1ère S1

Devoir pour le lundi 2 avril 2012

I. Spirale de Pythagore

Avertissement :

La notation $\tan^{-1}$ utilisée dans cet exercice reprend celle en usage au collège et en seconde ; elle correspond à la touche utilisée sur certaines calculatrices. Elle est précisée ainsi :

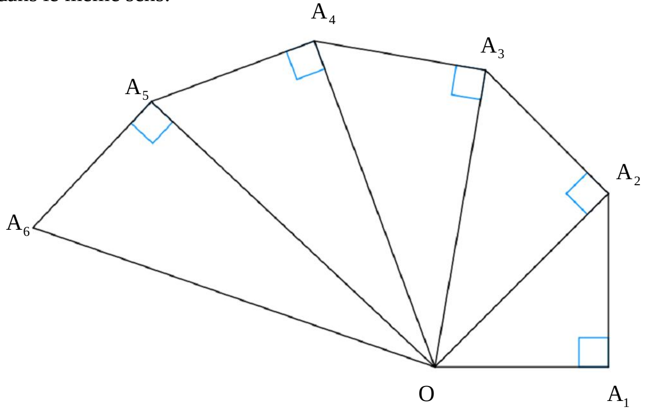
Pour tout réel a, $\tan^{-1} a$ désigne la mesure en degrés de l'angle dont la tangente est égale à a.

Sur calculatrice, l'affichage correspondant est « Arctan » et correspond à la fonction « Arctangente ».
Cette fonction permet de calculer la mesure en degré d'un angle dont on connaît la tangente.

On effectue la construction algorithmique suivante :

- O et A_1 sont deux points tels que $OA_1 = 1$;
- A_2 est le point tel que OA_1A_2 rectangle en A_1 tel que $A_1A_2 = 1$;
- A_2 est le point tel que OA_2A_3 rectangle en A_2 tel que $A_2A_3 = 1$;
- A_3 est le point tel que OA_3A_4 rectangle en A_3 tel que $A_3A_4 = 1$ …

On tourne toujours dans le même sens.



Avec les points A_1, A_2, A_3 … on construit une spirale appelée **spirale de Pythagore**.

Refaire la construction sur *Geogebra* (il n'est pas demandé d'imprimer la feuille). On pourra éventuellement réaliser un « outil » permettant de rendre automatique la construction.

On rappelle que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on a $OA_k = \sqrt{k}$.

1°) Calculer $\tan \widehat{A_kOA_{k+1}}$ en fonction de k.

2°) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

On notera qu'il n'existe pas de formule sommatoire pour S_n.

a) À l'aide de la calculatrice (à l'aide de la fonctions spéciale permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite ou d'un algorithme), d'un logiciel de calcul formel ou d'un tableur, donner la valeur arrondie au millième de S_{18}.

Avant de donner le résultat, indiquer le moyen de calcul utilisé. Ne pas oublier de se mettre en mode degré.

Avec 18 points, a-t-on fait un tour complet autour du point O ? Justifier.
Vérifier la réponse grâce au tracé de la spirale.

b) Avec 36 points, a-t-on fait deux tours complets autour du point O ? Justifier.

c) Avec 110 points, combien de tours fait-on autour du point O ? Justifier.

II. Carrés magiques

1°) Un carré magique d'ordre 3 est un carré de 3 lignes et 3 colonnes.
Les neuf premiers entiers naturels non nuls sont disposés dans ce carré, de telle sorte que les sommes des nombres figurant sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale soient égales.

Démontrer que dans tout carré magique d'ordre 3, ces sommes sont égales à 15.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2°) Un carré magique d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) est un tableau de n lignes et n colonnes où sont disposés les n^2 premiers nombres entiers non nuls suivant la règle donnée dans le 1°).

a) Démontrer que si un carré magique d'ordre n existe, alors la somme des nombres de chaque ligne est égale à $\frac{1}{2}n\left(n^2+1\right)$.

b) Démontrer qu'il n'existe pas de carré magique d'ordre 2.

Corrigé du DM pour le 2 avril 2012

I. Spirale de Pythagore

1°) Calculons $\tan \widehat{A_kOA_{k+1}}$ en fonction de *k*.

Dans le triangle OA_kA_{k+1} rectangle en A_k, on a :

$$\tan \widehat{A_kOA_{k+1}} = \frac{A_kA_{k+1}}{OA_k}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}}$$

2°) $S_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad (n \geqslant 2)$

On peut noter que cette somme s'écrit « en extension » de la manière suivante :

$$S_n = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$$

Il convient tout d'abord de noter que $S_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} \widehat{A_kOA_{k+1}}$.

Il n'existe pas de formule sommatoire pour S_n.

La calculatrice permet de calculer cette somme :

On se met en mode degré.

• Calculatrice TI :

On doit afficher sur l'écran : $\boxed{\text{somme(suite(Arctan(1/}\sqrt{\ }\text{ K, K, 1, 17))}}$.
On obtient :
- *somme* (ou *sum* en anglais) par Listes ($\boxed{\text{2 nde}}$ $\boxed{\text{stats}}$), choix MATH, puis *somme* ;
- *suite* (ou *seq* avec une parenthèse lorsque la calculatrice est en anglais) par Listes, OPS puis suite(.

Il est possible d'obtenir *somme* et *suite* en allant dans le catalogue (pour cela, taper $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{0}$) et on cherche dans la liste.

• Calculatrice CASIO GRAPH 35 + :

On doit afficher sur l'écran : $\boxed{\sum_{k=1}^{17} \tan^{-1}(1/\sqrt{k})}$.

On fait : Menu Math (F4) puis F6 : il s'affiche le symbole Σ.

a) Calculons S_{18}.

Avant de donner le résultat, indiquer le moyen de calcul utilisé. Ne pas oublier de se mettre en mode degré.

$$S_{18} = \sum_{k=1}^{k=17} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

Avec la calculatrice ou avec un tableur, on obtient : $S_{18} = 364{,}7834423\ldots$ (on ne met pas d'unité)

Donc $S_{18} \approx 364{,}783$ (valeur arrondie au millième)

Un tour complet correspond à 360 °.

On a : 360 °< S_{18} < 720 ° donc on a fait plus d'un tour complet autour du point O.

On le vérifie grâce à la figure dynamique sur *Geogebra*.

b) Avec la calculatrice ou avec un tableur, on obtient $S_{36} = 565{,}5068256\ldots$
Donc $S_{36} \approx 565{,}783$ (valeur arrondie au millième)

Sur calculatrice TI, on n'est pas obligé de tout retaper.
On tape $\boxed{\text{2nde}}$ puis $\boxed{\text{Enter}}$; on remplace le 17 par 35.

On a : $S_{36} < 720$ ° donc avec 36 points, on n'a pas fait deux tours complets autour du point O.

En fait, en calculant le quotient $\frac{S_{36}}{360}$ à la calculatrice, on constate que l'on a fait « environ » un tour et demi.

c)

Avec la calculatrice ou avec un tableur, on obtient $S_{110} = 1079{,}124627\ldots$
Donc $S_{110} \approx 1079{,}125$ (valeur arrondie au millième)

On a : $2 \times 360 < S_{36} < 3 \times 360°$ donc avec 110° points, on n'a fait deux tours complets autour du point O .

En calculant le quotient $\frac{S_{110}}{360}$, on constate que l'on a « presque » fait trois tours (car le quotient est proche de 2,99).

Autre façon de rédiger :

Deux tours complets autour du point sont équivalents à une rotation de 720 °.

Trois tours complets autours du point O sont équivalents à une rotation de 1080°.

À propos du calcul de somme sur calculatrice TI.

Pour ne pas recopier a été écrit sur la calculatrice, il faut, après avoir tapé la valeur voulue, taper 2nde puis Enter ce qui nous recopiera tout seul la phrase voulue pour en changer les valeurs.

Il est intéressant de voir ce qui se passe pour 1000 points, 2000 points, 5000 points selon les limites de capacités du moyen de calcul utilisé.

Algorithme de calcul de la somme :

Variables :
N, k : entiers naturels
A : réel

Entrée :
Saisir N

Initialisation :
A prend la valeur 0

Traitement :
Pour k allant de 1 à N – 1 **Faire**
A prend la valeur A + $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$
FinPour

Sortie :
Afficher A

II. Carrés magiques

1°) **Démontrons que dans tout carré magique d'ordre 3, les sommes des éléments de toutes les lignes, de toutes les colonnes et des deux diagonales sont égales à 15.**

Un carré magique d'ordre 3 contient tous les entiers naturels de 1 à 9.
La somme de tous les nombres contenus dans un carré magique d'ordre 3 est égale à la somme de tous les entiers naturels de 1 à 9.

Or 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.

Notons S la somme des éléments de chaque ligne (ou de chaque colonne, ou de chaque diagonale) d'un carré magique d'ordre 3.

Comme il y a trois lignes, on a : $S = \frac{45}{3} = 15$.

Conclusion :
Dans tout carré magique d'ordre 3, les sommes des éléments de toutes les lignes, de toutes les colonnes et des deux diagonales sont égales à 15.

Commentaires :

1. La somme de tous les entiers naturels de 1 à 9 peut se noter à l'aide du symbole S sous la forme : $\sum_{k=1}^{k=9} k$.

2. Pour calculer cette somme, on peut utiliser à la formule sommatoire vue dans plusieurs devoirs précédents ou au cours sur les suites arithmétiques (2[e] partie) :

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \dfrac{9\times(9+1)}{2} = 45$

3. Il est possible de nommer les éléments qui composent un carré magique d'ordre 3 (a, b, c, d, e, f, g, h, i ou x_1, x_2 … x_9) mais cela ne rend pas forcément la démonstration plus claire.

2°)

a) **Démontrons que si un carré magique d'ordre *n* existe, alors la somme des nombres de chaque ligne est égale à $\frac{1}{2}n\left(n^2+1\right)$.**

Si un carré magique d'ordre n existe, alors il comprend tous les entiers naturels de 1 à n^2 disposés dans n lignes et n colonnes.

Donc la somme de tous les nombres qui le composent est égale à $\frac{1}{2}n^2\left(n^2+1\right)$ (formule sommatoire).

Comme il y a n lignes, la somme des éléments de chaque ligne est égale à $\dfrac{\frac{1}{2}n^2\left(n^2+1\right)}{n} = \dfrac{n\left(n^2+1\right)}{2}$

b) **Démontrons qu'il n'existe pas de carré magique d'ordre 2.**

On effectue un **raisonnement par l'absurde**.

S'il existait un carré magique d'ordre 3, alors d'après la question précédente, la somme des éléments de toutes les lignes, de toutes les colonnes ou des diagonales serait égale à $\frac{1}{2}\times 2^2\times\left(2^2+1\right)$ = 5.

Le nombre 5 devrait donc pouvoir s'écrire de 6 manières différentes comme somme de deux entiers entre 1 et 4.
Or cela n'est possible que deux façons différentes : 5 = 2 + 3 = 4 + 1.

On en déduit qu'il n'existe pas de carré magique d'ordre 2.