TS1

Interrogation écrite du jeudi 15 mars 2012 (45 minutes)

I. (14)	II. (2)	III. (2)	IV. (2)
………	………	………	………

Prénom et nom : ……………………………………………………… **Note : … / 20**

I. (14 points) Compléter sans rature et le plus lisiblement possible le tableau suivant où f désigne une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

Tirer les traits de fraction à la règle.

$f(x) =$	I	$F(x) =$
$(\ln x)^3 \times \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$	………………………………………………
$\dfrac{1-x}{(x^2-2x)^3}$	$]2\,;+\infty[$	………………………………………………
$\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2+\mathrm{e}^x}}$	$\mathbb{R}$	………………………………………………
$\mathrm{e}^{2x}\left(1+3\mathrm{e}^{2x}\right)^5$	$\mathbb{R}$	………………………………………………
$x+\dfrac{1}{3x}$	$]0\,;+\infty[$	………………………………………………
$\dfrac{x^2-1}{x^2}$	$]0\,;+\infty[$	………………………………………………
$\dfrac{x}{x^2-1}$	$]1\,;+\infty[$	………………………………………………

II. (2 points) Compléter la phase :

La primitive de la fonction $f : x \mapsto (2x+1)^4$ qui prend la valeur 2 en 0 est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$F(x) =$ ………………………………………..

III. (2 points) On considère la fonction $f : x \mapsto 2x(1-\ln x)$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

Démontrer que la fonction $F : x \mapsto x^2\left(\frac{3}{2}-\ln x\right)$ est une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ (détailler les calculs).

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

IV. (2 points) On considère l'équation différentielle $y' = 2(1-y)$ (E).

Compléter la phrase (recherche au brouillon) :

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =$ ……………………………………………

………...

Corrigé de l'interrogation écrite du 15-3-2012

I.

$f(x)=$	I	$F(x)=$
$(\ln x)^3\times\dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$	$\dfrac{(\ln x)^4}{4}$
$\dfrac{1-x}{\left(x^2-2x\right)^3}$	$]2\,;+\infty[$	$\dfrac{1}{4\left(x^2-2x\right)^2}$
$\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2+\mathrm{e}^x}}$	$\mathbb{R}$	$2\sqrt{2+\mathrm{e}^x}$
$\mathrm{e}^{2x}\left(1+3\mathrm{e}^{2x}\right)^5$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\left(1+3\mathrm{e}^{2x}\right)^6}{36}$
$x+\dfrac{1}{3x}$	$]0\,;+\infty[$	$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\ln x}{3}$
$\dfrac{x^2-1}{x^2}$	$]0\,;+\infty[$	$x+\dfrac{1}{x}$ (cf. explication ci-dessous)
$\dfrac{x}{x^2-1}$	$]1\,;+\infty[$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)$

Explication pour la primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-1}{x^2}$.

On effectue une réécriture de $f(x)$.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2}=1-\frac{1}{x^2}$$

II.

La primitive de la fonction $f : x \mapsto (2x+1)^4$ qui prend la valeur 2 en 0 est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$F(x) = \dfrac{(2x+1)^5}{10} + \dfrac{19}{10}$.

Remarque :

On pouvait aussi développer $f(x)$ avant de calculer la primitive mais les calculs étaient un peu pénibles.

Faux :

$F(x) = \dfrac{4}{5}x^5 + 4x^4 + \dfrac{20}{3}x^3 + 4x^2 + 2$

III. $f : x \mapsto 2x(1-\ln x)$ définie sur $]0\,;+\infty[$

Démontrons que la fonction $F : x \mapsto x^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right)$ est une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

$$\begin{aligned}\forall x \in]0\,;+\infty[\quad F'(x) &= 2x\left(\frac{3}{2} - \ln x\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right)\\ &= 2x\left(\frac{3}{2} - \ln x\right) - x\\ &= 3x - 2x\ln x - x\\ &= 2x - 2x\ln x\\ &= 2x(1-\ln x)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $F : x \mapsto x^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right)$ est une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

IV. $y' = 2(1-y)$ $\quad(\mathrm{E})$

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-2x} + 1$ $\;(k \in \mathbb{R})$.