1ère S

Exercices sur les suites géométriques (2)

$\boxed{1}$ Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = -4$ et de raison $q = 3$.
Exprimer u_n en fonction de n.

$\boxed{2}$ Soit u la suite géométrique de premier terme $u_1 = \frac{1}{3}$ et de raison $q = 7$.
Exprimer u_n en fonction de n.

$\boxed{3}$ Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.
Exprimer u_n en fonction de n.

$\boxed{4}$ Soit u la suite définie par $u_n = -\frac{2\times 3^n}{7^{n-1}}$.
Déterminer la nature de la suite u et déterminer son sens de variation.

$\boxed{5}$ Soit u la suite définie par $u_n = \frac{8}{3^{n+1}}$.
Déterminer la nature de la suite u et déterminer son sens de variation.

$\boxed{6}$ Soit u la suite géométrique telle que $u_4 = 24$ et $u_7 = 192$.
Calculer u_0 et la raison q.

$\boxed{7}$ Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

$\boxed{8}$ Calculer la somme $S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$.

$\boxed{9}$ Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 4$.
1°) Calculer u_1, u_2, u_3.
2°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 2$.
a) Soit n un entier naturel fixé.
Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis v_{n+1} en fonction de u_n et enfin v_{n+1} en fonction de v_n.
b) Quelle est la nature de la suite v ?
c) Calculer v_0 ; exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Utilisation de la calculatrice

La calculatrice ne permet pas d'avoir l'expression de u_n en fonction de n.
La calculatrice permet de conjecturer, pas de démontrer.

Choisir SUITE(n+1)

● Définition des suites :

nMin $= 0$
$\mathrm{u}(n) = 3\mathrm{u}(n-1) + 4$
$\mathrm{u}(n\mathrm{Min}) = \{\ 0\ \}$
$\mathrm{v}(\mathrm{n}) = \mathrm{u} + 2$ ← noter la syntaxe très particulière de cette ligne (on écrit juste u et non $\mathrm{u}(n)$)
$\mathrm{v}(n\mathrm{Min}) = \{\ 2\ \}$ ← à mettre absolument, sinon ERROR est affiché pour $n = 0$

nMin $= 0$
$\mathrm{u}(n+1) = 3\mathrm{u}(n) + 4$
$\mathrm{u}(0) = 0$
$\mathrm{u}(1) =$
$\mathrm{v}(\mathrm{n}) = \mathrm{u} + 2$ ← noter la syntaxe très particulière de cette ligne (on écrit juste u et non $\mathrm{u}(n)$)
$\mathrm{v}(0) = 2$ ← à mettre absolument, sinon ERROR est affiché pour $n = 0$
$\mathrm{v}(1) =$

● Réglage pour le tableau de valeurs :

$\boxed{\text{2nde}} \rightarrow \boxed{\text{format}}$ (déf table)

Table Setup
TblStart = 0
ΔTbl = 1

DébTbl = 0
Pas = 1
Indpnt : Auto
Calculs : Auto

● Réglage pour le graphique en nuage de points :

$\boxed{\text{2nde}} \rightarrow \boxed{\text{format}} \rightarrow$ sélectionner Time ou $\mathrm{f}(n)$

On obtient plusieurs points.

Grâce au tableau de valeurs, on peut supposer que la suite (v_n) est géométrique de raison 3.

10 Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 1$.

a) Soit n un entier naturel fixé. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

b) Quelle est la nature de la suite v ?

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

Exprimer S'_n en fonction de n ; en déduire S_n en fonction de n.

11 Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 3$.

a) Soit n un entier naturel fixé. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

b) Quelle est la nature de la suite v ?

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

12 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{n+1}{4n}u_n$ pour tout naturel $n \geqslant 1$.

1°) Calculer u_2 et u_3 « à la main ».

2°) Rentrer la suite dans la calculatrice et vérifier les valeurs de u_2 et u_3 calculées précédemment.

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{u_n}{n}$.

Déterminer la nature de la suite v.

4°) Exprimer u_n en fonction de n.

13 Calculer la somme $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{1\,048\,576}$.

14 Simplifier la somme $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^n = \sum_{k=0}^{k=n} 3^k \quad (n \in \mathbb{N})$.

15 Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{k=n} (8 \times 5^k) \quad (n \in \mathbb{N})$.

16 Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{k=n} (-3)^k \quad (n \in \mathbb{N})$.

17 Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{k=n} (3^k - 2^k) \quad (n \in \mathbb{N})$.

18 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3^{2n+1} - 9^n$.

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

Le 8-5-2019

Peut-être mettre un exercice avec une boucle « Tantque ».

Réponses

Il est important de bien comprendre l'expression « exprimer en fonction de ».

« Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n »

« Exprimer u_n en fonction de u_{n+1} »

1 $u_n = -4\times 3^n$

2 $u_n = \dfrac{7^{n-1}}{3}$

3 $u_n = 5\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

4 u est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -14$ et de raison $q=\dfrac{3}{7}$; la suite u est strictement croissante à partir de l'indice 0.

5 u est une suite géométrique de premier terme $u_0=\dfrac{8}{3}$ et de raison $q=\dfrac{1}{3}$; la suite u est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

6 $u_0=\dfrac{3}{2}$; $q=2$

7 $S=\dfrac{2049}{1024}$

8 $S=1023$

9 Il s'agit de l'étude d'une suite arithmético-géométrique.
1°) $u_1=4$; $u_2=16$; $u_3=52$ 2°) c) $u_n=2\times 3^n-2$

10 Il s'agit de l'étude d'une suite arithmético-géométrique.

1°) $u_1=9$; $u_2=17$; $u_3=33$ 2°) a) $v_{n+1}=2v_n$ c) $u_n=4\times 2^n+1=2^{n+2}+1$

11 Il s'agit de l'étude d'une suite arithmético-géométrique.
1°) $u_1=\dfrac{5}{3}$; $u_2=\dfrac{23}{9}$; $u_3=\dfrac{77}{27}$ 2°) a) $v_{n+1}=\dfrac{1}{3}v_n$ c) $u_n=3-4\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

12 1°) $u_2=\dfrac{5}{2}$; $u_3=\dfrac{15}{16}$

2°) v est une suite géométrique de premier terme $v_1=5$ et de raison $q=\dfrac{1}{4}$.

3°) $u_n=\dfrac{5n}{4^{n-1}}$

Solutions détaillées

4 $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=-\dfrac{2\times 3^n}{7^{n-1}}$

Déterminons la nature de la suite *u* et déterminons son sens de variation.

1ère méthode : On transforme l'expression de u_n.

$$u_n=-\frac{2\times 3^n}{7^n\times 7^{-1}}=-\frac{2}{7^{-1}}\times\frac{3^n}{7^n}=-\frac{2}{\frac{1}{7}}\times\left(\frac{3}{7}\right)^n=-14\times\left(\frac{3}{7}\right)^n$$ (on reconnaît une expression de la forme $u_0\times q^n$)

u est une suite géométrique de premier terme $u_0=-14$ et de raison $q=\dfrac{3}{7}$.

On a $u_0<0$ et $0<q<1$ donc la suite u est strictement croissante à partir de l'indice 0 (on applique la règle sur le sens de variation d'une suite géométrique).

2e méthode : On calcule le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=-\frac{2\times 3^{n+1}}{7^n}\times\left(-\frac{7^{n-1}}{2\times 3^n}\right)$$

$$=\frac{2\times 3^{n+1}\times 7^{n-1}}{7^n\times 2\times 3^n}$$

$$=\frac{3}{7}$$ (on applique les règles sur les puissances)

Ce quotient est un nombre fixe (indépendant de n).
u est une suite géométrique de premier terme $u_0=-14$ et de raison $q=\dfrac{3}{7}$.

N.B. : Cette 2e méthode est plus longue que la 1ère. Il vaut mieux l'éviter car les calculs ne sont pas très agréables.

5 $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\dfrac{8}{3^{n+1}}$

Déterminons la nature de la suite *u* et son sens de variation.

1ère méthode : On transforme l'expression de u_n.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{8}{3}\times\frac{1}{3^n}=\frac{8}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

u est une suite géométrique de premier terme $u_0=\dfrac{8}{3}$ et de raison $q=\dfrac{1}{3}$.

On a $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ donc la suite u est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

2^e méthode : On calcule le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{8\times 3^{n+1}}{3^{n+2}\times 8}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

u est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

$\boxed{6}$ u : suite géométrique telle que $u_4 = 24$ et $u_7 = 192$.

Calculons q et u_0.

On a : $u_7 = u_4 \times q^3$ soit $192 = 24q^3$ d'où $8 = q^3$ donc $q = \sqrt[3]{8} = 2$.

D'autre part, on a : $u_4 = u_0 \times q^4$ soit $24 = u_0 \times 2^4$ d'où $u_0 = \dfrac{24}{16}$ donc $u_0 = \dfrac{3}{2}$.

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}u_0 &= u_4 \times 2^{0-4}\\ &= 24\times 2^{-4}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ u : suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = -\dfrac{1}{2}$

Calculons $S = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

Mauvaise méthode (longue et fastidieuse) :

On calcule tous les termes jusqu'à u_{10}.

$u_0 = 3$

$u_1 = -\dfrac{3}{2}$

$u_2 = \dfrac{3}{4}$

$u_3 = -\dfrac{3}{8}$

$u_4 = \dfrac{3}{16}$

$u_5 = -\dfrac{3}{21}$

$u_6 = \dfrac{3}{64}$

$u_7 = -\dfrac{3}{128}$

$u_8 = \dfrac{3}{256}$

$u_5 = -\dfrac{3}{512}$

$u_{10} = \dfrac{3}{1024}$

$$\begin{aligned}S &= 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \frac{3}{32} + \frac{3}{64} - \frac{3}{128} + \frac{3}{256} - \frac{3}{512} + \frac{3}{1024}\\ &= \frac{3072}{1024} - \frac{1536}{1024} + \frac{768}{1024} - \frac{384}{1024} + \frac{192}{1024} - \frac{96}{1024} + \frac{48}{1024} - \frac{24}{1024} + \frac{12}{1024} - \frac{6}{1024} + \frac{3}{1024}\\ &= \frac{2049}{1024}\end{aligned}$$

Bonne méthode : utilisation de la formule sommatoire pour les suites géométriques

$S = u_0 \times \dfrac{1-q^{11}}{1-q}$ (car $q = -\dfrac{1}{2}$ donc $q \neq 1$)

$$\begin{aligned} &= 3\times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\\ &= 3\times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{11}}{\frac{3}{2}}\\ &= 3\times \frac{2}{3}\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{11}\right]\\ &= 2\left(1+\frac{1}{2^{11}}\right)\\ &= 2+\frac{1}{2^{10}}\\ &= 2+\frac{1}{1024}\\ &= \frac{2048+1}{1024}\\ &= \frac{2049}{1024} \text{ (fraction irréductible)}\end{aligned}$$

On a obtenu la valeur exacte de la somme sous forme de fraction irréductible.

$\boxed{8}$ Calculons la somme $S=1+2+2^2+...+2^9$.

Remarque : À la base S est une somme définie en extension (présence des trois petits points).

L'objectif de l'exercice est de calculer simplement cette somme sans calculer chaque terme bien évidemment.

1ère méthode :

On applique la formule sommatoire du cours : $1+q+q^2+...+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ valable pour $q\neq 1$.

On applique cette formule avec $q=2$ et $n=9$.

$$S_n=\frac{1-2^{10}}{1-2}=\frac{1-2^{10}}{-1}=2^{10}-1=1024-1=1023$$

2e méthode :

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison $q=2$.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=u_0\times q^n$ soit $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2^n$.

On effectue une réécriture de la somme (à l'aide de la suite) : $S_n=u_0+u_1+...+u_9$.

On applique la formule sommatoire pour les suites géométriques :

$$S_n=u_0\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}=1\times\frac{1-2^{10}}{1-2}=\frac{1-2^{10}}{-1}=2^{10}-1=1023$$

(Pour calculer le nombre de termes de la somme, on effectue le calcul : $9-0+1=10$ selon la formule (dernier indice) – (premier indice) + 1.)

$\boxed{9}$ $u\begin{cases}u_0=0\\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=3u_n+4\end{cases}$

D'après la relation de récurrence, il ne s'agit à priori ni d'une suite arithmétique, ni d'une suite géométrique.
On peut dire qu'elle est un peu des deux, même si cela ne veut pas dire grand-chose.
On peut aussi dire, en « langage élève », que c'est une « suite mixte », ce qui ne veut rien dire non plus. Le terme exacte de dénomination est donnée à la fin de l'exercice.

Le but de l'exercice est d'obtenir une expression explicite de u_n en fonction de n (question 2°) c)).

1°) Calculons u_1, u_2, u_3.

$u_1=3u_0+4$	$u_2=3u_1+4$	$u_3=3u_2+4$
$=3\times 0+4$	$=3\times 4+4$	$=3\times 16+4$
$=4$	$=16$	$=52$

Le calcul des premiers termes permet de voir que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2°) $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_n+2$

a) n : entier naturel fixé

• Exprimons v_{n+1} en fonction de u_{n+1}.

$v_{n+1}=u_{n+1}+2$ (le changement d'indice pour v se répercute automatiquement pour u)

• Exprimons v_{n+1} en fonction de u_n.

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=3u_n+4+2\\&=3u_n+6\end{aligned}$$

• Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n.

[$v_{n+1}=3u_n+6$ ligne que l'on n'est pas obligé d'écrire]

$v_{n+1}=3(u_n+2)$ [on reprend la dernière égalité écrite ; on met 3 en facteur dans le membre de droite de la ligne précédente]

$=3v_n$ [par définition, on a posé $v_n=u_n+2$; on remplace donc u_n+2 par v_n dans l'égalité précédente]

b) Déterminons la nature de la suite v.

D'après la question précédente, $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}=3v_n$.
On en déduit que la suite v est une suite géométrique de raison $q=3$.

c)

• Calculons v_0 (premier terme).

$$v_0 = u_0 + 2$$
$$= 2$$

• Exprimons v_n en fonction de n.

D'après la formule donnant l'expression explicite du terme général d'une suite géométrique,
$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \times q^n$
$= 2 \times 3^n$

• Exprimons u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n - 2$
Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n - 2$

On ne peut pas aller plus loin dans l'expression de u_n en fonction de n.

Il faut utiliser la relation quand on connaît v_n en fonction de u_n.
Le but est de « trouver » u_n.

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
On a obtenu l'expression algébrique du terme général de la suite (on est donc passé du mode récurrent au mode explicite).

On appelle suite arithmético-géométrique une suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont deux réels fixés.

Ces suites ne sont pas étudiées dans le cas général au lycée. L'énoncé guide à chaque fois l'étude de ce type de suite en donnant la suite auxiliaire adéquate.

10

$$u \begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

1°) Calculons u_1, u_2, u_3.

$u_1 = 2u_0 - 1$ $= 9$	$u_2 = 2u_1 - 1$ $= 17$	$u_3 = 2u_2 - 1$ $= 33$

2°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 1$

a) n : entier naturel fixé

Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= 2u_n - 1 - 1 \\ &= 2u_n - 2 \\ &= 2(u_n - 1) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

b) Déterminons la nature de la suite v.

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = 2v_n$
On en déduit que la suite v est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 5 - 1 = 4$.

c)

• Exprimons v_n en fonction de n.

D'après la formule donnant l'expression explicite du terme général d'une suite géométrique,
$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \times q^n$
$= 4 \times 2^n$
$= 2^2 \times 2^n$
$= 2^{n+2}$

• Exprimons u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n + 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^{n+2} + 1$

3°)

On a établi que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison 2, donc on a :

$$\begin{aligned} S'_n &= v_0 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \\ &= 4 \times (2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

On ne peut pas aller plus loin.

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n + 1$, S_n peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} S_n &= (v_0+1)+(v_1+1)+\ldots+(v_n+1) \\ &= v_0+v_1+\ldots+v_n+(n+1) \\ &= S'_n+(n+1) \\ &= 4\times\left(2^{n+1}-1\right)+(n+1) \qquad \text{(on utilise le résultat obtenu précédemment pour } S'_n\text{)} \\ &= 4\times 2^{n+1}+n-3 \end{aligned}$$

11

$$u \begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1°) Calculons u_1, u_2, u_3.

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{5}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{23}{9}$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 = \frac{77}{27}$$

2°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 3$

a) n : entier naturel fixé

Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 3) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

b) Déterminons la nature de la suite v.

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

On en déduit que la suite v est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -4$.

c)

• Exprimons v_n en fonction de n.

D'après la formule donnant l'expression explicite du terme général d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n &= v_0 \times q^n \\ &= -4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

• Exprimons u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n + 3$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 - 4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

12 u : suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{4n}u_n$.

La suite (u_n) est définie en mode récurrent.

1°) Calculons u_2 et u_3.

Calcul du 2^e terme : $u_2 = \dfrac{1+1}{4\times 1}u_1 = \dfrac{2}{4}\times 5 = \dfrac{5}{2}$ (on applique la relation de récurrence pour $n = 1$)

Calcul du 3^e terme : $u_3 = \dfrac{2+1}{4\times 2}u_2 = \dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{16}$ (on applique la relation de récurrence pour $n = 2$)

On vérifie immédiatement grâce aux valeurs obtenues que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
Aussi, n'est-il pas possible de trouver une expression « explicite » de u_n en fonction de n.
Cela va être le but de la suite de passer du mode récurrent au mode explicite.

2°)

La relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{4n}u_n$ $(n \geqslant 1)$ s'écrit aussi $u_n = \dfrac{n}{4(n-1)}u_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$.

Sur TI 83, on rentre :

$n\mathrm{Min} = 1$

$\mathrm{u}(n) = \left(n/\left(4*(n-1)\right)\right)*\mathrm{u}(n-1)$

$\mathrm{u}(n\mathrm{Min}) = \{5\}$

Mises en garde :

- Attention à la syntaxe (« au niveau des parenthèses »).

- Attention

$n\mathrm{Min}=1$: en effet, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ et son premier terme est u_1.

$u(n\mathrm{Min})=\{5\}$: en effet, $u_1=5$.

2°)

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad v_n=\dfrac{u_n}{n}$

L'énoncé introduit une deuxième suite (v_n) qui est définie « en fonction » de (u_n).
Cette suite va nous permettre de résoudre le problème « passer du mode récurrent au mode explicite ».

Déterminons la nature de la suite v.

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{\frac{n+1}{4n}u_n}{n+1}=\frac{n+1}{4n}u_n\times\frac{1}{n+1}=\frac{u_n}{4n}=\frac{1}{4}v_n$$

On en déduit que v est une suite géométrique de premier terme $v_1=5$ et de raison $q=\dfrac{1}{4}$.

4°) Exprimons u_n en fonction de n.

On commence par exprimer v_n en fonction de n.

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad v_n=v_1\times q^{n-1}$

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad v_n=5\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad v_n=\dfrac{5}{4^{n-1}}$

Or $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad v_n=\dfrac{u_n}{n}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n=nv_n$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n=\dfrac{5n}{4^{n-1}}$

On a résolu le problème « passer du mode récurrent au mode explicite ».
On a obtenu l'expression de u_n en fonction de n.

$\boxed{13}$ Calculons la somme $S=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\ldots+\dfrac{1}{1\,048\,576}$.

On peut écrire $S=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\ldots+\dfrac{1}{2^{20}}$.

Le nombre de termes de la somme S est égal à $20-2+1=19$.

$$S=\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S=\frac{511}{1024}$$

$\boxed{14}$ Simplifier la somme $1+3+3^2+\ldots+3^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}3^k \quad (n\in\mathbb{N})$.

1ère méthode :

$(1^{\text{er}}\text{ terme})\times\dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}3^k=1\times\frac{1-3^{n+1}}{1-3}$ (il n'est pas nécessaire de dire que l'on a une suite géométrique)

$$=\frac{1-3^{n+1}}{-2}$$

$$=-\frac{1-3^{n+1}}{2}$$

$$=\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

On ne peut pas aller plus loin.

2^e^ méthode :

On peut appliquer directement la formule du cours $1+q+q^2+...+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ valable pour $q\neq 1$.

$\boxed{15}$ Simplifier la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{k=n}\left(8\times 5^k\right)=8\times\frac{1-5^{n+1}}{1-5}$$

$$=8\times\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

$$=2\left(5^{n+1}-1\right)$$

$\boxed{16}$ Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(-3)^k$.

$$\sum_{k=0}^{k=n}(-3)^k=\frac{1-(-3)^{n+1}}{1+3}$$

$$=\frac{1-(-3)^{n+1}}{1+3}=\frac{1-(-3)^{n+1}}{4}$$

ATTENTION aux chausse-trappe ! On ne peut transformer le $(-3)^{n+1}$ en 3^{n+1}.

$\boxed{17}$ Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\left(3^k-2^k\right)$.

On « sépare » la somme en 2.

$$\sum_{k=0}^{k=n}\left(3^k-2^k\right)=\left(\sum_{k=0}^{k=n}3^k\right)-\left(\sum_{k=0}^{k=n}2^k\right)$$

$$=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}-\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$

$$=\frac{3^{n+1}-1}{2}-2^{n+1}+1$$

$$=\frac{3^{n+1}}{2}-2^{n+1}+\frac{1}{2}$$

$\boxed{18}$ $u_n=3^{2n+1}-9^n$

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=3^{2n}\times 3^1-9^n$

$$=9^n\times 3-9^n$$

$$=9^n\times(3-1)$$

$$=2\times 9^n$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=2$ et de raison $q=9$.