1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les équations et inéquations trigonométriques (2)

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 + 2\sin x = 0$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -2$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$.

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 5x + \sin x = 0$.

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0$.

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin 2x = 0$.

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1$.

10 1°) On note α le réel de l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Déterminer grâce à la calculatrice la valeur arrondie au centième de α.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \dfrac{1}{3}$.

11 En reprenant la même méthode qu'à l'exercice **10**, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = 0,4$.

Rajouter les inéquations.

Réponses

1 $S_1 = \left\{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{4} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$

2 $S_2 = \left\{-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{7\pi}{6} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$ ou $S_2 = \left\{-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{5\pi}{6} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$

3 $S_3 = \varnothing$

4 $S_4 = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{12} + k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$

5 $S_5 = \left\{\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2k'\pi}{3},\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$

6 Astuce : l'équation est équivalente à $\sin 5x = -\sin x$ soit $\sin 5x = \sin(-x)$.

$S_6 = \left\{\dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{4} + k'\dfrac{\pi}{2},\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$

7 Astuce : on effectue le changement d'inconnue $X = \cos x$.

$S_7 = \left\{\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$

8 Astuce : utiliser la formule de duplication $\sin 2x = 2\sin x \times \cos x$ puis factoriser le 1$^{\text{er}}$ membre.

$S_8 = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{4\pi}{3} + 2k''\pi,\ k'' \in \mathbb{Z}\right\}$

9 Astuce : réduire le 1$^{\text{er}}$ membre en utilisant une formule d'addition.

$S_9 = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Dans une chaîne d'équivalences, chaque ligne doit pouvoir se lire indépendamment des précédentes. Aussi est-on obligé de répéter à chaque ligne que $k \in \mathbb{Z}$.

Solutions détaillées

$\boxed{1}$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

On sait que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$ (valeur remarquable).

(1) $\Leftrightarrow$ $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (1) est : $S_1 = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}\right\}$.

On lit :

« S_1 est la réunion de l'ensemble des nombres de la forme $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, k décrivant $\mathbb{Z}$, et de l'ensemble des nombres de la forme $-\frac{\pi}{4} + 2k'\pi$, k' décrivant $\mathbb{Z}$ ».

Il est intéressant de représenter les points images sur le cercle trigonométrique.

$\boxed{2}$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 + 2\sin x = 0$ (2).

(2) $\Leftrightarrow$ $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ($-\frac{1}{2}$ est une valeur remarquable du sinus)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (2) est : $S_2 = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}\right\}$.

Autre façon :

On aurait aussi pu écrire à la 3e ligne :

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Donc $S_2 = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\boxed{3}$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -2$ (3).

$-2 \notin [-1 ; 1]$ donc l'équation (3) n'admet aucune solution.

L'ensemble des solutions de (3) est $S_3 = \varnothing$.

$\boxed{4}$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (4).

(4) $\Leftrightarrow$ $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{\pi}{6} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{12} + k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (4) est $S_4 = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\boxed{5}$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$ (5).

$$(4) \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2k'\pi}{3} \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (5) est $S_5 = \left\{\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2k'\pi}{3}, k' \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\boxed{6}$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 5x + \sin x = 0$ (6).

$$(6) \Leftrightarrow \sin 5x = -\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 5x = \pi + x + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 4x = \pi + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k'\pi}{2} \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (6) est : $S_6 = \left\{\dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{4} + k'\dfrac{\pi}{2},\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\boxed{7}$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0$ (7).

On pose $X = \cos x$ (changement d'inconnue).

(7) s'écrit $2X^2 + 7X + 3 = 0 \quad (7')$.

Les solutions de $(7')$ sont -3 et $-\dfrac{1}{2}$.

$$(7) \Leftrightarrow \underbrace{\cos x = -3}_{\text{impossible}} \quad \text{ou} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (7) est : $S_7 = \left\{\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\boxed{8}$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin 2x = 0$ (8).

$$(8) \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + 2\sin x \times \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\sqrt{3} + 2\sin x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \ (8') \quad \text{ou} \quad \sqrt{3} + 2\sin x = 0 \ (8'')$$

$(8') \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ (équations particulières du cours)

$$(8'') \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \quad \left(\text{ou : } x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})\right) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (8) est : $S_8 = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{4\pi}{3} + 2k''\pi, k'' \in \mathbb{Z}\right\}$.

Remarque : On peut aussi écrire $S_8 = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + 2k''\pi, k'' \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\boxed{9}$ **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1$ (9).**

(9) $\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

L'ensemble des solutions de (9) est $S_9 = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\boxed{10}$

1°) $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

On ne peut connaître la valeur exacte de α car $\frac{1}{3}$ n'est pas une valeur remarquable du sinus.

Déterminons la valeur arrondie au centième de α.

Grâce à la calculatrice (**mise en mode radian**), on trouve $\alpha = 0{,}339836909...$.
Donc $\alpha \approx 0{,}34$ (valeur arrondie au centième)

On peut écrire : $\alpha = \text{Arcsin}\frac{1}{3}$.

2°) **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \frac{1}{3}$ (1).**

(1) $\Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (1) est $S = \{\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\}$.

$\boxed{11}$ **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = 0{,}4$ (1).**

Soit α un réel tel que $\cos\alpha = 0{,}4$.

(1) $\Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (1) est $S = \{\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\}$.