1ère S

Exercices sur les suites arithmétiques (2)

1 Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_3 = -5$ et de raison $r = \frac{3}{2}$.
Exprimer u_n en fonction de n.

2 Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = \frac{2}{7}$.
Déterminer l'entier naturel n tel que $u_n = 109$.

3 Soit u une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_4 = 26$ et $u_{10} = 41$.
1°) Calculer la raison.
2°) Calculer u_{15}.

4 Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{15}$ en utilisant trois méthodes :
1ère méthode : calcul direct
2e méthode : utilisation de la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique
3e méthode : utilisation de la commande de la calculatrice permettant de calculer une somme

5 Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 3$.
Calculer la somme des dix premiers termes.

6 Le but de l'exercice est de calculer la somme $S = 1+3+5+\ldots+99$ par deux méthodes indépendantes.

1ère méthode : Recopier et compléter l'égalité $S = \sum_{k=0}^{k=...}(..........)$ puis utiliser la calculatrice pour obtenir le résultat.

2e méthode : Utiliser une suite que l'on définira clairement en rédigeant convenablement.

7 Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $r = \frac{1}{5}$.
1°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.
Exprimer S_n en fonction de n sous la forme la plus simple possible.
Tester la formule obtenue pour $n = 1$ puis pour $n = 2$.
2°) Déterminer l'entier naturel n tel que la somme des n premiers termes de la suite soit égale à 189.

8 Le but de l'exercice est de déterminer trois réels a, b, c qui sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique tels que $a+b+c=9$ (1) et $a^2+b^2+c^2=59$ (2) (les deux conditions doivent être vérifiées simultanément).
On propose deux méthodes de résolution indépendantes (faire les deux méthodes).

• 1ère méthode :
Établir un système de 3 équations à 3 inconnues vérifiées par a, b, c et résoudre ce système en utilisant un logiciel de calcul formel (par exemple, le logiciel en ligne « dcode »).

• 2e méthode :
Déterminer a, b, c par le calcul en introduisant la raison r la suite.

9 Soit u une suite arithmétique telle que $u_0 = -3$ et $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 150$.
Déterminer la raison r.

10 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$ (on admettra que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \neq 0$).
1°) Déterminer la nature de la suite v.
On pourra commencer par conjecturer le résultat en utilisant la calculatrice à l'aide des indications ci-dessous.

On sélectionne SUITE(n+1).

nMin = 0
u(n+1) = u(n)/(u(n)+1)
u(0) = 3
v(n) = 1/u
v(0) = 1/3

nMin = 0	nMin = 0
u(n) = u(n−1)/(u(n−1)+1)	u(n) = u(n−1)/(u(n−1)+1)
u(nMin) = {3}	u(0) = 3
v(n) = 1/u	u(1) =
v(nMin) = {1/3}	v(n) = 1/u
	v(0) = 1/3 (affichage : 0.3333333333333)
	v(1) =

On observera la syntaxe très particulière de l'avant-dernière ligne : v(n) = 1/u . On écrit juste ça.

Pour afficher le nuage de points, faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{zoom}}$ (format) et sélectionner Heure ou Time.
Le nuage de points de la suite u s'affiche en bleu. Le nuage de points de la suite v s'affiche en rouge.

On peut également obtenir le tableau de valeurs.

2°) Exprimer u_n en fonction de n.

Rappel : Pour définir une suite par récurrence, on est obligé de donner le premier terme et la relation de récurrence.

Réponses

1 $u_n = \dfrac{3n-19}{2}$ (cette formule n'est valable que pour les entiers naturels n supérieurs ou égaux à 3 car le premier terme de la suite est u_3).

2 $n = 364$

3 1°) $r = \dfrac{5}{2}$; 2°) $u_{15} = \dfrac{107}{2}$

4 $S = -160$

5 $S = 85$

6 $S = 2500$

7 $n = 35$

8 **1er cas :** $a = -1$; $b = 3$; $c = 7$; **2e cas :** $a = 7$; $b = 3$; $c = -1$

9 $r = \dfrac{56}{5}$

10 Ce type d'exercice demande de savoir mettre en connexion toutes les formules du cours.

1°) v est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{3}$ et $r = 1$; 2°) $u_n = \dfrac{3}{1+3n}$

Solutions détaillées

1 u : suite arithmétique de premier terme $u_3 = -5$ et de raison $r = \dfrac{3}{2}$

Exprimons u_n en fonction de n.

$$u_n = u_3 + (n-3)r \quad (n \geqslant 3)$$

$$\boxed{u_n = \frac{3}{2}n - \frac{19}{2}}$$

Il est intéressant de tester la formule pour $n = 3$.

2 u : suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = \dfrac{2}{7}$

Déterminons l'entier naturel n tel que $u_n = 109$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 5 + \frac{2}{7}n = 109$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{7}n = 104$$

$$\Leftrightarrow n = 364$$

3 u : suite arithmétique telle que $u_4 = 26$ et $u_{10} = 41$

1°) Calculons la raison r de la suite u.

D'après la relation entre deux termes quelconques d'indices n et p, on a :
$u_{10} = u_4 + 6r$
donc $41 = 26 + 6r$
d'où $r = \dfrac{5}{2}$.

2°) Calculons u_{15}.

$$\begin{aligned} u_{15} &= u_{10} + 5r \\ &= 41 + 5 \times \frac{5}{2} \\ &= 41 + \frac{25}{2} \\ &= \frac{107}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ u : suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$

Calculons $S = u_0 + u_1 + ... + u_{15}$.

On peut aussi écrire $S = \sum_{k=0}^{k=15} u_k$.

1ère méthode :

Mauvaise méthode (longue et fastidieuse) :

On calcule tous les termes jusqu'à u_{15}.

$u_0 = 5$
$u_1 = 3$
$u_2 = 1$
$u_3 = -1$
$u_4 = -3$
$u_5 = -5$
$u_6 = -7$
$u_7 = -9$
$u_8 = -11$
$u_9 = -13$
$u_{10} = -15$
$u_{11} = -17$
$u_{12} = -19$
$u_{13} = -21$
$u_{14} = -23$
$u_{15} = -25$

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + ... + u_{15} \\ &= 5+3+1-1-3-5-7-9-11-13-15-17-19-21-23-25 \\ &= -160 \end{aligned}$$

2e méthode :

Bonne méthode : utilisation de la formule sommatoire pour les suites arithmétiques

La somme S comporte 16 termes.

D'après la formule sommatoire pour les termes consécutifs d'une suite arithmétique, on a :

$$S = 16 \times \frac{u_0 + u_{15}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } u_{15} &= u_0 + 15r \\ &= 5 + 15 \times (-2) \\ &= 5 - 30 \\ &= -25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 16 \times \frac{5-25}{2} \\ &= 16 \times \frac{5-25}{2} \\ &= 16 \times \left(-\frac{20}{2}\right) \\ &= -160 \end{aligned}$$

3e méthode :

On peut aussi vérifier le résultat avec la calculatrice (en utilisant les fonctionnalités pour les calculs de sommes de termes consécutifs d'une suite).

On reprend l'écriture $S = \sum_{k=0}^{k=15} u_k$.

D'après la formule donnant le terme général d'une suite arithmétique, $\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k = 5 - 2k$.

On peut donc écrire $S = \sum_{k=0}^{k=15} (5 - 2k)$.

Sur la calculatrice, on tape $\sum_{\mathrm{K}=0}^{15} (5 - 2\mathrm{K})$ (on peut remplacer K par n'importe quelle lettre).

• Calculatrice TI :

On doit afficher sur l'écran : somme (suite((1.5∗K – 10) ∗ binompdf(20,0.25,K), K, 7, 20)) .
On obtient :
- *somme* (ou *sum* en anglais) par Listes (2nde stats), choix MATH, puis *somme* ;
- *suite* (ou *seq* avec une parenthèse lorsque la calculatrice est en anglais) par Listes, OPS puis suite(.

Il est possible d'obtenir *somme* et *suite* en allant dans le catalogue (pour cela, taper 2nde 0) et on cherche dans la liste.

• Calculatrice CASIO GRAPH 35 + :

On fait : Menu Math (F4) puis F6 : il s'affiche le symbole Σ.

$\boxed{5}$ u : suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 3$

Calculons la somme des dix premiers termes.

On doit calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_9$.

On peut aussi écrire $S = \sum_{k=0}^{k=9} u_k$.

On applique la formule sommatoire pour la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}$$
$$= 10 \times \frac{u_0 + u_9}{2}$$

Or $u_9 = u_0 + 9r$
$= -5 + 9 \times 3$
$= 27 - 5$
$= 22$

Donc $S = 10 \times \frac{-5 + 22}{2}$
$= 10 \times \frac{17}{2}$
$= 5 \times 17$

$= 85$

$\boxed{6}$ Calculons la somme $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 99$.

La somme est écrite sous forme développée.
Il s'agit de la somme de tous les entiers naturels impairs de 1 à 99 (somme écrite en extension avec des petits points).

1ère méthode :

$$S = \sum_{k=0}^{k=49} (2k+1)$$

2e méthode :

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = u_0 + nr$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = 1 + 2n$.

On a $99 = u_{49}$ (vérification immédiate).

On effectue une réécriture de la somme (à l'aide de la suite) : $S = u_0 + u_1 + ... + u_{49}$.

On applique la formule sommatoire pour la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}$$
$$= 50 \times \frac{u_0 + u_{49}}{2}$$
$$= 50 \times \frac{1 + 99}{2}$$
$$= 2500$$

Remarque : On peut aussi écrire $S = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 99 \\ k \text{ impair}}} k$ ou encore $S = \sum_{k=0}^{k=49} (2k+1)$.

$\boxed{7}$ u : suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $r = \frac{1}{5}$

1°)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ (somme des n premiers termes).

$S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$ (formule sommatoire donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique)

$u_n = u_1 + (n-1)r$

$u_n = 2 + (n-1)\frac{1}{5}$

On peut donc écrire $u_n = \frac{n+9}{5}$.

Donc :

$$S_n = n \times \frac{4 + (n-1)\frac{1}{5}}{2}$$

$$S_n = n \times \frac{\frac{n+19}{5}}{2}$$

$$S_n = n \times \frac{n+19}{10}$$

2°) **Déterminons l'entier naturel n tel que la somme des n premiers termes de cette suite soit égale à 189.**

Cherchons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = 189$ (1).

(1) $\Leftrightarrow n \times \frac{n+19}{10} = 189$

$\Leftrightarrow n^2 + 19n - 1890 = 0$

Considérons le polynôme $x^2 + 19x - 1890$ ($x \in \mathbb{R}$).

Son discriminant est égal à $\Delta = 361 + 7560$
$= 7921$
$= 89^2$

$\Delta > 0$

On en déduit que le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$x_1 = \dfrac{-19+89}{2} = 35$ et $x_2 = \dfrac{-19-89}{2} = -54$

Or la suite u est définie sur $\mathbb{N}^*$ donc (1) $\Leftrightarrow$ $n = 35$.

Autre méthode :
On procède par essais successifs en calculant $u_1 + u_2$, $u_1 + u_2 + u_3$, $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ etc. jusqu'à trouver une somme égale à 189.

8

a, *b*, *c* sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique tels que $a + b + c = 9 \quad (1)$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 59 \quad (2)$.

Déterminons *a*, *b*, *c*.

1ère méthode :

$$\begin{cases} a+b+c=9 & (1) \\ a^2+b^2+c^2=59 & (2) \\ b=\dfrac{a+c}{2} & (3) \end{cases}$$

Il s'agit d'un système non linéaire (la première équation et la troisième équation sont linéaires mais la seconde ne l'est pas à cause des carrés).
La calculatrice ne sait pas résoudre les systèmes non linéaires.

On obtient les triplets $(-1\,;3\,;7)$ et $(7\,;3\,;-1)$.

2e méthode :

On a trois inconnues. On va se ramener à deux inconnues puis à une seule.

Méthode : On note *r* la raison de la suite arithmétique (ou de la progression arithmétique).

Il est déconseillé d'introduire une suite (u_n).

On va prendre pour inconnue le nombre *b* pour avoir les calculs les plus simples possibles.

On a donc $a = b - r$ et $c = b + r$.

L'égalité (1) donne alors : $b \cancel{-r} + b + b \cancel{+r} = 9$ donc $3b = 9$.
On obtient finalement $b = 3$.

Par suite, $a = 3 - r$ et $c = 3 + r$.

L'égalité (2) donne alors : $(3-r)^2 + 3^2 + (3+r)^2 = 59$
soit $9 \cancel{-6r} + r^2 + 9 + 9 \cancel{+6r} + r^2 = 59$
d'où $27 + 2r^2 = 59$
$r^2 = 16$
$r = 4$ ou $r = -4$
On distingue donc 2 cas :

1er cas : $r = 4$

$a = -1$; $b = 3$; $c = 7$

2e cas : $r = -4$

$a = 7$; $b = 3$; $c = -1$

3e méthode :

Comme *a*, *b*, *c* sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, on peut écrire $a + c = 2b \quad (3)$.

L'égalité (1) donne alors $3b = 9$ donc $b = 3$.

(3) permet d'écrire $a + c = 6$ ce qui donne $c = 6 - a$.

On reprend l'égalité (2) en remplaçant *b* par 3 et *c* par $6 - a$.

On obtient $a^2 + 9 + (6-a)^2 = 59 \quad (2')$.

On trouve les valeurs de *a* (équation du second degré). On en déduite celles de *c* et on conclut.

9

u : suite arithmétique telle que $u_0 = -3$ et $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 150$.

Déterminons la raison *r*.

On pose : $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.

On applique la formule sommatoire des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

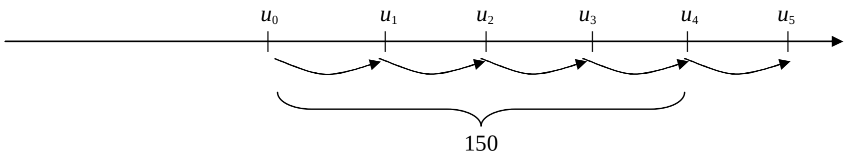
On a donc $S = 6 \times \dfrac{u_0 + u_5}{2}$ soit $S = 3(u_0 + u_5)$.

Or $u_5 = u_0 + 5r$ d'où $u_5 = -3 + 5r$.
Par conséquent, $S = 3(-3 - 3 + 5r) = 3(-6 + 5r)$.

On en déduit que $3(-6+5r)=150$ d'où $-6+5r=50$ donc $r=\dfrac{56}{5}$.

Autre méthode :

Figure (avec $r>0$)



(1) $\Leftrightarrow$ $u_0+u_0+r+u_0+2r+u_0+3r+u_0+4r+u_0+5r=150$

$\Leftrightarrow$ $6u_0+15r=150$

$\Leftrightarrow$ $2u_0+3r=50$

$\Leftrightarrow$ $-6+3r=50$

$\Leftrightarrow$ $5r=56$

$\Leftrightarrow$ $r=\dfrac{56}{5}$

Autre méthode (non rédigée) :

$u_0=-3$ et $u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=150$

$150=6\times\dfrac{u_0+u_5}{2}$

$150=3(u_0+u_5)$

$50=-3+u_5$

$u_5=53$

$u_5=u_0+5r$

$53=-3+5r$

$56=5r$

$r=\dfrac{56}{5}$

Version non rédigée le 14-2-2017 :

On cherche d'abord u_5.

$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=6\times\dfrac{u_0+u_5}{2}$

$150=6\times\dfrac{-3+u_5}{2}$

$150=3\times(-3+u_5)$

$-3+u_5=\dfrac{150}{3}$

$u_5=50+3$

$u_5=53$

$r=\dfrac{u_5-u_0}{5-0}$

$r=\dfrac{53+3}{5}$

$r=\dfrac{56}{5}$

$\boxed{10}$

u : suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=3$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=\dfrac{1}{u_n}$ (on définit une **suite auxiliaire**).

On peut aisément démontrer à l'aide d'un raisonnement de proche en proche que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\neq 0$.

Tirer tous les traits de fraction à la règle.

Le but de l'exercice est de déterminer une formule explicite de u_n en fonction de n (avec une suite auxiliaire).

Le but de l'exercice est de déterminer une formule explicite pour « trouver » u_n en fonction de n (avec une suite auxiliaire).

Pour ce type de suite, on est obligé d'avoir une suite « à côté » pour pouvoir trouver l'expression explicite du terme général en fonction de n.

1°) Déterminons la nature de la suite v.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{u_n}{1+u_n}}$$

$$=\frac{1+u_n}{u_n}$$ (on applique la règle d'inversion d'une fraction : $\dfrac{1}{\frac{a}{b}}=\dfrac{b}{a}$)

$$=\frac{1}{u_n}+1$$

$$=v_n+1$$

On en déduit que la suite v est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0=\dfrac{1}{3}$.

2°) Exprimons u_n en fonction de n.

Faire le lien avec la question précédente.

On utilise la suite (v_n).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{3} + n$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n}$ d'où $u_n = \frac{1}{v_n}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{\frac{1}{3} + n}$

$$= \frac{1}{\frac{1+3n}{3}}$$

$$= \frac{3}{1+3n}$$

Il est intéressant de tester la formule obtenue pour des valeurs particulières de n.

On peut utiliser la calculatrice :

On définit la suite (u_n) : $\mathrm{u}(n) = \mathrm{u}(n-1)/(\mathrm{u}(n-1)+1)$

puis la suite (v_n) : $\mathrm{v}(n) = 1/\mathrm{u}(n-1)$