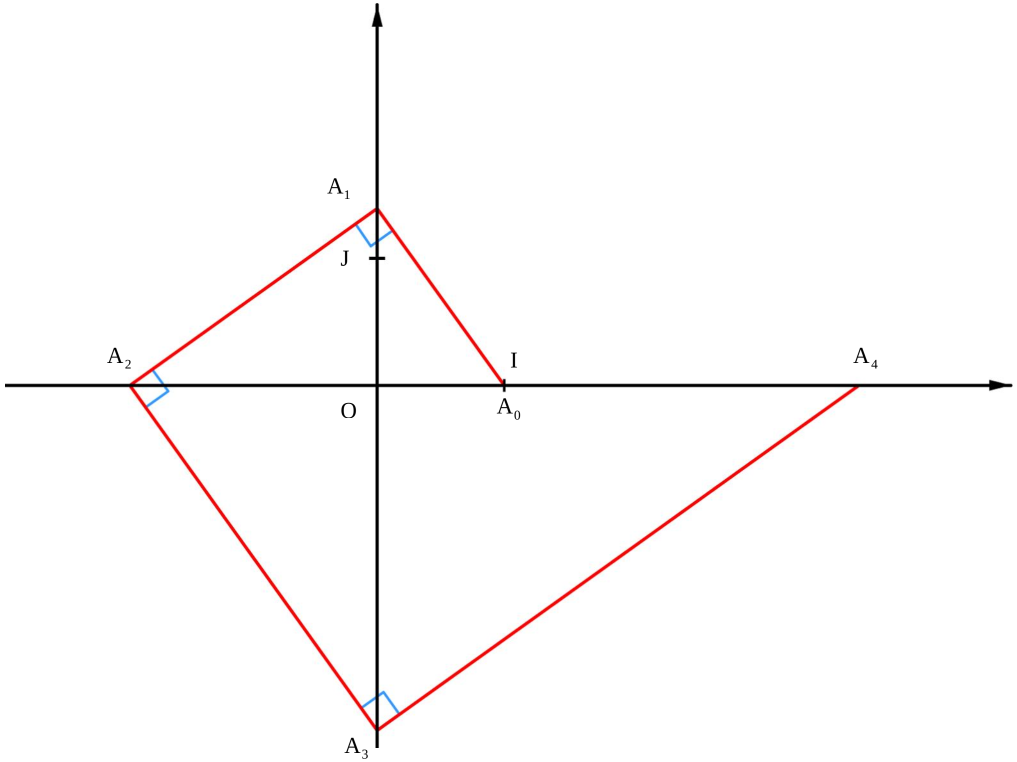
1ère S1

Devoir pour le lundi 30 avril 2012

I. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On construit une suite de points A_0, A_1, A_2 … comme indiqué sur le graphique ci-dessous.
Le point A_0 est confondu avec le point I(1 ; 0) ; le point A_1 a pour coordonnées (0 ; *h*) où *h* est un réel strictement positif fixé.
En joignant les points A_0, A_1, A_2 … par des segments, on obtient une spirale.

Le graphique n'est pas à refaire sur la copie.



On rappelle que pour tout entier naturel *k*, on a : $OA_k = h^k$.

1°) Exprimer en fonction de *k* et de *h* la distance A_kA_{k+1} (distance entre les points A_k et A_{k+1}) où *k* est un entier naturel quelconque.

2°) On note L_n la longueur de la spirale $A_0A_1A_2...A_n$ (c'est-à-dire de la ligne brisée constituée par les segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, … $[A_{n-1}A_n]$).

On a donc : $L_n = A_0A_1 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n$.

a) Recopier et compléter l'égalité : $L_n = \sum_{k=...}^{k=...} A_kA_{k+1}$.

b) Exprimer L_n en fonction de *n* et de *h* sous forme simplifiée.

II. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 3$, $u_1 = 10$ et la relation de récurrence : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1°) On admet que pour tout entier naturel *n* on a : $u_n = \lambda\ 3^n + \mu\ 2^n$ où λ et μ sont deux réels.

Déterminer les valeurs de λ et μ.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

On peut donc écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n.

3°) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel *n* tel que $S_n > 1\,000$.

III. On considère une suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_2 = 2$ et $u_7 = 486$.
Calculer u_0 et la raison *q*.

Corrigé du DM pour le 30 avril 2012

I.

1°) **Exprimons en fonction de k et de h la distance A_kA_{k+1} (k entier naturel, $k \geqslant 2$).**

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OA_kA_{k+1} rectangle en O, on a :

$$(A_kA_{k+1})^2 = (OA_k)^2 + (OA_{k+1})^2$$

Or $OA_k = h^k$ et $OA_{k+1} = h^{k+1}$.

Donc $(A_kA_{k+1})^2 = (h^k)^2 + (h^{k+1})^2$

soit $(A_kA_{k+1})^2 = h^{2k} + h^{2k+2}$

soit $(A_kA_{k+1})^2 = h^{2k}(1+h^2)$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A_kA_{k+1} &= \sqrt{h^{2k}(1+h^2)} \\ &= \sqrt{h^{2k}} \times \sqrt{1+h^2} \\ &= h^k\sqrt{1+h^2} \end{aligned}$$

Attention à ne pas faire de simplifications abusives :

On a : $A_kA_{k+1} = \sqrt{h^{2k}+h^{2k+2}}$ mais on ne peut pas écrire $A_kA_{k+1} = \sqrt{h^{2k}} + \sqrt{h^{2k+2}}$ car on ne peut pas séparer les racines carrées quand on a une addition.

2°) L_n : longueur de la spirale $A_0A_1A_2...A_n$

$$L_n = A_0A_1 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n$$

a) **Complétons l'égalité : $L_n = \sum_{k=...}^{k=...} A_kA_{k+1}$.**

On peut écrire : $L_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} A_kA_{k+1}$.

b) **Exprimons L_n en fonction de n et de h.**

$$L_n = \sum_{k=0}^{k=n-1}\left(h^k\sqrt{1+h^2}\right)$$

$$= \sqrt{1+h^2}\left(\sum_{k=0}^{k=n-1} h^k\right)$$

$$L_n = \sqrt{1+h^2}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{k=n-1} h^k\right)}$$

somme des termes d'une suite géométrique de raison h et de premier terme 1

Cette somme comporte n termes.

$$L_n = \sqrt{1+h^2}\,\frac{1-h^n}{1-h}$$

$$L_n = \sqrt{1+h^2}\,\frac{h^n-1}{h-1}$$ (on multiplie le numérateur et le dénominateur du quotient par – 1)

II. (u_n) $\left|\begin{array}{l} u_0 = 3 \\ u_1 = 10 \\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{array}\right.$

Il s'agit d'une **suite récurrente d'ordre 2** (la relation est une relation de récurrence d'ordre 2.

1°) **Sachant que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $u_n = \lambda\ 3^n + \mu\ 2^n$, déterminons les valeurs de λ et μ.**

On applique cette relation pour n = 0 puis pour n = 1.

$2^0 = 1$, $3^0 = 1$

On sait que u_0 = 3 et u_1 = 10.

On obtient le système : $\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ 3\lambda + 2\mu = 10 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire.

On va le résoudre par substitution.

La 1ère équation donne $\mu = 3 - \lambda$.

En reportant dans la deuxième équation, on obtient $\lambda + 6 = 10$ d'où $\lambda = 4$.

On en déduit $\mu = -1$.

On en déduit que :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = 4 \times 3^n - 2^n}$$

2°) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n}$ $\left(\boldsymbol{S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k}\right)$

Déterminons une expression simplifiée de S_n.

On applique la formule sommatoire suivante (qui correspond à la somme des termes d'une suite géométrique) :

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{lorsque } q \neq 1.$$

On peut aussi écrire cette formule sommatoire sous la forme :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ (en multipliant le numérateur et le dénominateur par – 1).

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{k=n} \left(4 \times 3^k - 2^k\right) \\
&= 4 \times \sum_{k=0}^{k=n} 3^k - \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \\
&= 4 \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} - \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \\
&= 4 \times \frac{3^{n+1} - 1}{2} - \frac{2^{n+1} - 1}{1} \\
&= 2 \times \left(3^{n+1} - 1\right) - \left(2^{n+1} - 1\right) \\
&= 2 \times 3^{n+1} - 2^{n+1} - 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad S_n = 2 \times 3^{n+1} - 2^{n+1} - 1}$$

3°) **Déterminons à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel n tel que S_n > 1 000.**

Il s'agit de déterminer une valeur seuil.

On peut réaliser un programme sur calculatrice en utilisant la formule explicite qui a été établie dans la question précédente.

Le plus petit entier naturel n tel que S_n > 10 00 est 5 car $S_4 = 453$ et $S_5 = 1393$ (on doit dire que toutes les valeurs de S_n pour n ∈ {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4} sont inférieures ou égales à 10 000).

On utilise la formule explicite de S_n obtenue à la question précédente.
On peut procéder par essais successifs sur la calculatrice (car la valeur de n à trouver est petite) ou bien en réalisant un programme sur calculatrice (avec une boucle « Tantque »).

De même,

le plus petit entier naturel n tel que S_n > 10 000 est 7 (car S_7 = 12 865).

le plus petit entier naturel n tel que S_n > 100 000 est 9 (car S_9 = 117 073).

III. (u_n) : suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_2 = 2$ et $u_7 = 486$.

Calculons u_0 et la raison q.

• On a : $u_7 = u_2 \times q^{7-2}$ donc $486 = 2 \times q^5$.

D'où $q^5 = \dfrac{486}{2} = 243$

Par conséquent, $q = \sqrt[5]{243} = 3$ (q est la racine cinquième de 243)

On utilise la fonction « racine n-ième » de la calculatrice ($\sqrt[n]{\ }$) qui renvoie une valeur positive de q.
Attention ! Il faut rester vigilant sur le fait que si l'exposant est pair, il y a deux valeurs de q opposées qui conviennent et la suite n'est pas entièrement définie.

Avec la calculatrice, on effectue le calcul $\sqrt[5]{243} = 243^{\frac{1}{5}}$ en utilisant les exposants fractionnaires (pour les calculatrices qui n'ont pas de touche « racine n-ième »).

Pour les calculatrices TI, on peut aller dans le menu MATH .

• On a : $u_2 = u_0 \times q^2$ donc $2 = u_0 \times 3^2$ d'où $u_0 = \frac{2}{9}$.

Conclusion :

$$\boxed{q = 3 \text{ et } u_0 = \frac{2}{9}}$$