\pi}\sin\pi-e^0\sin 0-\mathrm{J}$$

Donc **$\mathrm{I}=-\mathrm{J}$**.

• On pose $u(x)=e^x$ et $v'(x)=\sin x$.
On a alors $u'(x)=e^x$ et $v(x)=-\cos x$.

$$\mathrm{J}=\left[-e^x\cos x\,\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\times(-\cos x)\, dx$$
$$=-e^{\pi}\cos\pi+e^0\cos 0+\int_0^{\pi}e^x\times\cos x\, dx$$
$$=e^{\pi}+1+\int_0^{\pi}e^x\cos x\, dx$$

Donc **$\mathrm{J}=\mathrm{I}+e^{\pi}+1$**.

2°) **Déduisons-en les valeurs exactes de I et de J.**

On a $\mathrm{I}=-\mathrm{J}$ donc $\mathrm{J}=-\mathrm{J}+e^{\pi}+1$.

Par suite, $2\mathrm{J}=e^{\pi}+1$.

D'où **$\mathrm{J}=\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$**.

Par suite, on a : **$\mathrm{I}=-\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$**.

II. $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

$$\mathrm{I}=\int_1^3 f(x)\, dx$$

1°)

• **Démontrons que pour tout réel $x\neq 0$, on a : $f(x)=x\times\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.**

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f(x)=\frac{x}{e^x-1}$$
$$=\frac{x}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$$
$$=\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$$

• **Déduisons-en à l'aide d'une intégration par parties, que**
$\mathrm{I}=3\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)-\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)-\displaystyle\int_1^3\ln\left(1-e^{-x}\right)\, dx$.

On pose $u(x)=x$ et $v'(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

On a alors $u'(x)=1$ et $v(x)=\ln\left(1-e^{-x}\right)$.

On a $\mathrm{I}=\left[\,x\ln\left(1-e^{-x}\right)\,\right]_1^3-\displaystyle\int_1^3\ln\left(1-e^{-x}\right)\, dx$

Donc **$\mathrm{I}=3\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)-\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)-\displaystyle\int_1^3\ln\left(1-e^{-x}\right)\, dx$**.

2°) **Démontrons que si $1\leqslant x\leqslant 3$, alors $\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\leqslant\ln\left(1-e^{-x}\right)\leqslant\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$.**

On a $1\leqslant x\leqslant 3$.

On a successivement :
$-1\geqslant -x\geqslant -3$
$e^{-1}\geqslant e^{-x}\geqslant e^{-3}$ (car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$)
$1-e^{-1}\leqslant 1-e^{-x}\leqslant 1-e^{-3}$
$\ln\left(1-e^{-1}\right)\leqslant\ln\left(1-e^{-x}\right)\leqslant\ln\left(1-e^{-3}\right)$ (car la fonction logarithme népérien est croissante sur $]0\,;+\infty[$)

Ainsi : **$\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\leqslant\ln\left(1-e^{-x}\right)\leqslant\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$**.

Déduisons-en un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)\ dx$.

$\forall x \in [1\,;3] \quad \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leqslant \ln\left(1-e^{-x}\right) \leqslant \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$

Donc $\displaystyle\int_1^3 \ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\ dx \leqslant \int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)\ dx \leqslant \int_1^3 \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)\ dx$

$\displaystyle(3-1)\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leqslant \int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)\ dx \leqslant (3-1)\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$ (on applique la « règle » de calcul de l'intégrale d'une fonction constante : $\displaystyle\int_a^b k\ dx = k(b-a)$)

D'où : $\displaystyle 2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leqslant \int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)\ dx \leqslant 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$.

3°) **Démontrons que $a \leqslant I \leqslant 3a$ avec $a = \ln\left(\dfrac{1-\frac{1}{e^3}}{1-\frac{1}{e}}\right)$.**

On a : $\displaystyle I = 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)\ dx$.

D'après la question précédente, on a : $\displaystyle 2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leqslant \int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)\ dx \leqslant 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$.

Donc $\displaystyle -2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \geqslant -\int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)\ dx \geqslant -2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$.

Donc $3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \geqslant I \geqslant 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$.

D'où $3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - 3\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \geqslant I \geqslant \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

Donc $3\left[\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\right] \geqslant I \geqslant \ln\left(\dfrac{1-\frac{1}{e^3}}{1-\frac{1}{e}}\right)$.

On en déduit que : $3\ln\left(\dfrac{1-\frac{1}{e^3}}{1-\frac{1}{e}}\right) \geqslant I \geqslant \ln\left(\dfrac{1-\frac{1}{e^3}}{1-\frac{1}{e}}\right)$.

Donc : $a \leqslant I \leqslant 3a$ avec $a = \ln\left(\dfrac{1-\frac{1}{e^3}}{1-\frac{1}{e}}\right)$.

III.

Question	**1°)**	**2°)**	**3°)**	**4°)**	**5°)**	**6°)**	**7°)**	**8°)**
Réponse	a	a	b	b	c	c	a	b

IV.

	a)	$\frac{6}{25}$		a)	$\frac{5}{84}$		a)	$\frac{4}{7}$
1°)	b)	$\frac{33}{50}$	2°)	b)	$\frac{2}{7}$	3°)	b)	$\frac{15}{56}$
	c)	$\frac{4}{11}$		c)	95		c)	$\frac{5}{8}$

1°)

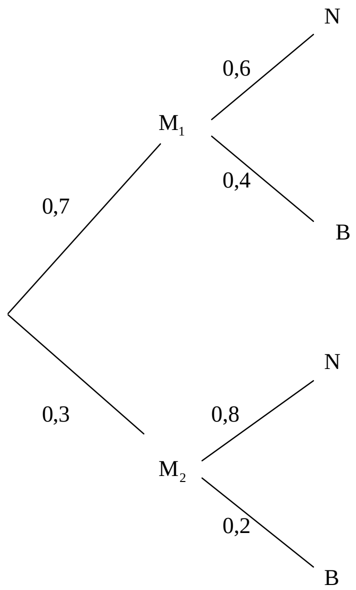
On dresse un arbre avec les événements suivants :

N : « Le client a acheté un ordinateur de couleur noire »

B : « Le client a acheté un ordinateur de couleur blanche »

M_1 : « Le client a acheté un ordinateur de marque M_1 »

M_2 : « Le client a acheté un ordinateur de marque M_2 »



a) Probabilité qu'un client ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire :

$$P\left(\text{M}_2 \cap \text{N}\right) = 0,3 \times 0,8 = 0,24 = \frac{6}{25}$$

b) Probabilité qu'un client ait acheté un ordinateur de couleur noire :

$$\begin{aligned} P\left(\text{N}\right) &= P\left(\text{M}_1 \cap \text{N}\right) + P(\text{M}_2 \cap \text{N}) \\ &= 0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,8 \\ &= \frac{33}{50} \end{aligned}$$

c) Probabilité qu'un client ait acheté un ordinateur de marque M_2 sachant qu'il est noir :

$$\begin{aligned} P_{\text{N}}\left(\text{M}_2\right) &= \frac{P\left(\text{N} \cap \text{M}_2\right)}{P\left(\text{N}\right)} \\ &= \frac{12}{50} \times \frac{50}{33} \\ &= \frac{4}{11} \end{aligned}$$

2°)

a)

$$\begin{aligned} P\left(\text{« obtenir trois boules de même couleur »}\right) &= \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{9}{3}} \\ &= \frac{4+1}{84} \\ &= \frac{5}{84} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P\left(\text{« obtenir trois boules de couleurs différentes »}\right) &= \frac{\binom{4}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} \\ &= \frac{4 \times 2 \times 3}{84} \\ &= \frac{24}{84} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P\left(\text{« obtenir trois boules jaunes lors d'un tirage »}\right) &= \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} \\ &= \frac{4}{84} \\ &= \frac{1}{21} \end{aligned}$$

Donc la probabilité de ne pas tirer trois boules jaunes est égale à : $1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$.

On répète n tirages simultanés.

$$P\left(\text{« obtenir au moins une fois trois boules jaunes »}\right) = 1 - P\left(\text{« ne jamais obtenir trois boules jaunes »}\right)$$

$$P\left(\text{« obtenir au moins une fois trois boules jaunes »}\right) = 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n$$

On cherche donc n tel que $1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n \geqslant 0,99 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{20}{21}\right)^n \leqslant 0,01$$

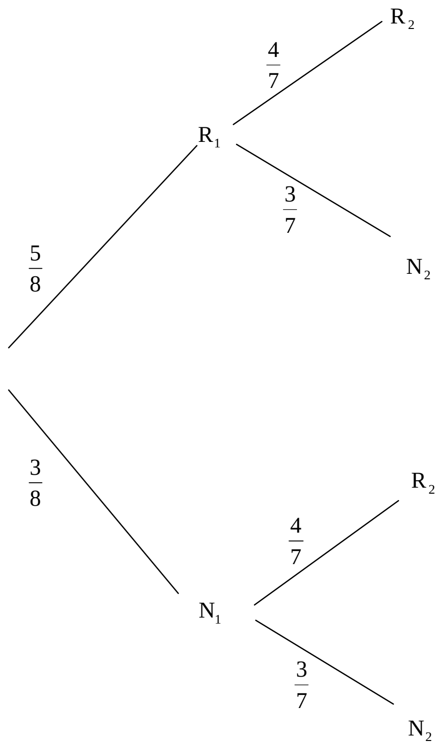
$$\Leftrightarrow n\ln\frac{20}{21} \leqslant \ln 0,01$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0,01}{\ln\frac{20}{21}}$$

D'après la calculatrice, on a $\dfrac{\ln 0,01}{\ln\frac{20}{21}} = 94,38\ldots$.

Donc le plus petit entier naturel n cherché est 95.

3°)



a)

$$P_{R_1}(R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)}$$
$$= \frac{\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}}{\frac{5}{8}}$$
$$= \frac{4}{7}$$

b)

$$P(R_1 \cap N_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7}$$
$$= \frac{15}{56}$$

c)

$$P(\text{« tirer une boule rouge au deuxième tirage »}) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2)$$
$$= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}$$
$$= \frac{35}{8 \times 7}$$
$$= \frac{5}{7}$$

V.

1°) **Démontrons que l'on a : $r = \dfrac{1+i}{2}m + \dfrac{1-i}{2}n$.**

Le triangle MNR est rectangle isocèle direct en R.

On a donc : $\begin{cases} RN = RM \\ \left(\overrightarrow{RN} ; \overrightarrow{RM}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$.

Par conséquent, $M = R_{\left(R ; \frac{\pi}{2}\right)}(N)$.

On peut donc écrire l'égalité $z_M = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_N - z_R) + z_R$ ce qui donne successivement :

$m = i(n-r)+r$

$m = in - ir + r$

$m - in = r(1-i)$

$$r = \frac{m - in}{1-i}$$

$$= \frac{(m-in)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{m - in + im + n}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{m - in + im + n}{2}$$

$$= \frac{(1+i)m + (1-i)n}{2}$$

$$= \frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n$$

Autre façon :

$$m - r = i\,(n-r)$$
$$(1-i)r = m - in$$
$$r = \frac{m}{1-i} - \frac{i}{1-i}n$$
$$r = \frac{1+i}{2}m - \frac{i(1+i)}{2}n$$
$$r = \frac{1+i}{2}m - \frac{-1+i}{2}n$$
$$r = \frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n$$

$$\boxed{\begin{aligned} s &= \frac{1+i}{2}n + \frac{1-i}{2}p \\ t &= \frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q \\ u &= \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m \end{aligned}}$$

2°) a) **Démontrons l'égalité : $u - s = i(t-r)$ (E).**

Calcul de $u - s$:

$$u - s = \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m - \left(\frac{1+i}{2}n + \frac{1-i}{2}p\right)$$
$$= \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m - \frac{1+i}{2}n - \frac{1-i}{2}p$$

Calcul de $i(t-r)$:

$$i(t-r) = i\left(\frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q - \frac{1+i}{2}m - \frac{1-i}{2}n\right)$$
$$= \frac{i-1}{2}p + \frac{i+1}{2}q - \frac{i-1}{2}m - \frac{i+1}{2}n$$
$$= \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m - \frac{i+1}{2}n - \frac{1-i}{2}p$$

On en déduit que : $u - s = i(t-r)$ (E).

Autre façon :

$$u - s = \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m - \left(\frac{1+i}{2}n + \frac{1-i}{2}p\right)$$
$$= \frac{1+i}{2}(q-n) + \frac{1-i}{2}(m-p)$$

$$t - r = \left(\frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q\right) - \left(\frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n\right)$$
$$= \frac{1+i}{2}(p-m) + \frac{1-i}{2}(q-n)$$

$$i(t-r) = \frac{-1+i}{2}(p-m) + \frac{1+i}{2}(q-m)$$
$$= \frac{1-i}{2}(m-p) + \frac{1+i}{2}(q-m)$$

b) Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments [RT] et [SU], d'une part, et pour les droites (RT) et (SU) d'autre part ?

• **On utilise le module.**

D'après l'égalité (E), on a : $|u-s| = |i(t-r)|$.

On a : $|u-s| = |i| \times |t-r|$ d'où $SU = RT$ (car $|i| = 1$).

Les segments [RT] et [SU] sont de même longueur.

• **On utilise l'argument.**

L'égalité (E) donne $\arg\dfrac{u-s}{t-r}=\arg \mathrm{i}\quad(2\pi)$ ce qui donne $\arg\dfrac{u-s}{t-r}=\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$.

D'où $\left(\overrightarrow{\mathrm{RT}}\,;\overrightarrow{\mathrm{SU}}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$.

On en déduit que (RT) ⊥ (SU).

3°) **Démontrons que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.**

L'isobarycentre des points M, N, P, Q est le barycentre des points pondérés (M ; 1), (N ; 1), (P ; 1), (Q ; 1).

L'isobarycentre des points R, S, T, U est le barycentre des points pondérés (R ; 1), (S ; 1), (T ; 1), (Q ; 1).
On calcule la somme $r+s+t+u$.

$$r+s+t+u=\frac{1+\mathrm{i}}{2}m+\frac{1-\mathrm{i}}{2}n+\frac{1+\mathrm{i}}{2}n+\frac{1-\mathrm{i}}{2}p+\frac{1+\mathrm{i}}{2}p+\frac{1-\mathrm{i}}{2}q+\frac{1+\mathrm{i}}{2}q+\frac{1-\mathrm{i}}{2}n$$

$$=\frac{1+\mathrm{i}}{2}(m+n+p+q)+\frac{1-\mathrm{i}}{2}(n+p+q+m)$$

$$=m+n+p+q$$

Donc $\dfrac{m+n+p+q}{4}=\dfrac{r+s+t+u}{4}$

On en déduit que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.

Spécialité

V.

$z_{\mathrm{A}}=\mathrm{i}$ $\quad z_{\mathrm{B}}=1-\mathrm{i}$ $\quad z_{\mathrm{C}}=2$ $\quad z_{\mathrm{D}}=5-\mathrm{i}$

1°) *f* : transformation du plan *P* dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M}(z)$ associe le point $\mathrm{M}'(z')$ avec
$z'=(1+\mathrm{i})z+3-\mathrm{i}$

Démontrons que *f* est une similitude directe.

f admet une expression complexe de la forme $z'=az+b$ avec $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ donc *f* est une similitude directe.

De plus, $a\neq1$ donc *f* n'est pas une translation.

(Cette phrase n'était pas demandée dans l'énoncé mais il n'était pas inintéressant de la mettre pour justifier la suite de la recherche.)

$|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$

$\arg(1+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}\quad(2\pi)$

(On pourrait écrire : $1+\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$)

On sait que le centre de *f* est invariant par *f*.

On cherche les points M du plan *P* d'affixe *z* tels que $f(\mathrm{M})=\mathrm{M}$ soit $\mathrm{M}=\mathrm{M}'\quad(1)$.

$$\begin{aligned}(1)\ &\Leftrightarrow z=z'\\&\Leftrightarrow z=(1+\mathrm{i})z+3-\mathrm{i}\\&\Leftrightarrow 0=0+\mathrm{i}z+3-\mathrm{i}\\&\Leftrightarrow \mathrm{i}z=-3+\mathrm{i}\\&\Leftrightarrow z=\frac{-3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\\&\Leftrightarrow z=\frac{-3}{\mathrm{i}}+\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\\&\Leftrightarrow z=3\mathrm{i}+1\end{aligned}$$

Conclusion : *f* est une similitude directe de centre $\Omega(1+3\mathrm{i})$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

On peut écrire $f=S_{\left(\Omega,\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)}$.

b) **Déterminons les images des points A et B par *f*.**

Les notations suivantes n'ont pas besoin d'être précisées :

- Les images des points A et B sont notées A' et B'.
- Leurs affixes respectives sont notées $z_{\mathrm{A}'}$ et $z_{\mathrm{B}'}$.

$$\begin{aligned}z_{\mathrm{A}'}&=(1+\mathrm{i})z_{\mathrm{A}}+3-\mathrm{i}\\&=(1+\mathrm{i})\times\mathrm{i}+3-\mathrm{i}\\&=\mathrm{i}-1+3-\mathrm{i}\\&=2\\&=z_{\mathrm{C}}\end{aligned}$$

L'image du point A par *f* est le point C (on peut écrire $f(\mathrm{A})=\mathrm{C}$).

$$\begin{aligned}z_{\mathrm{B}'}&=(1+\mathrm{i})z_{\mathrm{B}}+3-\mathrm{i}\\&=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})+3-\mathrm{i}\\&=1+1+3-\mathrm{i}\\&=5-\mathrm{i}\\&=z_{\mathrm{D}}\end{aligned}$$

L'image du point B par *f* est le point D (on peut écrire : $g(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$).

2°) g : transformation du plan P dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M}(z)$ associe le point $\mathrm{M}'(z')$ avec
$z' = (-1+\mathrm{i})z + 5 + 5\mathrm{i}$

Démontrons que *g* est une similitude directe.

g admet une expression complexe de la forme $z' = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ donc g est une similitude directe.
De plus, $a \neq 1$ donc g n'est pas une translation.

$|-1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$

$\arg(-1+\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{4} \quad (2\pi)$

Conclusion : *g* est une similitude directe de centre Ω (1 + 3i), de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

On peut écrire $g = S_{\left(\Omega,\, \sqrt{2},\, \frac{3\pi}{4}\right)}$.

3°) $h = g \circ f$

a) **Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de *h*.**

D'après une propriété du cours sur la composée de deux similitudes directes de même centre, *h* est la similitude de centre Ω, de rapport $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ et d'angle $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$.

On peut donc dire que *h* est l'homothétie de centre Ω et de rapport – 2.

b) $g(\mathrm{C}) = \mathrm{E}$

Déterminons l'image du point A par *h*.

$$\begin{aligned} h(\mathrm{A}) &= g\left(f(\mathrm{A})\right) \\ &= g(\mathrm{C}) \\ &= \mathrm{E} \end{aligned}$$

Donc l'image du point A par *h* est E.

Déduisons-en que les points A, E et Ω sont alignés.

$h(\mathrm{A}) = \mathrm{E}$

Or *h* est une homothétie de centre Ω.

Donc A, E, Ω sont alignés.