$1^{\text{ère}}$ S

Suites géométriques (2)

I. Rappels sur les suites géométriques

1°) Définition [suite géométrique]

On donne trois formulations à savoir par cœur.

Une **suite géométrique** est une suite telle que chaque terme sauf le premier s'obtient en multipliant le précédent par un nombre fixe q appelé la **raison**.

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est une **suite géométrique** pour exprimer qu'il existe un réel q (indépendant de n) tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times q$.
Le réel q est appelé la **raison** de la suite.

La relation $u_{n+1} = u_n \times q$ est appelée relation de récurrence de la suite.

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est une **suite géométrique** lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence de la forme $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times q$ où q est un réel (indépendant de n) appelé la **raison** de la suite.

Les termes de la suite sont notés u_0, u_1, u_2 …

Le processus algorithmique de calcul des termes successifs consiste à multiplier par la raison q à chaque fois.

On notera les deux manières possibles d'écrire la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times q$ ou $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_{n-1} \times q$.

2°) Propriété [expression du terme général]

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 \times q^n$$

Pour une suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

3°) Fonction associée (par rapport à l'exr

On reprend les mêmes notations que précédemment : (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ géométrique de raison q et on suppose que $q > 0$.

On considère la fonction $f : x \mapsto q^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

On s'autorise à introduire cette fonction qui sera étudiée plus tard en lien avec la fonction exponentielle.

On peut écrire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)$.

II. Relation entre deux termes quelconques d'une suite géométrique

1°) Formule

***u* est une suite géométrique de raison *q*.**

***n* et *p* sont deux entiers naturels quelconques.**

$$\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

On vérifie que la formule fonctionne bien lorsque $n = p$. En effet, $u_p = u_p \times q^{p-p}$ puisque $q^{p-p} = q^0 = 1$.

2°) Démonstration

On considère une suite géométrique u définie sur $\mathbb{N}$ (il s'agit donc d'une suite géométrique u qui commence à u_0).

On fixe deux entiers naturels n et p.

D'une part, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.
D'autre part, on a : $u_p = u_0 \times q^p$.

On peut écrire : $u_n = \underbrace{u_0 \times q^p}_{u_p} \times q^{n-p}$.

On a donc : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple d'utilisation :

On prend $n=30$ et $p=17$.

On a : $u_{30}=u_{17}\times q^{13}$.

3°) Cas particuliers

En particularisant *p* dans la formule, on peut retrouver des formules déjà étudiées.

• En prenant $p=0$, on retrouve la formule $u_n=u_0\times q^n$ (expression du terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0).

• En prenant $p=1$, on retrouve la formule $u_n=u_1\times q^{n-1}$ (expression du terme général d'une suite géométrique de premier terme u_1).

4°) Remarque

Dans la formule, *n* et *p* sont quelconques ; *n* ne doit pas spécialement être supérieur (ou inférieur) à *p*.

III. Sens de variation d'une suite géométrique

1°) Propriété

***u* est une suite géométrique** $\begin{cases}\textbf{de premier terme } u_0\\ \textbf{de raison } q\notin\{0,1\}\end{cases}$.

$$u_0>0\quad\begin{cases}0<q<1 : \text{ suite strictement décroissante}\\ q>1 : \text{ suite strictement croissante}\\ q<0 : \text{ suite non monotone}\end{cases}$$

$$u_0<0\quad\begin{cases}0<q<1 : \text{ suite strictement croissante}\\ q>1 : \text{ suite strictement décroissante}\\ q<0 : \text{ suite non monotone}\end{cases}$$

(contraire dans les deux premiers cas)

2°) Démonstration

On fixe un entier naturel *n*.

D'après la formule explicite du terme général d'une suite géométrique, on a :
$u_n=u_0\times q^n$ et $u_{n+1}=u_0\times q^{n+1}$.

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=u_0\times q^{n+1}-u_0\times q^n\\&=u_0\times q^n\times q-u_0\times q^n\\&=u_0\times q^n(q-1)\end{aligned}$$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n=u_0\times q^n(q-1)$

Le signe de $u_{n+1}-u_n$ dépend :

• du signe de u_0
• du signe de q^n
• du signe de $q-1$

1^er^ cas : $u_0>0$

• Si $q>1$, alors $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n>0$ donc *u* est strictement croissante à partir de l'indice 0.
• Si $0<q<1$, alors $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n<0$ donc *u* est strictement décroissante à partir de l'indice 0.
• Si $q<0$, alors q^n change de signe suivant la parité de *n*.
La suite *u* n'est donc pas monotone.

2^e^ cas : $u_0<0$

• Si $q>1$, alors $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n<0$ donc *u* est strictement décroissante à partir de l'indice 0.
• Si $0<q<1$, alors $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n>0$ donc *u* est strictement croissante à partir de l'indice 0.
• Si $q<0$, alors *u* est non monotone.

3°) Remarque

Une suite géométrique de premier terme non nul est monotone si et seulement si $q\geqslant 0$.

IV. Propriété de la moyenne

1°) Définition [moyenne géométrique de deux réels]

***a* et *b* sont deux réels positifs ou nuls.**
La moyenne géométrique de *a* et *b* est égale à $\sqrt{ab}$.

On peut être surpris par cette définition qui n'a rien à voir avec la définition de la moyenne arithmétique de deux réels.

2°) Comparaison entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique de deux nombres positifs ou nuls

On se donne deux réels positif ou nuls quelconques *a* et *b*.

On va comparer leur moyenne arithmétique $\dfrac{a+b}{2}$ et leur moyenne géométrique $\sqrt{ab}$.

Pour cela, on utilise la méthode de la différence c'est-à-dire que l'on calcule la différence $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ et que l'on cherche son signe.

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$$

Donc $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqslant 0$.

D'où $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

Propriété [comparaison des moyennes arithmétique et géométrique]

La moyenne géométrique de deux nombres positifs est toujours inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique.

La démonstration permet de mettre en évidence le cas d'égalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique. Il y a égalité entre les deux moyennes lorsque $a=b$ et uniquement dans ce cas.

3°) Constructions géométriques de moyennes

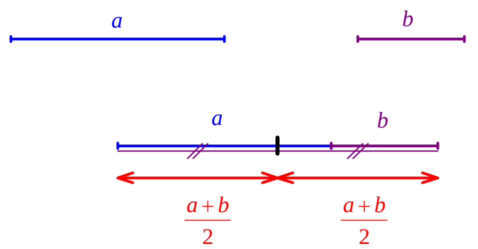
On se donne deux segments de longueurs *a* et *b* où *a* et *b* sont deux réels strictement positifs.

On souhaite construire à la règle (non graduée) et au compas deux segments ayant pour longueurs la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de *a* et *b*.

• Pour $\frac{a+b}{2}$:

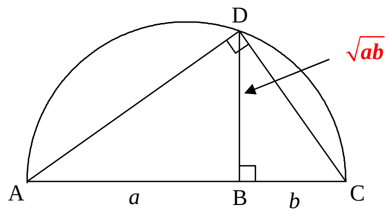
La construction d'un segment ayant pour longueur $\frac{a+b}{2}$ est aisée.

On construit deux segments ayant pour longueurs *a* et *b* ayant pour support une même droite et une extrémité commune (construction aisée utilisant le compas comme transporteur de longueur).
On obtient un segment de longueur a+b.
On construit le milieu de ce segment en utilisant le compas et la règle (comme pour une médiatrice).
Le milieu partage le segment en deux segments de même longueur.



• Pour $\sqrt{ab}$:

Comme pour la moyenne arithmétique, on place trois points A, B, C alignés dans cet ordre tels que $\text{AB}=a$ et $\text{BC}=b$.
On trace le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[\text{AC}]$.
On trace ensuite la droite Δ passant par B perpendiculaire à (AD).
On note D l'un des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Δ.



Le triangle ACD est rectangle en D donc $\text{BD}^2=\text{BA}\times\text{BC}$ (il s'agit d'une relation métrique dans un triangle rectangle) donc $\text{BD}^2=a\times b$ d'où $\text{BD}=\sqrt{ab}$.

On retrouve géométriquement $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

4°) Propriété (justifiant l'appellation)

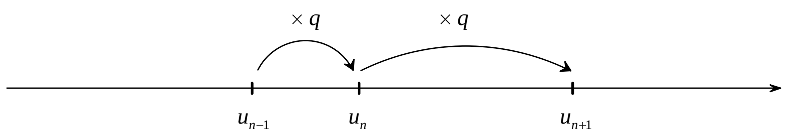
Pour une suite géométrique dont tous les termes sont positifs ou nuls, chaque terme (sauf le premier) est la moyenne géométrique de ceux qui l'encadrent.

5°) Démonstration

On considère une suite géométrique (u_n) de raison *q* dont tous les termes sont positifs ou nuls.
On a alors $q\geqslant 0$ et $u_0\geqslant 0$.

1$^{\text{er}}$ cas : On suppose que $q\neq 0$. On a alors $q>0$.

On fixe un entier naturel supérieur ou égal 1.



D'une part, on a $u_n=\frac{u_{n+1}}{q}$.

D'autre part, on a : $u_n = u_{n-1} \times q$.
*Donc en multipliant membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$$u_n^{\ 2} = \frac{u_{n+1}}{q} \times u_{n-1} \times q$$

Soit $u_n^{\ 2} = u_{n+1} \times u_{n-1}$

D'où $u_n = \sqrt{u_{n+1} \times u_{n-1}}$ soit $u_n =$ moyenne géométrique de u_{n+1} et u_{n-1}.

2^{e} cas : On suppose que $q = 0$.

La propriété subsiste de manière évidente.

6°) Définition

On dit que trois réels *a, b, c* (pris dans cet ordre) sont en progression géométrique lorsque *a, b, c* sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exemples :

1, 3, 9

2, 4, 8

La définition se généralise à plusieurs nombres.

V. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

(« termes consécutifs » : termes dont les indices se suivent)

1°) Une nouvelle identité algébrique

$$(x-1)(1+x) = x^2 - 1$$
$$(x-1)(1+x+x^2) = x^3 - 1$$
$$(x-1)(1+x+x^2+x^3) = x^4 - 1$$
$$(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4) = x^5 - 1$$

$(x-1)(1+x) = x^2 - 1$ (identité remarquable)

$$(x-1)(1+x+x^2) = \cancel{x} + \cancel{x^2} + x^3 - 1 - \cancel{x} - \cancel{x^2}$$
$$= x^3 - 1$$

$$(x-1)(1+x+x^2+x^3) = x + x^2 + x^3 + x^4 - 1 + x + x^2 + x^3$$
$$= x^4 - 1$$

$$(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 - 1 - x - x^2 - x^3 - x^4$$
$$= x^5 - 1$$

Chaque développement se fait en deux étapes.

Par un développement analogue, on obtient l'identité :

$(x-1)(1+x+x^2+...+x^n) = x^{n+1} - 1$ (formule à connaître par cœur)

$(x-1)\left(\sum_{k=0}^{k=n} x^k\right) = x^{n+1} - 1$ (formule à connaître par cœur)

Conséquence : formule sommatoire des puissances successives d'un réel différent de 1

Pour tout réel $x \neq 1$, on a $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

On obtient cette formule à partir de l'égalité $(x-1)(1+x+x^2+...+x^n) = x^{n+1} - 1$ en divisant les deux membres par $x-1$ (on évite de dire que l'on fait « passer » $x-1$ de l'autre côté).

En multipliant le numérateur et le dénominateur par – 1, on peut aussi écrire $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Pour tout réel $x \neq 1$, on a $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

On peut aussi voir la formule $(x-1)(1+x+x^2+...+x^n)=x^{n+1}-1$ comme une conséquence de la formule de factorisation de a^n-b^n (formule fondamentale de l'algèbre).

Application : Légende de l'échiquier (voir vidéo)

La légende de l'échiquier de Sissa où le problème des grains de riz sur un échiquier

La légende se situe 3 000 ans av. J.C.
Le roi Belkib (Indes) promit une récompense fabuleuse à qui lui proposerait une distraction qui le satisferait.
Lorsque le sage Sissa, fils du Brahmine Dahir, lui présenta le jeu d'échecs, le souverain, demanda à Sissa ce que celui-ci souhaitait en échange de ce cadeau extraordinaire.
Sissa demanda au prince de déposer un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier en doublant la quantité de grain à chaque case.
Le prince accorda immédiatement cette récompense sans se douter de ce qui allait suivre.
Son conseiller lui expliqua qu'il venait de précipiter le royaume dans la ruine car les récoltes de l'année ne suffiraient pas à payer Sissa.

1	2	4					

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

Le nombre total de grains de riz est égal à $1+2+2^2+...+2^{63}=\dfrac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1$ ce qui donne un nombre supérieur à la production annuelle totale de riz.

Nous appellerons parois l'égalité $1+x+x^2+...+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ « formule des grains de riz ».

2°) Formule sommatoire

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q\neq 1$ est donnée par la formule :

$$\left(\textbf{premier terme}\right)\times\frac{q^{\text{nombre de termes}}-1}{q-1}\ \textbf{ou}\ \left(\textbf{premier terme}\right)\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

On constate que la formule n'a aucun rapport avec celle pour les suites arithmétiques.

3°) Démonstration

On considère p termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q\neq 1$.

On note S la somme de ces termes et a le premier terme de cette somme.

On a $S=a+a\times q+a\times q^2+...+a\times q^{p-1}$.

En factorisant par a, on obtient $S=a\times\left(1+q+q^2+...+q^{p-1}\right)$.

Comme $q\neq 1$, d'après le 1°), on peut écrire $S=a\times\dfrac{q^p-1}{q-1}$.

On obtient donc $S=\left(\text{premier terme}\right)\times\dfrac{q^{\text{nombre de termes}}-1}{q-1}$.

4°) Exemple

***u* est la suite géométrique de premier terme $u_0=5$ et de raison $q=\dfrac{2}{3}$.**

Exprimer $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ en fonction de *n* (sous forme factorisée).

On applique la formule sommatoire.

On écrit donc $S_n=\left(\text{premier terme}\right)\times\dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad S_n=5\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=5\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}$$

$$=15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

On teste la formule pour $n=0$ (important).

On sait que $S_0=u_0=5$.

Or pour $15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{0+1}\right]=15\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=15\times\frac{1}{3}=5$.

La formule marche donc bien pour $n=0$.

5°) Retour sur la formule de somme de puissances successives d'un réel différent de 1

On considère un réel q différent de 1 et l'on additionne les puissances successives de q d'exposants entiers naturels.

$$\forall q \neq 1 \quad 1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

On peut aussi écrire cette formule sommatoire sous la forme :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ (en multipliant le numérateur et le dénominateur par – 1).

VI. Rappels sur les puissances

1°) Conventions – définitions

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$\left.\begin{array}{l} a^{-1} = \dfrac{1}{a} \\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n \end{array}\right\} a \neq 0$$

0^0 n'existe pas.

Exemples

⚠ **Calculer :**

$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad (\neq 0{,}2)$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \qquad (\neq 0{,}05)$

$2^{-n} \neq -2^n$

2°) Règles

a et b sont des réels quelconques.
m et n sont des entiers relatifs.

R₁ $\quad a^m \times a^n = a^{m+n}$

R₂ $\quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

R₃ $\quad \left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$

R₄ $\quad (ab)^n = a^n \times b^n$

- ⚠ Pas de règle quand on additionne des puissances : $3^2+5^2=?$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^n \neq \frac{1^n}{3}$
- $-5^n \neq (-5)^n$ pour n impair
- $5-2^n \neq (5-2)^n$

3°) Exercice : transformations d'écriture

n est un entier naturel quelconque.

Écrire sous la forme a^n en utilisant les règles.

$\frac{3^n}{2^n}$; 5^{-n} ; $2^n \times 3^{-n}$; 3^{2n} ; 2^{-3n}.

$\frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$5^{-n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

$2^n \times 3^{-n} = 2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Appendice

Caractérisation des progressions géométriques de 3 termes

Propriété

Trois réels a, b, c forment dans cet ordre une suite géométrique si et seulement si

a, b, c sont non nuls et $b^2 = ac$

ou

$a = b = c = 0$.

Démonstration :

Donner un exemple de trois réels a, b, c vérifiant la relation $b^2 = ac$ mais qui ne sont pas dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

$a = 0$ $b = 0$ $c = 1$ (ou n'importe quel autre réel non nul)