TS1

Bac blanc du 17 février 2012 (4 h)

Énoncé à conserver. Ne rien écrire, ne rien surligner dessus.

*

* *

Résultat non souligné ou non encadré : – 1

I. (5 points) Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.
On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :
• Parmi les personnes contaminées, la probabilité qu'une personne ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
• Parmi les personnes non contaminées, la probabilité qu'une personne ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».

1°) Calculer la probabilité pour que le test soit positif (donner la valeur exacte sous forme décimale).

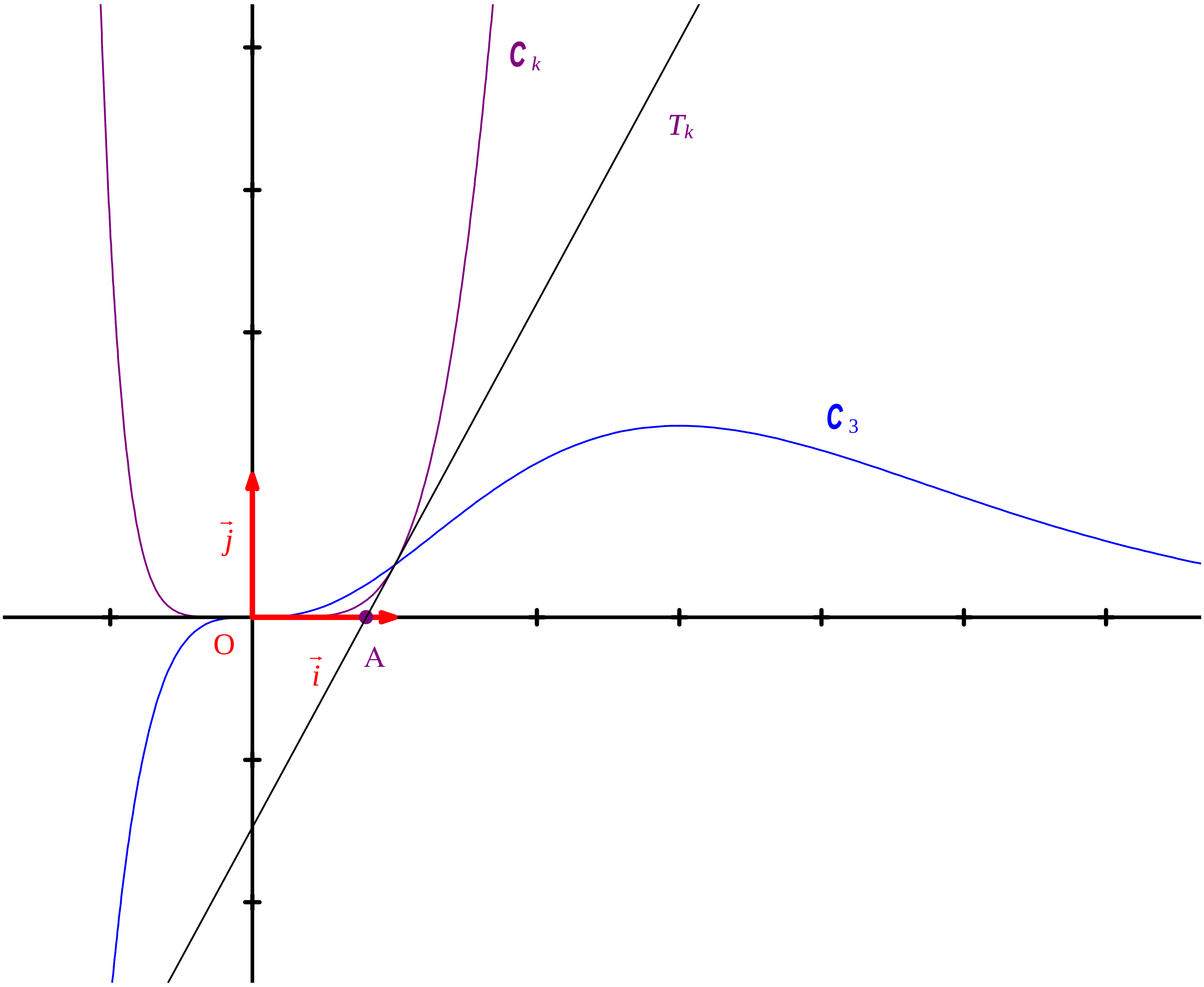
2°) a) Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de "chances" que la personne soit contaminée ».
b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. Donner le résultat sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

3°) On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard. On considère que les tirages sont indépendants.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.
a) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.
Donner le résultat sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
b) Calculer l'espérance et la variance de X.

II. (6 points) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathcal{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathcal{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}\,;0\right)$.



1°) Dans cette question, on s'intéresse à la fonction f_1 (sa courbe représentative $\mathcal{C}_1$ n'est pas donnée sur le graphique ci-dessus).

a) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.

Mettre le (ou les) extremum(s) de f_1 dans le tableau de variation (valeurs exactes).

2°) Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.

3°) Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x, $f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$.

4°) Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.

Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

5°) Déterminer la valeur de k.

III. (4 points) QCM

Pour chaque question, une ou plusieurs des quatre réponses proposées sont exactes.
Compléter le tableau donné sur la feuille annexe en indiquant les réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$, $z_D = -i$.

1°) L'ensemble des points d'affixe z telle que $(i + 1)\, z + (i - 1)\, \overline{z} = 2i$ est :

a. la droite (AB),

b. la droite (BC),

c. la droite (CD),

d. la droite (AD).

2°) L'ensemble des points d'affixe z telle que $|\, z + i \,| = |\, z - 1 \,|$ est :

a. la médiatrice du segment [AB],

b. la médiatrice du segment [BC],

c. la médiatrice du segment [CD],

d. la médiatrice du segment [AD].

3°) L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z - i}{z + 1}$ soit un imaginaire pur est :

a. la droite (CD) privée du point C,

b. le cercle de diamètre [BC] privé du point C,

c. le cercle de diamètre [CD] privé du point C,

d. la médiatrice du segment [AB].

4°) L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z - i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :

a. le demi-cercle de diamètre [BD] passant par A,

b. la droite (BD),

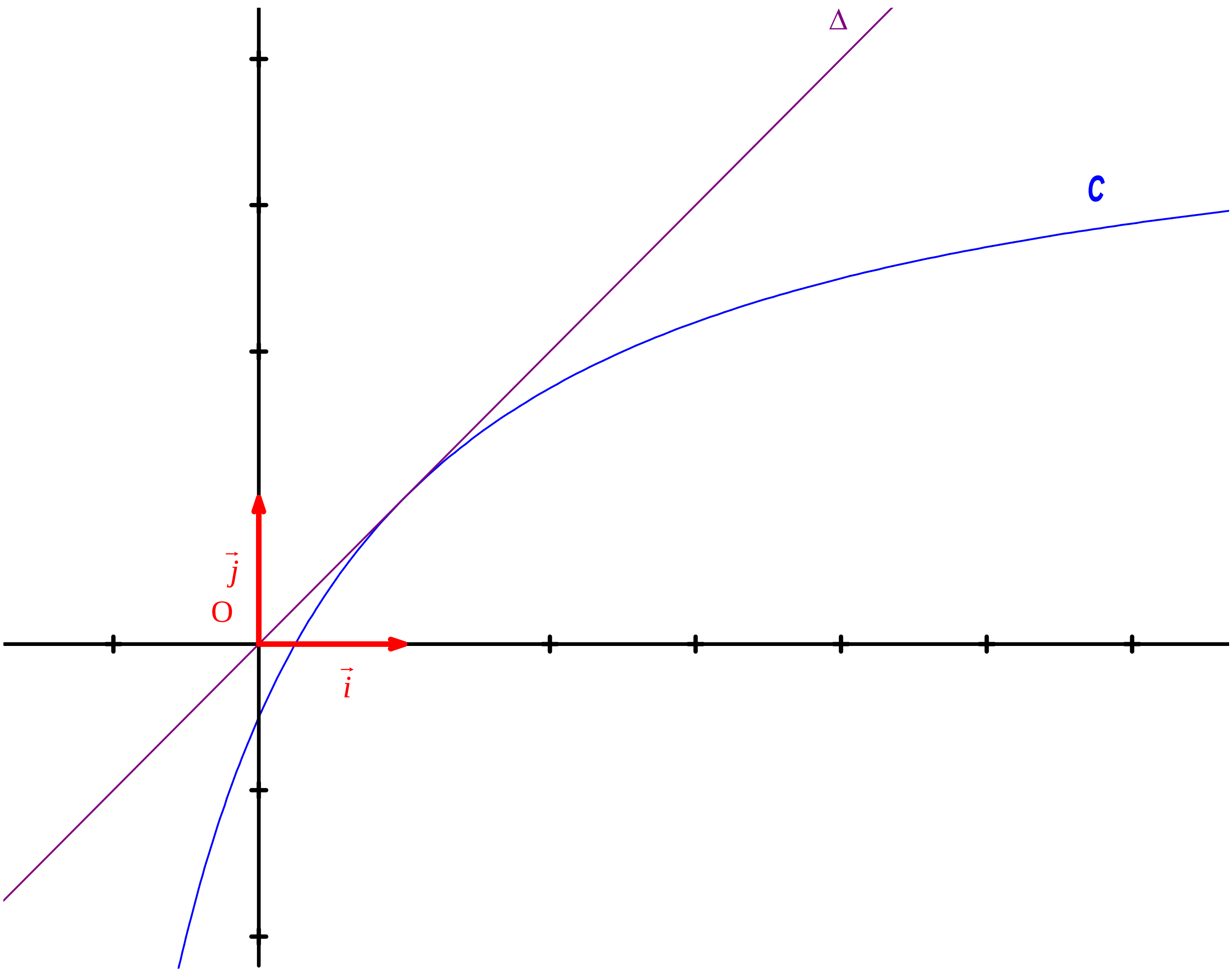
c. la demi-droite]BD) d'origine B passant par D privée de B,

d. le cercle de diamètre [BD] privé de B et D.

IV. (5 points) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1°) a) (à faire sur la feuille annexe)
Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire avec soin u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction (sans faire aucun calcul).

b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2°) a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.

b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1°) b).

3°) Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression u_n en fonction de n.

Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

IV. (5 points)

1°) On considère l'équation $11x - 7y = 5$ (E) où x et y sont des entiers relatifs.
a) Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.
b) En déduire une solution particulière de l'équation (E).
c) Résoudre l'équation (E).
d) Dans le plan rapporté à un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.
Déterminer le nombre de points de la droite $\mathcal{D}$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2°) On considère l'équation $11\,x^2 - 7\,y^2 = 5$ (F), où x et y sont des entiers relatifs.
a) Démontrer que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.
b) Soit x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
c) En déduire que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3°) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\,;\,y)$ n'est pas solution de (F).
Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

Feuille de réponses du bac blanc du 17 février 2012

Prénom et nom :

……………………………………………………….

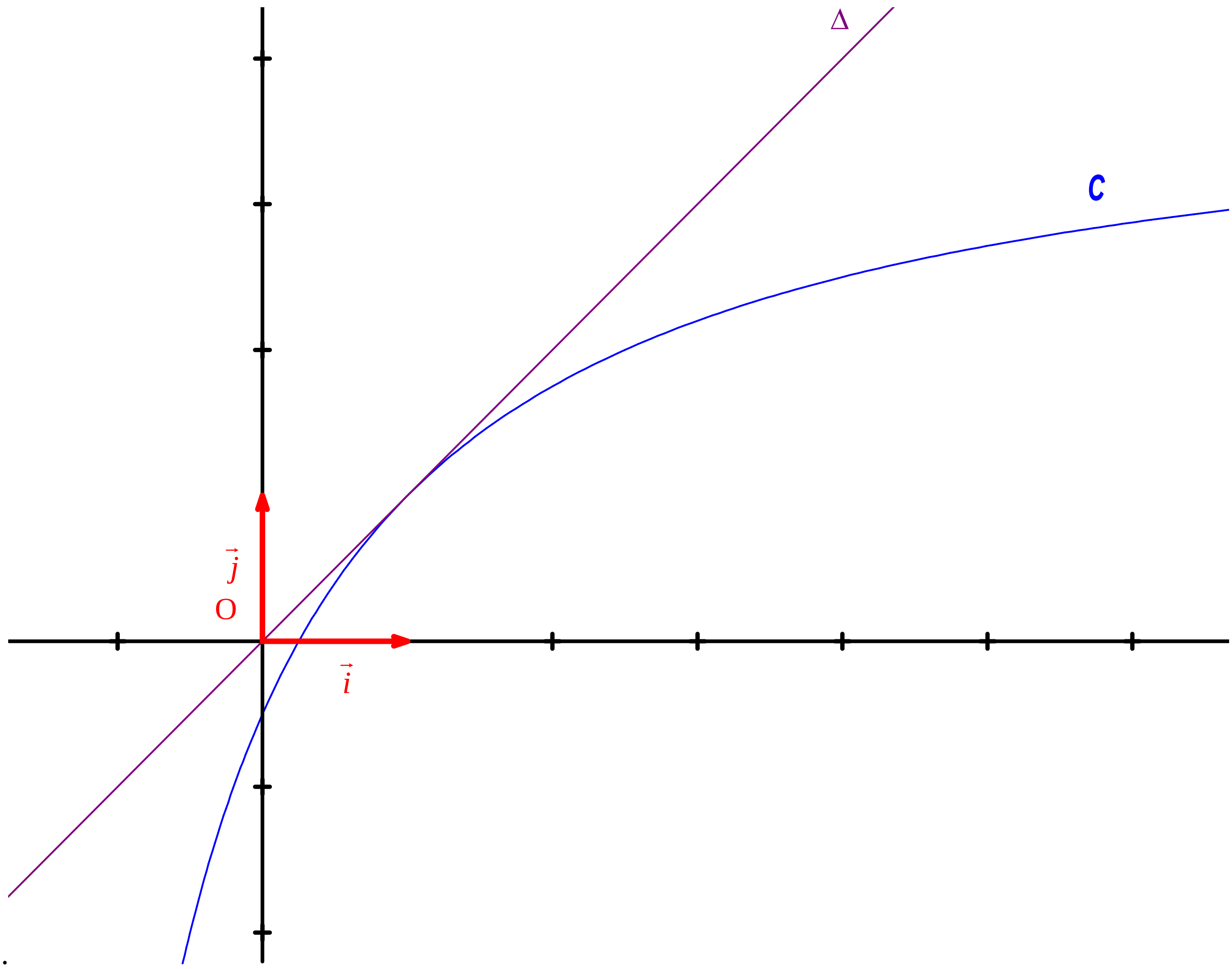
I (5)	II (6)	III (4)	IV (5)
………	………	………	………

III. QCM

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	Total
Réponse					

IV.

1°) a) Construction de u_1, u_2 et u_3



Quelques recommandations à respecter pour les exercices I et II :

● Tirer les traits de fraction à la règle.

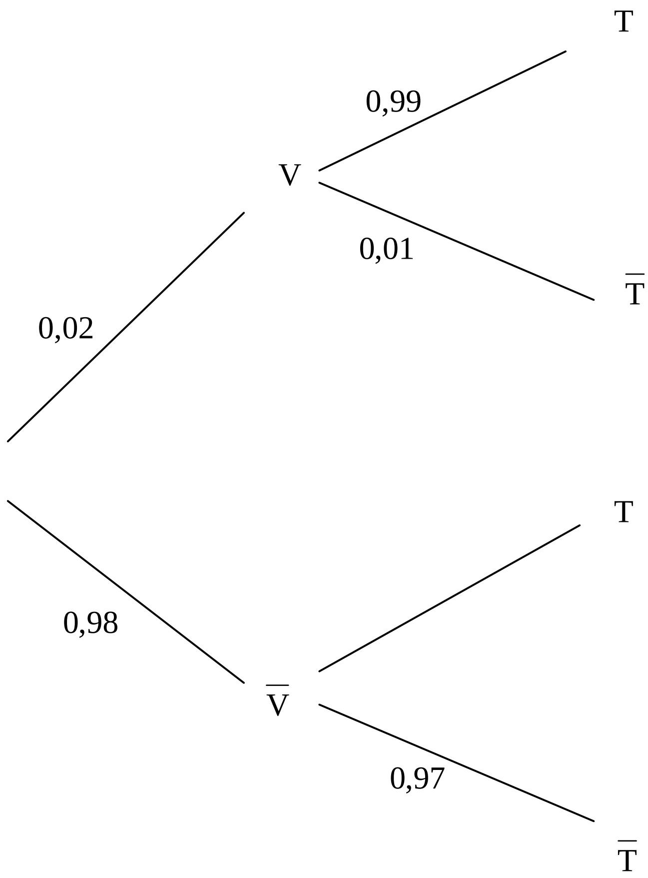
● Faire les tableaux de variations ainsi que les flèches de variation la règle. Ne pas oublier les valeurs d'annulation éventuelles de la dérivée.

● Justifier chaque fois la dérivabilité par une phrase du type « *f* est dérivable sur …. comme fonction … »

● Quantifier les égalités : « $\forall x \in \ldots \quad f'(x) = \ldots$ ».

Corrigé du bac blanc du 17 février 2012

I.



1°) **Calculons la probabilité pour que le test soit positif.**

Les événements V et $\overline{V}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on :

P (T) = P (T $\cap$ V) + P (T $\cap$ $\overline{V}$)

$= 0{,}02 \times 0{,}99 + 0{,}98 \times 0{,}03$

$= 0{,}0198 + 0{,}0294$

$= 0{,}0492$

La probabilité que le test soit positif est 0,0492.

2°) a) **Justifions par un calcul la phrase :**
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de "chances" que la personne soit contaminée ».

On calcule $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)}$

$= \dfrac{0{,}0198}{0{,}0492}$

$= 0{,}402439024\ldots$

Donc la phrase est vérifiée.

b) **Déterminons la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.**

$$P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \frac{P\left(\overline{V} \cap \overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}$$
$$= \frac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,0492}$$
$$= \frac{0,9506}{0,9508}$$
$$= 0,999789650\ldots$$

$P_{\overline{T}}(\overline{V}) \approx 0,9998$ (valeur approchée à 10^{-4} près)

3°)

a) **Calculons la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.**

On est dans une situation de schéma de Bernoulli (répétition d'une même épreuve de Bernoulli dans des conditions identiques indépendantes).

X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,02.

$$P\,(X \geqslant 2) = 1 - P\,(X = 0) + P\,(X = 1)$$
$$= 1 - \left[\binom{10}{0} \times 0,02^0 \times 0,98^{10} + \binom{10}{1} \times 0,02^1 \times 0,98^9\right]$$
$$= 0,016177640\ldots$$

b) **Calculons l'espérance et la variance de X.**

$E(X) = 10 \times 0,02 = 0,2$

$V(X) = 10 \times 0,02 \times 0,98 = 0,196$

II. $f_n(x)=x^n\mathrm{e}^{-x}$

1°) $f_1(x)=x\mathrm{e}^{-x}$

a) Déterminons les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

• Limites de la fonction f_1 en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}=+\infty\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim_{x\to-\infty} f_1(x)=-\infty.$$

• Limites de la fonction f_1 en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}=0\end{array}\right\} \text{ donc on rencontre une forme indéterminée du type « } 0\times\infty \text{ ».}$$

Afin de lever cette indétermination, on effectue une transformation d'écriture.

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f_1(x)=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}}.$$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right)=+\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$.

b) Étudions les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.

La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \begin{aligned} f_1'(x)&=1\times\mathrm{e}^{-x}+x\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\\ &=(1-x)\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
SGN de $1-x$		$+$	0	$-$	
SGN de e^{-x}		$+$		$+$	
SGN de $f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f_1		$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

$f_1(1) = 1 \times \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

La fonction f_1 est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1]$ et strucrement décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

2°) Démontrons que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et un autre point.

On calcule :

$$f_n(0) = 0^n \times \mathrm{e}^{-0} = 0$$
$$f_n(1) = 1^n \times \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

On en déduit que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et par le point de coordonnées $\left(\mathrm{e}\,;\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

3°) Vérifions que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x, $f\,'_n(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} f_n\,'(x) &= nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} + x^n\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

4°) Validons la conjecture sur le maximum de la fonction f_3.

D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f\,'_3(x) = x^2(3-x)\mathrm{e}^{-x}$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
SGN de x^2		$+$	0	$+$		$+$	
SGN de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
SGN de e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
SGN de $f_3\,'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f_3		$\nearrow$			$\dfrac{27}{\mathrm{e}^3}$	$\searrow$	

On en déduit que la fonction f_3 admet un maximum en 3.

5°) Déterminons la valeur de *k*.

La droite T_k est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 1.

Donc T_k a pour équation $y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1)$.

Or $f_k(1) = \frac{1}{e}$ et $f'_k(1) = (k-1)\frac{1}{e}$

T_k a pour équation $y = (k-1)\frac{1}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$.

Comme T_k coupe passe par le point $A\left(\frac{4}{5}\,;0\right)$, on peut écrire : $0 = (k-1)\frac{1}{e}(\frac{4}{5}-1) + \frac{1}{e}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 0 = (k-1) \times \frac{1}{e} \times (-\frac{1}{5}) + \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{e}\left[(k-1) \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 1\right]$$

$$\Leftrightarrow 0 = 1 - \frac{k-1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k-1}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow k = 6$$

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}\,;0\right)$.

On peut noter de manière intéressante que le graphique donné dans l'énoncé ne permet pas de voir la courbe $\mathcal{C}_k$ toute entière (en particulier le point correspondant à l'extremum n'apparaît pas).

III. QCM

A(1) B(i) C(− 1) D(− i)

Question	**1°)**	**2°)**	**3°)**	**4°)**
Réponse	a	b et d	b	c

1°) Notons E l'ensemble des points M d'affixe z telle que $(\mathrm{i} + 1)\, z + (\mathrm{i} - 1)\, \overline{z} = 2\mathrm{i}$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow (\mathrm{i} + 1)\,(x + \mathrm{i}y) + (\mathrm{i} - 1)\,(x - \mathrm{i}y) = 2\mathrm{i}$
$\quad\Leftrightarrow 2\mathrm{i}x + 2\mathrm{i}y = 2\mathrm{i}$
$\quad\Leftrightarrow x + y = 1$
$\quad\Leftrightarrow y = -x - 1$

On reconnaît l'équation réduite de la droite (AB).

2°) Notons F l'ensemble des points M d'affixe z telle que $| z + \mathrm{i} | = | z - 1 |$.

A (1) D($-$ i)

Soit M un point quelconque du plan complexe d'affixe z.

$| z + \mathrm{i} |$ représente la distance DM.

$| z - 1 |$ représente la distance AM.

$\mathrm{M} \in F \Leftrightarrow \mathrm{DM} = \mathrm{AM}$

L'ensemble F est la médiatrice est donc la médiatrice du segment [AD].

En faisant la figure, on s'aperçoit facilement que la médiatrice de [AD] est aussi la médiatrice de [BC].
En effet, on démontre très facilement que le quadrilatère ABCD est un carré.
Donc la médiatrice de chaque côté est un axe de symétrie.

On peut donc dire aussi que l'ensemble F est la médiatrice de [BC].

3°) On note G l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+1}$ soit un imaginaire pur.

1ère méthode : en repassant par la forme algébrique (méthode calculatoire)

Soit M un point du plan complexe d'affixe z avec $z \neq -1$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1 ; 0)$.

Exprimons $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+1}$ en fonction de x et y.

On a : $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+1}=\dfrac{x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}y+1}$

$$=\frac{x+\mathrm{i}(y-1)}{(x+1)+\mathrm{i}y}$$

$$=\frac{\left[x+\mathrm{i}(y-1)\right]\left[(x+1)-\mathrm{i}y\right]}{\left[(x+1)+\mathrm{i}y\right]\left[(x+1)-\mathrm{i}y\right]}$$

$$=\frac{x(x+1)+y(y-1)+\mathrm{i}\left[-xy+(x+1)(y-1)\right]}{(x+1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2+x-y+\mathrm{i}(-x+y-1)}{(x+1)^2+y^2}$$

On a donc $\operatorname{Re}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+1}=\dfrac{x^2+y^2+x-y}{(x+1)^2+y^2}$ et $\operatorname{Im}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+1}=\dfrac{-x+y-1}{(x+1)^2+y^2}$.

Donc $\mathrm{M}\in G\Leftrightarrow \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+1}\in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+1}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2+x-y}{(x+1)^2+y^2}=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+x-y=0$ (puisque le dénominateur est non nul)

$\Leftrightarrow x^2+x+y^2-y=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

L'ensemble G est donc le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, privé du point C.

Ω est le milieu du segment [BC] car $z_\Omega=\dfrac{z_\mathrm{B}+z_\mathrm{C}}{2}$.

BC = $\sqrt{2}$

Donc l'ensemble G est le cercle de diamètre [BC] privé du point C.

2e méthode : utilisation de l'argument (méthode plus élégante)

Soit M un point du plan complexe d'affixe z avec $z \neq -1$.

$$\text{M} \in G \Leftrightarrow \frac{z-\text{i}}{z+1} \in \text{i}\,\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z-\text{i}}{z+1} = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\text{CM}}, \overrightarrow{\text{BM}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\text{MC}}, \overrightarrow{\text{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$$

L'ensemble G est le cercle de diamètre [BC] privé du point C.

4°) On note H l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\arg(z - \text{i}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$\arg(z - \text{i})$ existe si et seulement si $z - \text{i} \neq 0$

si et seulement si $z \neq \text{i}$

Donc si un point M d'affixe z appartient à H, alors $z \neq \text{i}$, donc M $\neq$ B.

Soit M un point quelconque du plan distinct de B, d'affixe $z \neq \text{i}$.

$$\text{M} \in H \Leftrightarrow \arg(z - \text{i}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

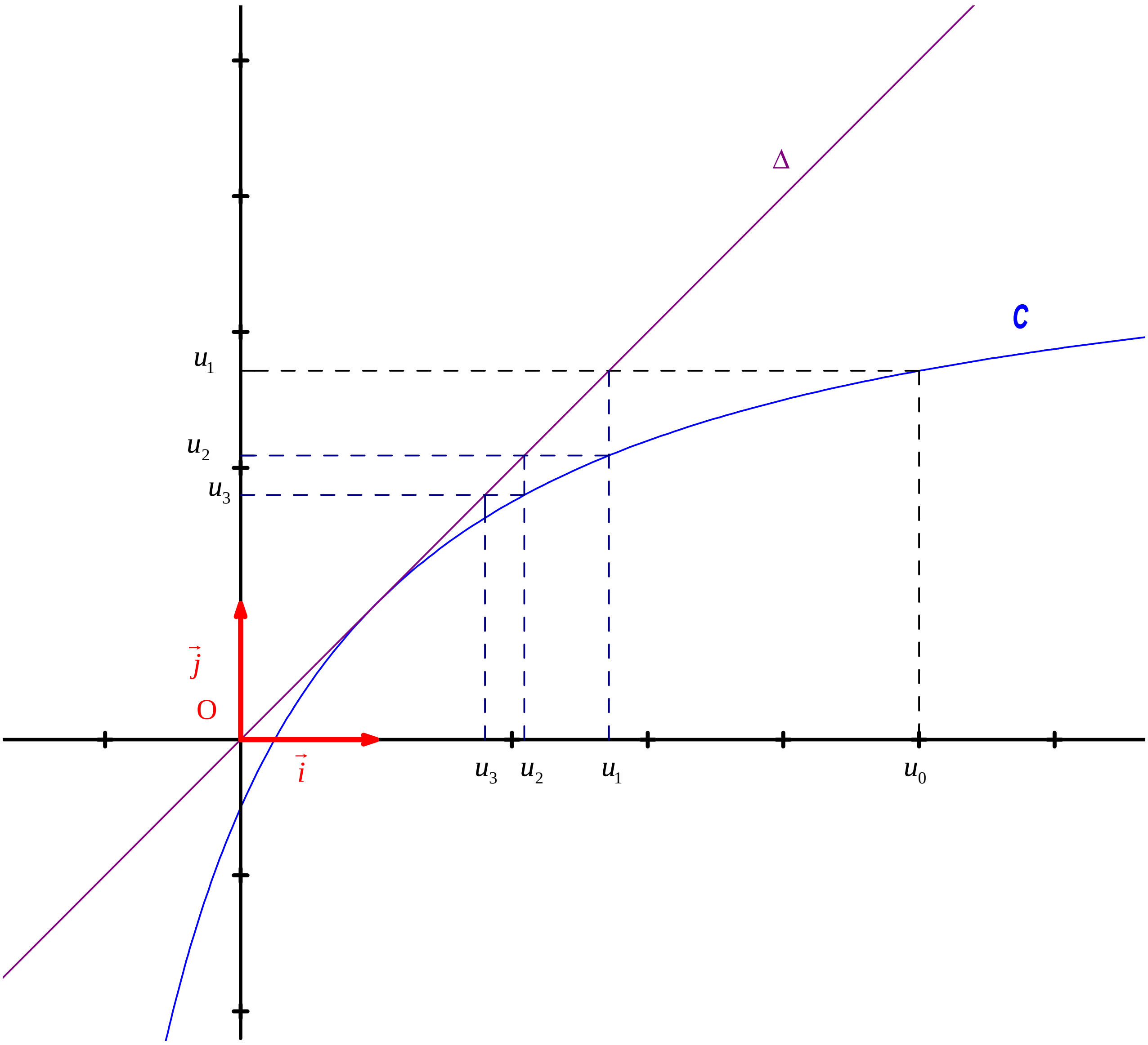
$$\Leftrightarrow \left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{BM}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (\pi)$$

On se réfère ensuite à la figure.

L'ensemble H est la demi-droite]BD) d'origine B passant par D, privée de B.

IV. (u_n) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

1°) a) Construction de u_1, u_2 et u_3 :



b) D'après le graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 1.

2°) a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n > 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 = 5$ par hypothèse de définition de la suite donc $u_0 > 5$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k > 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k + 1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > 1$.

On a : $u_{k+1} = \dfrac{4u_k - 1}{u_k + 2}$.

Méthode : Pour comparer u_{k+1} et 1, on va utiliser la méthode par différence c'est-à-dire que l'on va démontrer que $u_{k+1} - 1 > 0$. En effet, il n'y a pas de règle concernant le quotient pour les inégalités.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} - 1 &= \frac{4u_k - 1}{u_k + 2} - 1 \\
&= \frac{4u_k - 1 - (u_k + 2)}{u_k + 2} \\
&= \frac{4u_k - 1 - u_k - 2}{u_k + 2} \\
&= \frac{3u_k - 3}{u_k + 2} \\
&= \frac{3(u_k - 1)}{u_k + 2}
\end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence, $u_k > 1$ donc $u_k - 1 > 0$ et de manière évidente $u_k + 1 > 0$.

On en déduit que $u_{k+1} - 1 > 0$ (d'après la règle des signes : le quotient de deux nombres strictement positifs est strictement positifs).

Par conséquent, $u_{k+1} > 1$ et $P(k + 1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k + 1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

b) Validons par une démonstration les conjectures émises à la question 1°) b).

• Sens de variation

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n$$

$$= \frac{4u_n - 1 - (u_n)^2 - 2u_n}{u_n + 2}$$

$$= \frac{2u_n - 1 - (u_n)^2}{u_n + 2}$$

$$= -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc $(u_n - 1)^2 \geqslant 0$.

D'après la question précédente, tous les termes de la suite sont positifs ou nuls.
Donc $u_n + 2 > 0$.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante (à partir de l'indice 0).

• Convergence

La suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0 et minorée par 1 d'après la question a).

Or toute suite décroissante minorée converge (propriété du cours), donc on en déduit que la suite (u_n) converge.

Il est possible d'aller plus loin en déterminant la limite (mais un élève ne le faisant pas n'est pas pénalisé).

On pose $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Justifions que $l \geqslant 1$.

On sait que la suite (u_n) est décroissante convergente donc sa limite est le plus grand des minorants des termes de la suite (théorème du cours).

Or *1* est un minorant des termes de la suite.

Donc $l \geqslant 1$.

Justifions que l vérifie l'égalité : $l=\dfrac{4l-1}{l+2}$.

On sait que l est la limite de la suite (u_n).

D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$ de manière évidente (cela est complètement indépendant du fait que (u_n) est décroissante).

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\begin{cases} l \\ \dfrac{4l-1}{l+2} \end{cases}$$

(car $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$; on applique les propriétés d'opérations algébriques sur les suites convergentes)

Par unicité de la limite d'une suite, $l=\dfrac{4l-1}{l+2}$ (1).

On peut alors déterminer la valeur de l grâce à cette égalité.

On trouve l = 1.

3°) $\forall\, n\in\mathbb{N}\qquad v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$

a) Démontrons que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

Méthode : on va démontrer que la différence $v_{n+1}-v_n$ est constante.

$$\forall\, n\in\mathbb{N}\qquad \begin{aligned} v_{n+1}&=\frac{1}{u_{n+1}-1}\\ &=\frac{1}{\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}-1}\\ &=\frac{u_n+2}{3u_n-3}\end{aligned}$$

$$\forall\, n\in\mathbb{N}\qquad \begin{aligned} v_{n+1}-v_n&=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}\\ &=\frac{u_n+2}{3u_n-3}-\frac{1}{u_n-1}\\ &=\frac{1}{3}\\ &=1\end{aligned}$$

On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0=\dfrac{1}{u_0-1}=\dfrac{1}{4}$ et de raison $r=\dfrac{1}{3}$.

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimons v_n puis u_n en fonction de n.

$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}$ (formule explicite du terme général d'une suite arithmétique)

Par conséquent : $\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}$ (1)

(1) donne successivement :

$$u_n - 1 = \frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{4}}$$

$$u_n - 1 = \frac{1}{\frac{4n+3}{12}}$$

$$u_n = \frac{1}{\frac{1+4n}{12}} + 1$$

$$u_n = \frac{12}{4n+3} + 1$$

$$u_n = \frac{4n+15}{4n+3}$$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{4n+15}{4n+3}$

c) Déduisons-en la limite de la suite (u_n).

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{4n+15}{4n+3} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4n}{4n} \right) = 1$$

IV. spécialité

1°) $11x - 7y = 5$ (E) $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

a) Les entiers 7 et 11 sont deux nombres premiers distincts et en particulier sont premiers entre eux.
D'après le théorème de Bezout, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $11u - 7v = 1$.

On a de manière évidente : $11 \times 2 - 7 \times 3 = 1$.

Par conséquent, le couple (2, 3) est une solution particulière de (E).

Remarques :

1. L'algorithme d'Euclide nous fournit ce couple :

$11 = 1 \times 7 + 4$

$7 = 1 \times 4 + 3$

$4 = 1 \times 3 + 1$,

et donc $1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \times 4 - 7 = 2 \times (11 - 7) - 7 = 2 \times 11 - 3 \times 7$.
Un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $11u - 7v = 1$ est le couple (2, 3).

2. Il y avait d'autres choix possibles bien évidemment !

b) En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par 5, on obtient $10 \times 11 - 15 \times 7 = 5$.
Donc une solution particulière de (E) est le couple (10, 15).

c) Soit x et y deux entiers relatifs.

$$\begin{aligned} 11x - 7y = 5 &\Leftrightarrow 11x - 7y = 11 \times 10 - 7 \times 15 \\ &\Leftrightarrow 11(x - 10) = 7(y - 15) \end{aligned}$$

Ensuite, si $11(x - 10) = 7(y - 15)$, alors l'entier 7 divise $11(x - 10)$ et, puisque 7 et 11 sont premiers entre eux, 7 divise $x - 10$ d'après le théorème de Gauss.
On en déduit qu'il existe un entier relatif k tel que $x - 10 = 7k$ ou encore $x = 10 + 7k$.

On a alors $11 \times 7k = 7(y - 15)$ d'où $11k = y - 15$ soit encore $y = 15 + 11k$.

Donc si (x, y) est solution de (E) alors (x, y) est de la forme $(10 + 7k, 15 + 11k)$ où k est un entier relatif.

Réciproquement, on vérifie que les couples de la forme $(10 + 7k, 15 + 11k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de (E).

En effet : $11(10 + 7k) - 7(15 + 11k) = 11 \times 7k - 7 \times 11k + 110 - 105$
$= 5$

Conclusion : Les solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme $(10 + 7k, 15 + 11k)$ où k est un entier relatif.

d) $\boldsymbol{D}$: $11x - 7y - 5 = 0$

$\boldsymbol{C} = \{M(x\,;y) \in P \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 50 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 50\}$

Déterminons le nombre de points de la droite $\boldsymbol{D}$ appartenant à l'ensemble $\boldsymbol{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

$11x - 7y - 5 = 0 \Leftrightarrow 11x - 7y = 5$

Donc les points de la droite $\boldsymbol{D}$ appartenant à l'ensemble $\boldsymbol{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers sont les points du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ sont solutions de l'équation (E) avec $0 \leqslant x \leqslant 50$

et $0 \leqslant y \leqslant 50$.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 10 + 7k$ et $y = 15 + 11k$.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 10 + 7k$ et $y = 15 + 11k$.

$0 \leqslant x \leqslant 50 \Leftrightarrow 0 \leqslant 10 + 7k \leqslant 50$

$\Leftrightarrow -10 \leqslant 7k \leqslant 40$

$\Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 5$

$0 \leqslant y \leqslant 50 \Leftrightarrow 0 \leqslant 11k + 15 \leqslant 50$

$\Leftrightarrow -15 \leqslant 11k \leqslant 35$

$\Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 3$

On en déduit que $k \in \{-1\,;0\,;1\,;2\,;3\}$.

Il existe donc 5 points la droite $\boldsymbol{D}$ appartenant à l'ensemble $\boldsymbol{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2°) $11\,x^2 - 7\,y^2 = 5$ (F) $\quad (x, y) \in \mathbb{Z}^2$

a) Démontrons que si le couple $(x\,;y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2$ (mod. 5).

Soit $(x\,;y)$ un couple d'entiers relatifs solution de (F).

On a alors $11x^2 - 7y^2 = 5$ d'où $11x^2 = 7y^2 + 5$
Donc $11\,x^2 \equiv 7\,y^2$ (mod. 5)

Or $11 \equiv 1$ (mod. 5) et $7 \equiv 2$ (mod. 5).

Par conséquent, si $(x\,;y)$ un couple solution d'entiers relatifs solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2$ (mod. 5).

b) $x \in \mathbb{Z}$

$y \in \mathbb{Z}$

Modulo 5, x est congru à	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1

Modulo 5, y est congru à	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

$x^2 \equiv 0$ (mod. 5) ou $x^2 \equiv 1$ (mod. 5) ou $x^2 \equiv 4$ (mod. 5)
Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 par 5 sont 0, 1, 4.

$2\,y^2 \equiv 0$ (mod. 5) ou $2\,y^2 \equiv 1$ (mod. 5) ou $2\,y^2 \equiv 4$ (mod. 5)
Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $2y^2$ par 5 sont 0, 2, 3.

c) Déduisons-en que si le couple (x ; y) est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

D'après la question a), si le couple (x ; y) est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2$ (mod 5).

Donc x^2 et y^2 ont le même reste dans la division euclidienne par 5.

D'après la question, on doit donc avoir $x^2 \equiv 0$ (mod 5) et $2y^2 \equiv 0$ (mod 5).
D'où $x \equiv 0$ (mod 5) et $y \equiv 0$ (mod 5).

On en déduit que si le couple (x ; y) est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

Du point de vue logique, on peut dire qu'une condition nécessaire pour que (x ; y) soit solution de (F) est que x et y sont multiples de 5.

3°) Démontrons que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple (x ; y) n'est pas solution de (F).

Dans cette question, on va regarder si la condition « x et y multiples de 5 » est une condition suffisante pour que (x ; y) soit solution de (F).

Soit x et y deux entiers relatifs.
On suppose que x et y sont deux multiples de 5.
Il existe donc des entiers relatifs k et k' tels que $x = 5k$ et $y = 5k'$.

Alors $11x^2 - 7y^2 = 11 \times 25k^2 - 7 \times 25k'^2$
$= 25\left(11k^2 - 7k'^2\right)$

L'égalité $11x^2 - 7y^2 = 5$ est équivalent à $25\left(11k^2 - 7k'^2\right) = 5$ et $5\left(11k^2 - 7k'^2\right) = 1$

$11k^2 - 7k'^2 \in \mathbb{Z}$ donc cette égalité est impossible.

On en déduit que le couple (x ; y) n'est pas solution de (F).

Que pouvons-nous déduire pour l'équation (F) ?

On a démontré que si le couple (x ; y) est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

Réciproquement, on a démontré que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple (x ; y) n'est pas solution de (F).

On en déduit que l'équation (F) n'a pas de solution.