$1^{\text{ère}}$ S — Exercices sur les formules d'addition et de duplication

1 Soit x un réel quelconque.

« Développer » $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$ (en calculant ce qui est calculable).

2 Soit x un réel quelconque. Réduire les expressions suivantes :

$A=\cos 3x\ \cos 5x+\sin 3x\ \sin 5x$; $B=\cos x\ \cos 2x-\sin x\ \sin 2x$;

$C=\cos 7x\ \sin 6x-\sin 7x\ \cos 6x$; $D=\cos 3x\ \sin 2x+\cos 2x\ \sin 3x$.

3 Soit x un réel quelconque qui n'est pas un multiple entier de $\dfrac{\pi}{2}$. Calculer l'expression $A=\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

4 Soit x un réel quelconque. Calculer les expressions :

$A=\cos x+\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ et $B=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

Application :

Calculer $\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{7\pi}{9}+\cos\dfrac{13\pi}{9}$ et $\sin\dfrac{\pi}{9}+\sin\dfrac{7\pi}{9}+\sin\dfrac{13\pi}{9}$.

5 Soit x un réel tel que $\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Calculer $\cos 2x$, $\cos 4x$, $\cos 8x$.

6 On note a le réel de l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos a=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Calculer cos $2a$; en déduire la valeur de a.

7 Soit x un réel quelconque. Démontrer les égalités :

1°) $1+2\cos x+\cos 2x=2\cos x(1+\cos x)$ 2°) $1+2\sin x-\cos 2x=2\sin x(1+\sin x)$.

8 Donner une factorisation des expressions $A=1-\cos 2x+\sin x$ et $B=1-\cos 2x+\sin 2x$.

9 Soit x un réel quelconque. Démontrer les égalités suivantes :

1°) $(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$ 2°) $4\cos^2 x+2\sin^2 x=3+\cos 2x$ 3°) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$.

Indication pour le 3°) :

Écrire $\cos^4 x-\sin^4 x=(\cos^2 x)^2-(\sin^2 x)^2$ de manière à faire apparaître une identité remarquable.

10 Soit x un réel quelconque qui n'est pas un multiple entier de $\dfrac{\pi}{2}$.

1°) Simplifier $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$.

2°) À l'aide du 1°), calculer les valeurs exactes de $\tan\dfrac{\pi}{8}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

11 Soit x un réel quelconque.

Exprimer cos $4x$ en fonction de cos $2x$; en déduire cos $4x$ en fonction de cos x.

12 Soit x un réel quelconque.

En écrivant $3x=2x+x$, exprimer cos $3x$ en fonction de $\cos x$ et sin $3x$ en fonction de sin x.

Indications :

- Pour cos $3x$, partir de l'égalité $\cos 3x=\cos(2x+x)$ puis « développer ». Ensuite, appliquer les formules d'addition et de duplication.
- Même méthode pour sin $3x$.

Application :

À l'aide de ces formules retrouver le résultat de l'exercice **3** c'est-à-dire une simplification de l'expression $A=\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ où x est un réel quelconque qui n'est pas un multiple entier de $\dfrac{\pi}{2}$.

13 Linéariser $\cos^2\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)$ où t est un réel.

14 1°) Soit a, b, c trois réels quelconques.

Exprimer $\cos(a+b+c)$ et $\sin(a+b+c)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$.

On donnera le résultat sous forme d'une expression développée (donc sans parenthèses).

2°) Exprimer alors à l'aide des formules obtenues à la question précédente cos $3x$ en fonction de $\cos x$ et sin $3x$ en fonction de sin x (x désigne un réel quelconque). Retrouver les résultats de l'exercice **12**.

Valeurs remarquables du sinus, du cosinus et de la tangente :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Rappel : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Les réels 0, 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et leurs opposés sont des valeurs remarquables du cosinus et du sinus.

Réponses

$\boxed{1}$ On utilise les formules d'addition du cosinus et du sinus.

On utilise les valeurs de cosinus et de sinus de valeurs remarquables :

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{2}$ $A=\cos 2x$; $B=\cos 3x$; $C=-\sin x$; $D=\sin 5x$

$\boxed{3}$ $A=2$ (on utilise la formule $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$)

$\boxed{4}$ $A=B=0$

Méthode :

On développe les expressions avec les formules d'addition et on utilise :

$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$; $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$; $\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Les lignes trigonométriques de $\frac{4\pi}{3}$ se lisent directement sur le cercle trigonométrique.

On peut aussi écrire :

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}$$

$\boxed{5}$ $\cos 2x=-\frac{1}{3}$

$\boxed{6}$ $\cos 2a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $a=\frac{\pi}{12}$ (il faut justifier précisément avec l'intervalle)

$\boxed{7}$

$\boxed{8}$ $A=\sin x\,(2\sin x+1)$; $B=2\sin x(\sin x+\cos x)$

$\boxed{9}$ 2°) On change l'expression du 1^er^ membre ; on change l'expression du second membre et on montre que les deux expressions sont égales.

On exprime toutes les deux en fonctions de $\cos^2 x$.

$$4\cos^2 x+2\sin^2 x=4\cos^2 x+2\left(1-\cos^2 x\right)=2\cos^2 x+2$$

$$3+\cos 2x=3+2\cos^2 x-1=2+2\cos^2 x$$

3°) $\cos^4 x-\sin^4 x=\left(\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1}\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

Attention à ne pas compliquer inutilement.

Exemple de complication inutile :

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{2\cos 2x}{2}=\cos 2x$$

On utilise directement la formule qui nous donne cos 2x.

$\boxed{10}$ 1°) $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\tan x$; 2°) $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$; $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

$\boxed{11}$ $\cos 4x=2\cos^2(2x)-1=2\left[\cos(2x)\right]^2-1=2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1=\ldots=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

On a bien exprimé cos 4x en fonction de cos 2x (même si en fait, on a exprimé cos 4x en fonction de $\cos^2 2x$).

Méthode du changement de variable : $X=2x$.

$\cos(2X)=2\cos^2 X-1$

$\boxed{12}$ $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$; $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

Il est conseillé de retenir ces formules. Grâce à elles, on peut retrouver le résultat de l'exercice $\boxed{3}$.

$$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\ldots=4\cos^3 x-3\cos x$$

Écrire $\sin 2x=2\sin x\cos x$ puis $\sin^2 x=1-\cos^2 x$.

Solutions détaillées

1 Développements d'expressions

On utilise les formules d'addition du cosinus et du sinus.

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a\ \cos b + \sin b\ \cos a \\
\sin(a-b) &= \sin a\ \cos b - \ \sin b\ \cos a
\end{aligned}$$

• **Développons $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.**

$$\begin{aligned}
\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) &= \cos x \times \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \times \sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x
\end{aligned}$$

N.B. :

On peut écrire $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$ mais ce type d'écriture n'est pas attendu car le but de l'exercice, c'est de développer pas de factoriser.

• **Développons $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$.**

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) &= \sin\frac{\pi}{3} \times \cos x + \sin x \times \cos\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos x + \frac{1}{2} \times \sin x
\end{aligned}$$

On peut vérifier les deux résultats à l'aide d'un logiciel de calcul formel (commande spécial de développement d'une expression trigonométrique).

2 Réductions d'expressions trigonométriques

On fait l'inverse de ce qui l'on a fait dans l'exercice précédent.

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a\ \cos b + \sin b\ \cos a \\
\sin(a-b) &= \sin a\ \cos b - \ \sin b\ \cos a
\end{aligned}$$

$A = \cos 3x\ \cos 5x + \sin 3x\ \sin 5x$

$= \cos(3x-5x)$ (on applique la formule $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ avec $a=3x$ et $b=5x$)

$= \cos(-2x)$

$= \cos 2x$ (on applique la formule $\cos(-\mathrm{X}) = \cos \mathrm{X}$ valable pour tout réel X)

$B = \cos x\ \cos 2x - \sin x\ \sin 2x$

$= \cos(x+2x)$ (on applique la formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ avec $a = x$ et $b=2x$)

$= \cos 3x$

$C = \cos 7x\ \sin 6x - \sin 7x\ \cos 6x$

$= \sin 6x \cos 7x - \cos 6x \sin 7x$ (on applique la formule $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ avec $a = 6x$ et $b = 7x$)

$= \sin(6x-7x)$

$= \sin(-x)$

$= -\sin x$

$D = \cos 3x\ \sin 2x + \cos 2x\ \sin 3x$

$= \sin(3x+2x)$ (on applique la formule $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ avec $a=3x$ et $b=2x$ ou $a=2x$ et $b=3x$)

$= \sin 5x$

On a le droit d'additionner ou de soustraire dans un cosinus ou un sinus.

3

$$A = \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

Il faut que x ne soit pas un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$ pour que les dénominateurs ne soient pas nuls.

Calculons *A*.

$$A=\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin 3x\times\cos x-\cos 3x\times\sin x}{\sin x\times\cos x}$$ (on commence par mettre A au même dénominateur)

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\times\cos x}$$

$$=\frac{\sin 2x}{\sin x\times\cos x}$$

$$=\frac{2\sin x\times\cos x}{\sin x\times\cos x}$$

$$=2$$

$\boxed{4}$ Simplifications d'expressions

Pour A, on applique la formule $\cos(a+b)$.

Pour B, on applique la formule $\sin(a+b)$.

$$\begin{aligned}A&=\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\\&=\cos x+\cos x\times\cos\frac{2\pi}{3}-\sin x\times\sin\frac{2\pi}{3}+\cos x\times\cos\frac{4\pi}{3}-\sin x\times\sin\frac{4\pi}{3}\\&=\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\\&=0\end{aligned}$$

(on laisse le cos x tel quel)

$$\begin{aligned}B&=\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\\&=\sin x+\sin x\times\cos\frac{2\pi}{3}+\cos x\times\sin\frac{2\pi}{3}+\sin x\times\cos\frac{4\pi}{3}+\cos x\times\sin\frac{4\pi}{3}\\&=\sin x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\\&=0\end{aligned}$$

Quelques commentaires :

- On peut observer que les valeurs de A et de B ne dépendent pas de x.
- Il est possible d'utiliser un logiciel de calcul formel pour calculer ce type d'expression.
- La valeur de B se déduit de celle de A en remplaçant x par $x+\frac{\pi}{2}$.

On peut aussi obtenir la valeur de B en dérivant l'expression A par rapport à x (méthode de Terminale).

Application :

Calculons $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}$ et $\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{7\pi}{9}+\sin\frac{13\pi}{9}$.

En fait, on va répondre sans faire de calcul. On commence par transformer ces deux sommes de manières à faire le lien avec les deux expressions A et B calculées précédemment.

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}&=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\left(\frac{\pi+6\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{\pi+12\pi}{9}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Donc la première somme correspond à la valeur de A pour $x=\frac{\pi}{9}$.

Or on démontré que l'expression vaut 0 quelle que soit la valeur de x.

On en déduit sans calcul que $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}=0$.

De même, $\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{7\pi}{9}+\sin\frac{13\pi}{9}=0$ (même raisonnement).

$\boxed{5}$

$$\cos x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On pourra observer que $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ n'est pas une valeur remarquable du cosinus.

On ne cherche pas la valeur de x.

On ne connaît pas x mais on connaît son cosinus.

Calculons cos 2*x*.

On utilise la formule de duplication qui permet de calculer le cosinus du double d'un réel dont on connaît le cosinus.

$$\begin{aligned}\cos 2x&=2\cos^2 x-1\\&=2\times(\cos x)^2-1\\&=2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1\\&=2\times\frac{1}{3}-1\\&=\frac{2}{3}-1\\&=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 2x=-\frac{1}{3}}$$

Calculons cos 4x.

On écrit $4x = 2\times 2x$. On applique ensuite la formule de duplication $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ en prenant $a = 2x$ (changement de variable).

On utilise la formule de duplication qui permet de calculer le cosinus du double d'un réel dont on connaît le cosinus.

Une méthode fausse consisterait à « sortir » le 2 dans $\cos(2\times 2x)$.

Par ailleurs, il faut bien voir que dans la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ce n'est pas le 2 qu'on « sort ».

Il n'est pas intéressant d'écrire $4x = 2x + 2x$.

$$\begin{aligned}
\cos 4x &= \cos(2\times 2x)\\
&= 2\cos^2(2x) - 1\\
&= 2\times(\cos 2x)^2 - 1\\
&= 2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 \qquad \text{(on reprend le résultat de } \cos 2x \text{ que l'on a trouvé avant)}\\
&= 2\times\frac{1}{9} - 1\\
&= \frac{2}{9} - 1\\
&= -\frac{7}{9}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 4x = -\frac{7}{9}}$$

Calculons cos 8x.

On écrit $8x = 2\times 4x$. On applique ensuite la formule de duplication $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ en prenant $a = 4x$ (changement de variable).

On utilise la formule de duplication qui permet de calculer le cosinus du double d'un réel dont on connaît le cosinus.

$$\begin{aligned}
\cos 8x &= \cos(2\times 4x)\\
&= 2\cos^2(4x) - 1\\
&= 2\times\left(-\frac{7}{9}\right)^2 - 1 \qquad \text{(on reprend le résultat de } \cos 4x \text{ que l'on a trouvé avant)}\\
&= 2\times\frac{49}{81} - 1\\
&= \frac{17}{81}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 8x = \frac{17}{81}}$$

On peut calculer de proche en proche $\cos 16x$, $\cos 32x$ … (on peut d'ailleurs penser à la commande « Rép » ou « Ans » de la calculatrice.
Il y aurait moyen d'ailleurs de définir une suite.

6

$a \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad \cos a = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Calculons cos 2a.

$$\begin{aligned}
\cos 2a &= 2\cos^2 a - 1\\
&= 2\times(\cos a)^2 - 1\\
&= 2\times\frac{2+\sqrt{3}}{4} - 1\\
&= \frac{2+\sqrt{3}}{2} - 1\\
&= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Déduisons-en la valeur de a.

Or $a \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $2a \in [0\,;\pi]$.

Le seul nombre de l'intervalle $[0\,;\pi]$ dont le cosinus est égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\frac{\pi}{6}$.

Donc $2a = \frac{\pi}{6}$ d'où $\boldsymbol{a = \frac{\pi}{12}}$.

Il est intéressant de voir que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et de faire le lien avec la valeur donnée dans le cours : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

En effet, on vérifie aisément par le calcul que $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2$.

Intérêt des exercices $\boxed{7}$ à $\boxed{9}$: calcul littéral trigonométrique (développements et factorisations d'expressions avec des cosinus et des sinus).

$\boxed{7}$ Démonstrations d'égalités (calcul littéral trigonométrique)

Cet exercice est l'occasion de revoir les méthodes de démonstration d'égalités.

Méthode (pour l'exercice présent) :

Partir du membre de gauche pour arriver au membre de droite.
Il est assez pratique de donner un nom au membre de gauche (A, B …).

Une mauvaise méthode consiste à partir de l'égalité que l'on nous demande de démontrer et à transformer cette égalité pour aboutir à une égalité « idiote » du type « $0=0$ » ou « $1=1$ ».

• Démontrons que $1+2\cos x+\cos 2x=2\cos x(1+\cos x)$.

On pose $A=1+2\cos x+\cos 2x$.

$$\begin{aligned} A&=1+2\cos x+\cos 2x\\ &=1+2\cos x+2\cos^2 x-1\\ &=2\cos x+2\cos^2 x\\ &=2\cos x(1+\cos x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A&=1+2\cos x+\cos 2x\\ &=2\cos x+(1+\cos 2x)\\ &=2\cos x+2\cos^2 x\\ &=2\cos x(1+\cos x)\end{aligned}$$

• Démontrons que $1+2\sin x-\cos 2x=2\sin x(1+\sin x)$.

On pose $B=1+2\sin x-\cos 2x$.

$$\begin{aligned} B&=1+2\sin x-\cos 2x\\ &=1+2\sin x-1+2\sin^2 x\\ &=2\sin x+2\sin^2 x\\ &=2\sin x(1+\sin x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B&=1+2\sin x-\cos 2x\\ &=2\sin x+(1-\cos 2x)\\ &=2\sin x+2\sin^2 x\\ &=2\sin x(1+2\sin x)\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ Factorisations d'expressions (calcul littéral trigonométrique)

$$\begin{aligned} A&=1-\cos 2x+\sin x\\ &=1-1+2\sin^2 x+\sin x\\ &=2\sin^2 x+\sin x\\ &=\sin x(2\sin x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A&=\underbrace{1-\cos 2x}+\sin x\\ &=2\sin^2 x+\sin x\\ &=\sin x(2\sin x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B&=1-\cos 2x+\sin 2x\\ &=1-1+2\sin^2 x+2\sin x\cos x\\ &=2\sin^2 x+2\sin x\cos x\\ &=2\sin x(\sin x+\cos x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B&=\underbrace{1-\cos 2x}+\sin 2x\\ &=2\sin^2 x+2\sin x\cos x\\ &=2\sin x(\sin x+\cos x)\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Démonstrations d'égalités (calcul littéral trigonométrique)

De nouveau, dans cet exercice, on part du premier membre pour arriver au second membre (il s'agit en quelque sorte d'égalités orientées).

1°) **Démontrons que : $(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$.**

$$\begin{aligned}(\cos x-\sin x)^2&=\cos^2 x-2\cos x\times\sin x+\sin^2 x\\ &=\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1}-2\sin x\times\cos x \quad \text{(utilisation de la relation fondamentale } \cos^2 x+\sin^2 x=1)\\ &=1-\sin 2x\end{aligned}$$

$(\cos x-\sin x)^2$: On peut développer en identité remarquable.

2°) **Démontrons que : $4\cos^2 x+2\sin^2 x=3+\cos 2x$.**

$$\begin{aligned}4\cos^2 x+2\sin^2 x&=2\times 2\cos^2 x+2\sin^2 x\\ &=2(1+\cos 2x)+1-\cos 2x \quad (2\cos^2 x=1+\cos 2x \text{ et } 2\sin^2 x=1-\cos 2x)\\ &=3+\cos 2x\end{aligned}$$

Variante :

$$\begin{aligned}4\cos^2 x+2\sin^2 x&=4\times\frac{1+\cos 2x}{2}+2\times\frac{1-\cos 2x}{2}\\ &=2(1+\cos 2x)+1-\cos 2x\\ &=3+\cos 2x\end{aligned}$$

Méthode moins bonne :

$$\begin{aligned}4\cos^2 x+2\sin^2 x&=4\cos^2 x+2(1-\cos^2 x)\\ &=2\cos^2 x+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3+\cos 2x&=3+2\cos^2 x-1\\ &=2\cos^2 x+2\end{aligned}$$

Donc $4\cos^2 x+2\sin^2 x=3+\cos 2x$.

On peut dire que l'on a linéarisé l'expression $4\cos^2 x+2\sin^2 x$.

3°) **Démontrons que : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.**

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 - \left(\sin^2 x\right)^2 \quad \text{(identité remarquable !)}$$
$$= \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$$
$= \cos 2x \times 1$ (formule de duplication $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ et relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)
$$= \cos 2x$$

Autre méthode un peu plus compliquée (inutilement compliquée) :

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 - \left(\sin^2 x\right)^2$$
$$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$
$$= \cos 2x \times 1$$
$$= \cos 2x$$

On peut dire que l'on a linéarisé l'expression $\cos^4 x - \sin^4 x$.

Il n'est pas nécessaire d'introduire des complications inutiles (avant de rédiger une solution, on réfléchit au brouillon).

$\boxed{10}$ **Pour cet exercice, faire tous les traits de fractions à la règle.**

La condition « x n'est pas un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$ » assure que le dénominateur de l'expression $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ n'est pas nul.

1°) **Simplifions $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$.**

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1-\left(1-2\sin^2 x\right)}{2\sin x \times \cos x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{\text{définition de } \tan x}{=} \tan x$$

Autre façon (un peu maladroite) :

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1-2\cos^2 x+1}{2\sin x \times \cos x}$$
$$= \frac{2-2\cos^2 x}{2\sin x \cos x}$$
$$= \frac{2\left(1-\cos^2 x\right)}{2\sin x \cos x}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}$$
$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$= \tan x$$

2°) Cette question constitue une application de la question 1°) : on utilise l'égalité $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$ démontrée dans cette question pour des valeurs particulières de x.

• **Calculons $\tan\frac{\pi}{8}$.**

On applique l'égalité obtenue dans la question 1°) (c'est-à-dire $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$) pour $x = \frac{\pi}{8}$.

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$= \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

1$^{\text{ère}}$ façon :

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$ (on utilise les valeurs remarquables : $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\cancel{\sqrt{2}}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}}$$

$$= \sqrt{2}-1$$

2$^{\text{e}}$ façon :

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$ (on utilise les valeurs remarquables : $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$= \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}-1$$

3$^{\text{e}}$ façon :

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$ (on utilise les valeurs remarquables : $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$= \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}-2}{2}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$$

$$= \sqrt{2}-1$$

$$\mathbf{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1}$$ (valeur exacte)

• Calculons $\tan\frac{\pi}{12}$.

On applique l'égalité du 1°) pour $x = \frac{\pi}{12}$.

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$= \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{1}$$

$$= 2-\sqrt{3}$$

$$\mathbf{\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}}$$

On vérifie à l'aide de la calculatrice.
Attention, il faut mettre la calculatrice en mode radian.

La calculatrice donne la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{12}$ mais pas celle de $\tan\frac{\pi}{8}$.

11 **Expression de cos 4*x* en fonction de cos *x***

Exprimons cos 4*x* en fonction de cos 2*x*.

Méthode du changement de variable : $X = 2x$.

$\cos(2X) = 2\cos^2 X - 1$

On reprend la « valeur normale » de *x*.

$$\cos 4x = \cos(2\times 2x)$$
$$= 2\cos^2(2x) - 1$$
$$= 2\left[\cos(2x)\right]^2 - 1$$

On a bien exprimé cos 4*x* en fonction de cos 2*x* (même si en fait, on a exprimé cos 4*x* en fonction de $\cos^2 2x$).

Déduisons-en cos 4*x* en fonction de cos *x*.

$$\cos 4x = 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1$$
$$= 2\left(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1\right) - 1 \quad \text{(on utilise l'identité remarquable } (a-b)^2\text{)}$$
$$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \quad \text{(on s'arrête là, on ne peut pas aller plus loin)}$$

$\mathbf{\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1}$

On pourrait s'arrêter à l'étape $\cos 4x = 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1$ mais on aime mieux développer.

On vérifie aisément ce résultat avec un logiciel de calcul formel (sur XCas commande : texpand(cos(4*x)).

12 **Expressions de cos 3*x* en fonction de cos *x* et sin 3*x* en fonction de sin *x*.**

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$; $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
Il est conseillé de retenir ces formules. Grâce à elles, on peut retrouver le résultat de l'exercice **2** .

Idée : On écrit $\cos 3x = \cos(2x + x)$ et l'on développe à l'aide des formules d'addition.

Il s'agit de calcul littéral trigonométrique.

On « décompose » 3*x* en $2x + x$ puis on applique les formules d'addition.

On ne peut pas faire $\cos 3x = \cos 2x + \cos x$!
$\cos(a+b) = \cos a + \cos b$ est une égalité tentante à écrire mais fausse (on dit qu'il s'agit d'une « propriété-en-acte ».

Le mercredi 30 mai 2018

On peut faire apparaître des sinus … mais dans le résultat final il ne peut y avoir que cos *x*.
Il peut y avoir des sinus mais ensuite il faut s'en « débarrasser ».

$$\cos 3x = \cos(2x + x) \quad \text{(astuce de départ)}$$
$$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \quad \text{(on développe avec la formule d'addition du cosinus)}$$
$$= \left(2\cos^2 x - 1\right)\cos x - 2\sin x \cos x \times \sin x \quad \text{(formule de duplication du cosinus et du sinus)}$$

parenthèses indispensables

$$= \left(2\cos^2 x - 1\right)\cos x - 2\cos x \times \sin^2 x$$
$$= \left(2\cos^2 x - 1\right)\cos x - 2\cos x \times \left(1 - \cos^2 x\right) \quad \text{(on utilise la formule } \cos^2 x + \sin^2 x = 1\text{)}$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \quad \text{(il faut noter que } \cos x \times \cos^2 x = \cos^3 x\text{)}$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$\mathbf{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x}$

On vérifie aisément ce résultat avec un logiciel de calcul formel (sur XCas commande : texpand(cos(3*x)).

$$\sin 3x = \sin(2x + x) \quad \text{(astuce de départ)}$$
$$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \quad \text{(formule d'addition du sinus)}$$
$$= 2\sin x \cos x \times \cos x + \left(1 - 2\sin^2 x\right)\times \sin x \quad \text{(formule de duplication du cosinus et du sinus)}$$
$$= 2\sin x \times \cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x \quad \text{(on développe)}$$
$$= 2\sin x\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x - 2\sin^3 x \quad \text{(on utilise la formule } \cos^2 x + \sin^2 x = 1\text{)}$$
$$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x$$
$$= 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$\mathbf{\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x}$

On pourrait déduire sin 3*x* à l'aide de cos 3*x* en remplaçant *x* par $x + \frac{\pi}{2}$ mais le calcul est intéressant à savoir refaire indépendamment.

Le résultat obtenu sur un logiciel de calcul formel est différent (sur XCas commande : texpand(sin(3*x)).

On peut initier les élèves aux polynômes de Tchebytcheff de 1ère espèce grâce à un logiciel de calcul formel.

Application :

$$A=\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$=\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{\sin x}-\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\cos x}$$

$$=3-4\sin^2 x-4\cos^2 x+3$$

$$=6-4\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$

$$=6-4\times 1$$

$$=2$$

$\boxed{13}$ Linéarisons $\cos^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$ où t est un réel.

Que signifie « linéariser » ?

- appliquer une formule de linéarisation ;

- passer d'une écriture avec puissance à une écriture sans puissance.

On applique la formule de linéarisation : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$.

$$\cos^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1+\cos\left(2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2}$$

$$=\frac{1+\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right)}{2}\qquad\text{(c'est tout !)}$$

On a linéarisé l'expression demandée. On ne peut pas aller plus loin.

$\boxed{14}$

1°) Soit a, b, c trois réels quelconques.
Exprimer $\cos(a+b+c)$ et $\sin(a+b+c)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$.

On pose $A=\cos(a+b+c)$ et $B=\sin(a+b+c)$

$$\begin{aligned}A&=\cos(a+b+c)\\&=\cos\left[a+(b+c)\right]\\&=\cos a\cos(b+c)-\sin a\sin(b+c)\\&=\cos a\left(\cos b\cos c-\sin b\sin c\right)-\sin a\left(\sin b\cos c+\sin c\cos b\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\sin(a+b+c)\\&=\sin\left[a+(b+c)\right]\\&=\sin a\cos(b+c)+\cos a\sin(b+c)\\&=\sin a\left(\cos b\cos c-\sin b\sin c\right)+\cos a\left(\sin b\cos c+\sin c\cos b\right)\\&=\sin a\cos b\cos c-\sin a\sin b\sin c+\cos a\sin b\cos c+\cos a\sin c\cos b\end{aligned}$$

2°) Exprimer alors cos 3x en fonction de $\cos x$ et sin 3x en fonction de sin x.

Il s'agit de retrouver le résultat de l'exercice $\boxed{12}$.

On applique les formules du 1°) en prenant $a=b=c=x$.

$$\cos 3x=\cos^3 x-\cos x\sin^2 x-\sin^2 x\cos x-\cos x\sin^2 x$$

$$=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$$

$$=\cos^3 x-3\cos x\left(1-\cos^2 x\right)$$

$$=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\sin 3x=\sin x\cos x\cos x-\sin x\sin x\sin x+\cos x\sin x\cos x+\cos x\sin x\cos x$$

$$=\sin x\cos^2 x-\sin^3 x+\sin x\cos^2 x+\sin x\cos^2 x$$

$$=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$$

$$=3\sin x\left(1-\sin^2 x\right)-\sin^3 x$$

$$=3\sin x-4\sin^3 x$$