1$^{\text{ère}}$ S1

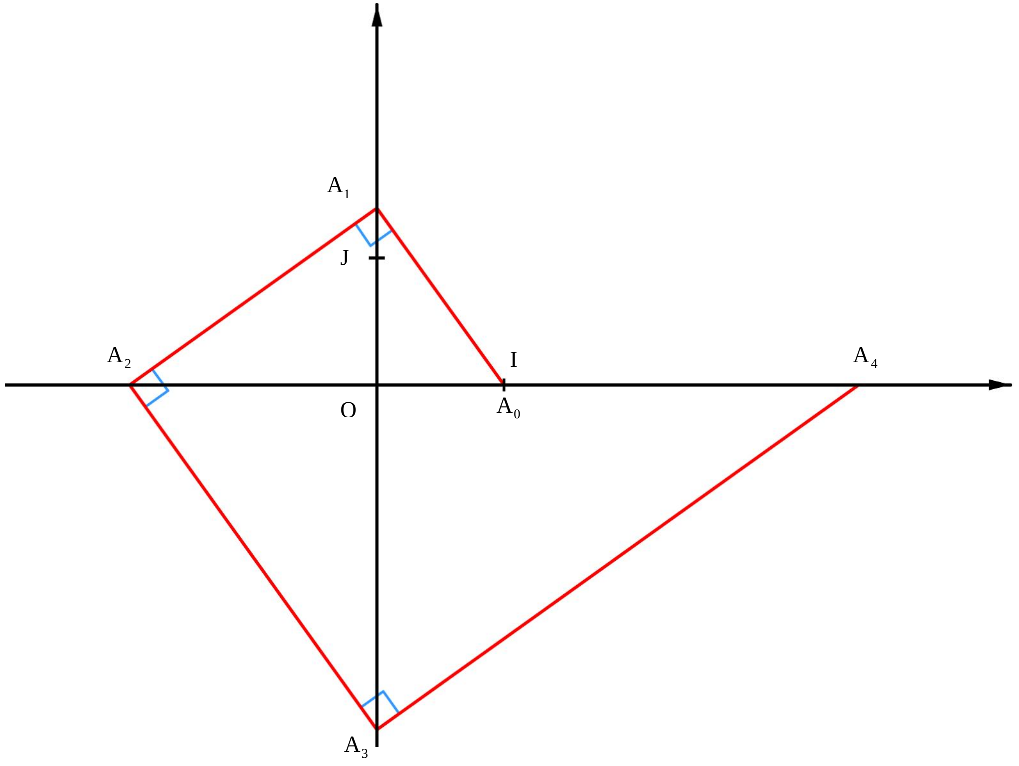
Devoir pour le mardi 10 avril 2012

I. Étude d'une spirale

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On construit une suite de points A_0, A_1, A_2… comme indiqué sur le graphique ci-dessous.
Le point A_0 est confondu avec le point I(1 ; 0) ; le point A_1 a pour coordonnées (0 ; h) où h est un réel strictement positif fixé.
En joignant les points A_0, A_1, A_2… par des segments, on obtient une spirale.

Le graphique n'est pas à refaire sur la copie.



Partie A

1°) En utilisant les relations métriques dans un triangle rectangle, exprimer les distances OA_2, OA_3 et OA_4 en fonction de h.

2°) Conjecturer l'expression de OA_n en fonction de n et de h (n entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque).
La démonstration de cette conjecture sera l'objet des parties B et C (deux démonstrations différentes).

Partie B

Le but de cette partie est démontrer la conjecture émise à la fin de la partie A.

1°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Établir une relation entre les distances OA_{n-1}, OA_n, OA_{n+1}.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = OA_n$ puis $v_n = \dfrac{OA_{n+1}}{OA_n}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est constante.

b) En déduire la nature de la suite (u_n).

c) Conclure.

Partie C

Le but de cette partie est de démontrer la conjecture par un raisonnement de « proche en proche ».
Ce raisonnement va être fait sur deux rangs.

1°) Démontrer que si la formule est vraie pour deux entiers naturels consécutifs $k - 1$ et k ($k \in \mathbb{N}^*$), alors elle est vraie au rang k. On pourra reprendre la relation établie dans la question 1°) de la partie B.

2°) Conclure.

II. L'algorithme de Héron d'Alexandrie

Héron d'Alexandrie est un mathématicien grec de l'antiquité (I^er siècle après Jésus-Christ).

En annexe, on trouvera l'explication pour comprendre l'origine géométrique de la méthode de Héron.

Partie A Valeurs approchées de $\sqrt{2}$

On pose $a_1 = 2$.

Calculer au brouillon « à la main »* les nombres $a_2 = \dfrac{1}{2}\left(a_1 + \dfrac{2}{a_1}\right)$, $a_3 = \dfrac{1}{2}\left(a_2 + \dfrac{2}{a_2}\right)$, et ainsi de suite jusqu'à a_5.

Recopier le tableau suivant et y reporter les valeurs trouvées (ne rien écrire sur le sujet).

	Valeur exacte**	**Valeur approchée avec 8 décimales*****
a_2		
a_3		
a_4		
a_5		

* Calculs à faire « à la main », et non à la machine, même si un programme permettrait d'aller plus vite. Ce sera l'objet de la partie B.

** Écrire les barres de fraction horizontalement.

*** Uniquement lorsque c'est nécessaire (on pourra se contenter de donner des troncatures).

On démontre que l'on obtient, en poursuivant les calculs de la même façon, des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{2}$.

Partie B Valeurs approchées de $\sqrt{p}$ avec p entier naturel, $p \geqslant 2$

On reprend la suite précédente, avec : $a_1 = p$; $a_2 = \dfrac{1}{2}\left(a_1 + \dfrac{p}{a_1}\right)$; $a_3 = \dfrac{1}{2}\left(a_2 + \dfrac{p}{a_2}\right)$; … .

On démontre (mais ce ne sera pas l'objet de ce devoir) que l'on obtient des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{p}$.

1°) Écrire un algorithme en langage naturel qui lit l'entier p ($p \geqslant 2$) fixé au départ et un entier n, avec $n \geqslant 2$, et qui calcule et affiche les termes successifs a_2, a_3,… jusqu'à a_n.

L'algorithme doit être écrit dans un cadre, sur une seule page (il ne doit pas y avoir de page à tourner).

2°) Réaliser le programme correspondant à cet algorithme sur la calculatrice ou sur ordinateur.
Vérifier les résultats obtenus à la question précédente.

Faire des essais, observer la précision des valeurs approchées obtenues (aucune rédaction n'est attendue sur la copie).

Annexe : pour comprendre la méthode de Héron

La méthode de Héron : « Le rectangle qui devient un carré. »

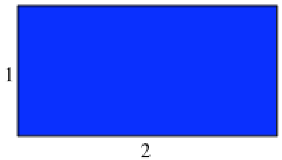
La méthode Héron est une méthode très ancienne qui date de l'antiquité due au mathématicien Héron.

Elle permet de trouver des valeurs approchées de la racine carrée d'un entier.

Voici le principe de la méthode expliqué pour $\sqrt{2}$.
On cherche à approcher $\sqrt{2}$ par des nombres décimaux en utilisant uniquement les opérations algébriques.
L'idée de base est très simple et s'appuie sur des considérations géométriques.

Étape 0

On part d'un rectangle dont les côtés ont pour longueur 1 et 2. Son aire est égale à 2.



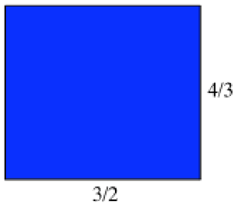
On va construire une suite de rectangles d'aire 2 qui vont se rapprocher de plus en plus d'un carré.

Étape 1

On construit un rectangle dont une dimension est égale à la moyenne arithmétique des dimensions du rectangle de base : $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$.

Pour que l'aire du rectangle soit égale à 2, l'autre dimension doit être égale à $\frac{4}{3}$.

Le rectangle obtenu n'est pas un carré mais s'en rapproche comme on peut s'en convaincre visuellement sur la figure ci-dessous.

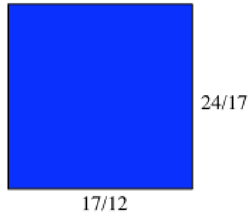


Étape 2

On recommence rectangle dont une dimension est égale à la moyenne arithmétique des dimensions du rectangle de base : $\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{7}{12}$.

Pour que l'aire du rectangle soit égale à 2, l'autre dimension doit être égale à $\frac{24}{17}$.

Le rectangle obtenu n'est pas un carré mais s'en rapproche comme on peut s'en convaincre visuellement sur la figure ci-dessous



Étape 3

On recommence avec le rectangle précédent.

……………………………

On obtient ainsi des rectangles d'aire 2 qui ressemblent de plus en plus à des carrés.
Or un carré d'aire 2 a pour côté $\sqrt{2}$.
Les dimensions des différents rectangles se rapprochent donc de plus en plus de $\sqrt{2}$.

Commentaires

L'exercice **I** s'inscrit dans l'étude des **spirales** et des **constructions itératives** en lien avec les suites.

L'exercice **II** s'inscrit dans le cadre des **« preuves sans paroles »** et des **« phénomènes de convergence »**.

II.

Partie B

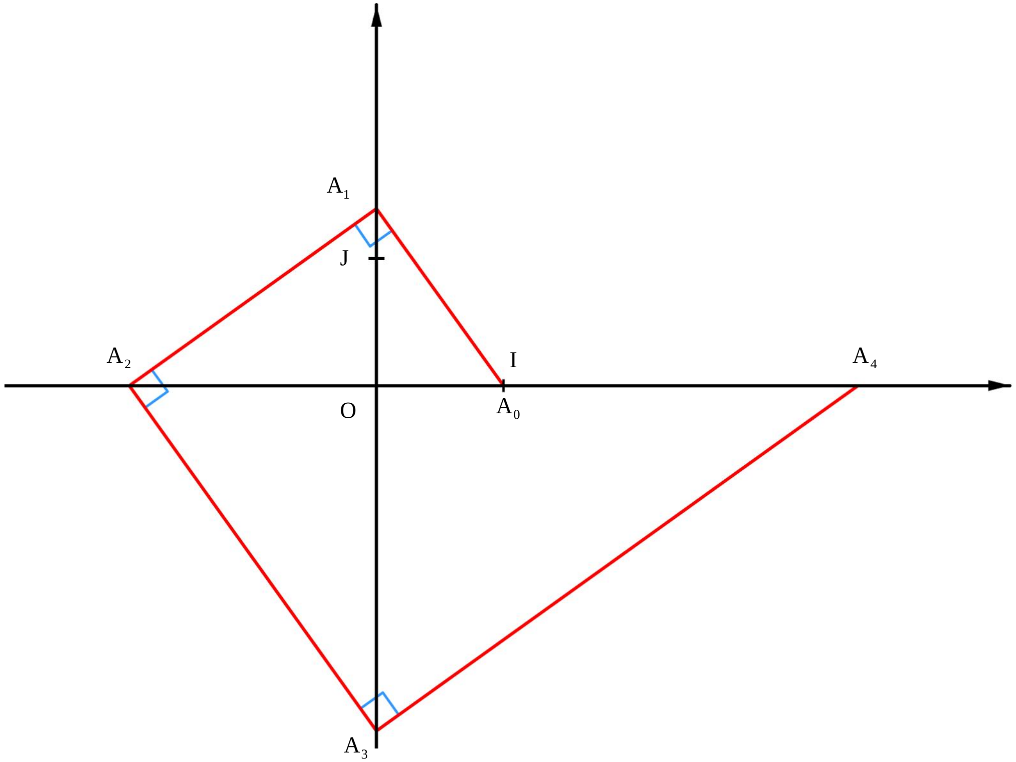
2°) Il n'y a rien à écrire sur la copie.

La méthode de Héron : Cet exercice s'inscrit un peu dans la lignée des « preuves sans parole ».

Corrigé du DM pour le 10 avril 2012

I. Étude d'une spirale

$A_0 = I\ (1\ ;\ 0)$
$A_1\ (0\ ;\ h)\quad (h > 0)$



1°) **Exprimons les distances OA_2, OA_3 et OA_4 en fonction de h.**

On utilise la relation métrique suivante valable dans un triangle ABC.

On a : $\mathbf{AH^2 = HB \times HC}$ où H est le pied de la hauteur issue de A.

- Calculons la distance OA_2 :

Dans le triangle $A_0A_1A_2$ rectangle en A_1, on a :
$OA_1{}^2 = OA_0 \times OA_2$.
$h^2 = 1 \times OA_2$
$h^2 = 1 \times OA_2$

On obtient donc $\boxed{OA_2 = h^2}$.

(**autre méthode :** OA_1 est la moyenne géométrique de OA_0 et de OA_2)

- **Calculons la distance OA_3 :**

Dans le triangle $A_1A_2A_3$ rectangle en A_2, on a :

$OA_2^{\ 2} = OA_3 \times OA_1$

$\left(h^2\right)^2 = h \times OA_3$

$h^4 = h \times OA_3$

$OA_3 = \dfrac{h^4}{h}$.

On obtient finalement $\boxed{OA_3 = h^3}$.

- **Calculons la distance OA_3 :**

Dans le triangle $A_2A_3A_4$ rectangle en A_3, on a :

$OA_3^{\ 2} = OA_2 \times OA_4$.

$h^6 = h^2 \times OA_4$

$OA_4 = \dfrac{h^6}{h^2}$

On obtient donc $\boxed{OA_4 = h^4}$.

Il s'agit en fait d'une construction itérative de moyennes géométriques.

2°) **Conjecturons l'expression de OA_n en fonction de *n* et de *h* ($n \in \mathbb{N}^*$).**

On sait par hypothèse que $OA_0 = 1$; on peut donc écrire que $OA_0 = h^0$.

On sait aussi par hypothèse que $OA_1 = h$; on peut donc écrire que $OA_1 = h^1$.

On a démontré dans la question précédente que $OA_2 = h^2$,

$OA_1 = h^1$

D'après les résultats de la question 1°), on peut conjecturer la formule :

$\boxed{OA_n = h^n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Partie B

1°) **Déterminons une relation entre les distances OA_{n-1}, OA_n, OA_{n+1} ($n \geqslant 1$).**

Dans le triangle $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ rectangle en A_n, le pied de la hauteur issue de A_n est O.
À l'aide de l'une des relations métriques dans un triangle rectangle faisant intervenir la longueur de la hauteur issue de l'angle droit, on obtient : $OA_n^{\ 2} = OA_{n-1} \times OA_{n+1}$ (1).

2°) On pose $u_n = OA_n$ puis $v_n = \dfrac{OA_{n+1}}{OA_n}$.

a) **Démontrons que la suite (v_n) est constante.**

La relation (1) s'écrit $\dfrac{OA_{n+1}}{OA_n} = \dfrac{OA_n}{OA_{n-1}}$.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\ u_n = u_{n-1}$.

On en déduit la suite (v_n) est constante.

b) **Déterminons la nature de la suite (u_n).**

À la question précédente, on a démontré que la suite (v_n) est constante donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $v_n = v_0$.

Or $v_0 = \dfrac{OA_1}{OA_0}$.

On a : $OA_0 = 1$ et $OA_1 = h$ (on peut écrire ces deux égalités directement).

Donc $v_0 = h$.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $v_n = h$.

On a donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = h$ soit $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = hu_n$.

Cette dernière relation permet d'affirmer que la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = OA_0 = 1$ et de raison *h*.

c) **Concluons.**

D'après la question précédente, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $u_n = h^n \times 1$.

On obtient $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $u_n = h^n$ soit $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\ OA_n = h^n$.

La formule conjecturée est ainsi établie.

Partie C

1°) **Démontrons que si la formule est vraie pour deux entiers naturels consécutifs $k-1$ et k ($k \in \mathbb{N}^*$), alors elle est vraie au rang k.**

On considère un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la conjecture soit vraie pour les rangs consécutifs $k-1$ et k c'est-à-dire $\text{OA}_{k-1} = h^{k-1}$ et $\text{OA}_k = h^k$.

On reprend la relation établie dans la question 1°) de la partie B.
On a $\text{OA}_k{}^2 = \text{OA}_{k-1} \times \text{OA}_{k+1}$ donc $h^{2k} = h^{k-1} \times \text{OA}_{k+1}$.

Par suite, $$\begin{aligned}\text{OA}_{k+1} &= \frac{h^{2k}}{h^{k-1}} \\ &= h^{2k-(k-1)} \\ &= h^{k+1}\end{aligned}$$

La conjecture est donc démontrée au rang $k+1$.

2°) **Concluons.**

On a démontré dans la question 1°) de la partie A que la conjecture est vraie pour les deux premiers rangs 0 et 1.

De plus à la question précédente, on a démontré que si la formule est vraie pour deux entiers naturels consécutifs, alors elle est vraie au rang suivant.

Par un raisonnement de proche en proche sur deux rangs, on peut donc en conclure que la formule est vraie pour tout entier *n*.

Ce raisonnement sera bien mis en place en Terminale avec le « raisonnement par récurrence d'ordre 2 ».

II. L'algorithme de Héron d'Alexandrie

On avait déjà vu la méthode de dichotomie pour déterminer des valeurs décimales approchées de la racine carrée (et même de la racine cubique d'un nombre).
Cet exercice porte sur l'étude d'une autre méthode très efficace pour déterminer des valeurs approchées de la racine carrée d'un entier naturel.

Partie A Valeurs approchées de $\sqrt{2}$

$a_1 = 2$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right)$$

	Valeur exacte	**Troncature à 8 décimales**
a_2	$\frac{3}{2}$	1,5
a_3	$\frac{17}{12}$	1,41666666
a_4	$\frac{577}{408}$	1,41421568
a_5	$\frac{665\,857}{470\,832}$	1,41421356

On peut vérifier les résultats avec un tableur.

On peut dire que la suite (a_n) converge vers $\sqrt{2}$, ce que l'on comprend assez bien avec l'interprétation géométrique de l'algorithme de Héron.

On peut dire :

• « a_n tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers + ∞. »
$p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}$

• « La limite de a_n quand n tend vers + ∞ est égale à $\sqrt{2}$. »
$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \sqrt{2}$

• « La suite (p_n) **converge** vers $\sqrt{2}$. »

Partie B

1°) **Algorithme de calcul des termes de la suite :**

Il est important de noter que dans l'algorithme devront figurer en entrée les variable p et n (dans le programme, il faudra rentrer les valeurs de p et n avant de le faire tourner).

On peut utiliser une boucle « Pour » ou une boucle « Tantque ».

Variables :
n, p, i : entiers naturels
a : réel

Entrée :
Saisir p
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur p

Traitement et sortie :
Pour i allant de **1 à n – 1** (ou **2 à n**) **Faire**

p prend la valeur $\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{p}{a}\right)$

Afficher a

FinPour

On peut noter que les différentes valeurs de a qui s'affichent au fur et à mesure du déroulement de la boucle sont des nombres rationnels (positifs).

Quelques aménagements possibles de l'algorithme :

1. Il serait possible d'introduire une instruction conditionnelle au début de l'algorithme du type :

« **Si** $n < 2$, alors
Afficher (« n doit être supérieur ou égal à 2 »)
Sinon …
….
FinSi »

2. On pourrait aussi utiliser une liste.

2°)

• Lorsque $p = 2$, on retrouve les valeurs calculées dans la partie A.

Les valeurs affichées sont des valeurs affichées sont des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{2}$.

On peut constater qu'à partir d'un certain moment, les nombres affichés sont égaux.
Il s'agit d'un phénomène de convergence (stabilisation des valeurs autour d'une valeur).

On dit que la suite (a_n) converge vers $\sqrt{2}$.

On peut comparer avec le résultat obtenu en tapant $\sqrt{2}$ sur la calculatrice.

• On peut faire d'autres essais avec différentes valeurs de p.

Par exemple, pour $p = 5$, les valeurs affichées sont des valeurs affichées sont des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{5}$.
On constate de nouveau un phénomène de convergence avec stabilisation des valeurs.
On peut comparer avec le résultat obtenu en tapant $\sqrt{5}$ sur la calculatrice.
On dit que la suite (a_n) converge vers $\sqrt{5}$.

• Il peut être intéressant de regarder ce qui se passe lorsque p est un carré parfait (bien que la méthode ne présente aucun intérêt dans ce cas, puisque l'on sait calculer très facilement la racine carrée d'un carré parfait).

Pour aller plus loin :

Il serait intéressant de connaître la vitesse ou la rapidité de convergence de la suite (a_n).