1ère S

Équations et inéquations trigonométriques avec des cosinus et des sinus (1)

I. Équations trigonométriques utilisant les valeurs remarquables

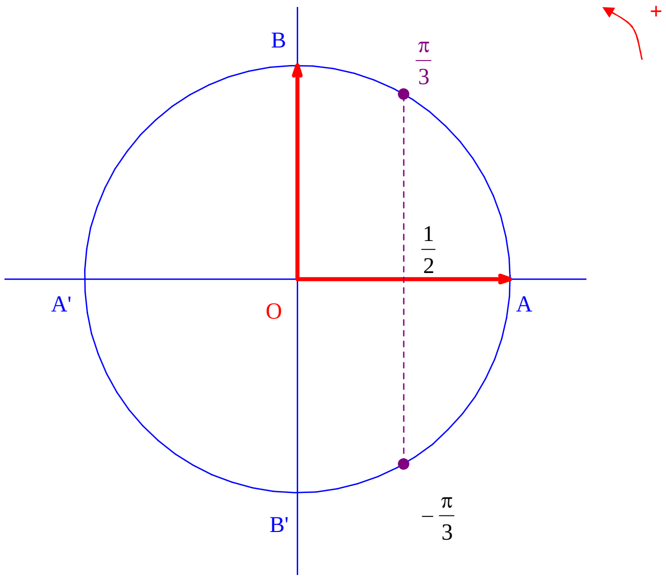
1°) Équations du type $\cos x = a$ (a réel donné compris entre – 1 et 1 au sens large)

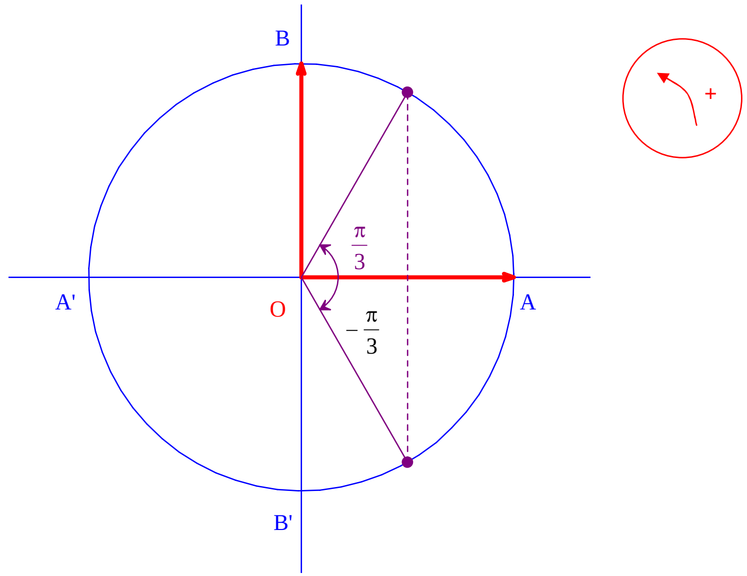
Exemple : **Résoudre dans [– π ; π] l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ (1).**

On cherche les réels x de l'intervalle [– π ; π] solutions de l'équation (1) (c'est-à-dire tels que $\cos x = \dfrac{1}{2}$).

On utilise le cercle trigonométrique.

On place la valeur $\dfrac{1}{2}$ sur l'axe des abscisses.





Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont les points qui ont pour abscisse $\dfrac{1}{2}$.

Il y a deux points de $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Ces points sont les images respectives de $\dfrac{\pi}{3}$ et de $-\dfrac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

Ces deux nombres appartiennent à l'intervalle [– π ; π].

On peut conclure de deux manières.

1ère manière : Les solutions de (1) dans l'intervalle [– π ; π] sont $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.

2e manière : Soit S l'ensemble des solutions de (1) dans l'intervalle [– π ; π].

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3}\right\}}$$

Remarque :

L'ensemble des solutions est noté avec des accolades.

Il n'y a pas d'ordre pour noter les solutions. On peut écrire $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right\}$ ou noter sans aucune gêne $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} ; -\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

2°) Équations du type $\sin x = a$ (a réel donné compris entre – 1 et 1 au sens large)

Même principe que pour les équations $\cos x = a$ (voir exercices).

On place la valeur a sur l'axe des ordonnées.

3°) Dans la pratique

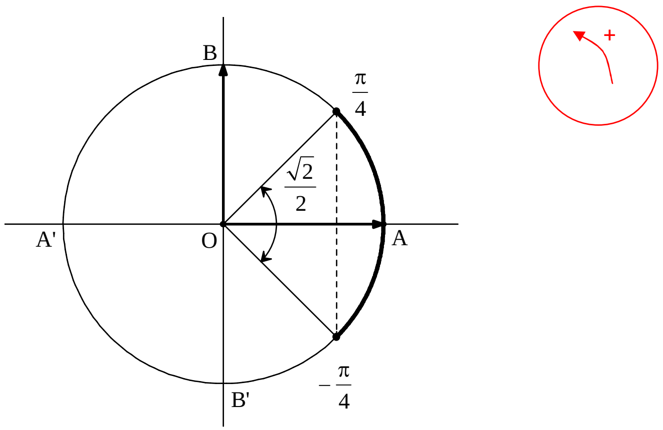
Pour placer les points images des solutions avec précision sur le cercle trigonométrique, on se réfère aux valeurs remarquables du cosinus et du sinus (voir tableau en appendice).

On utilise en particulier les constructions usuelles pour placer ces points.

II. Inéquations trigonométriques utilisant les valeurs remarquables

1°) Exemple 1

Résoudre dans l'intervalle [– π ; π] l'inéquation $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Les solutions (ou plutôt les points images de solutions) apparaissent sur le petit arc en rouge (extrémités comprises).

On a pris soin de bien matérialiser les extrémités de cet arc.

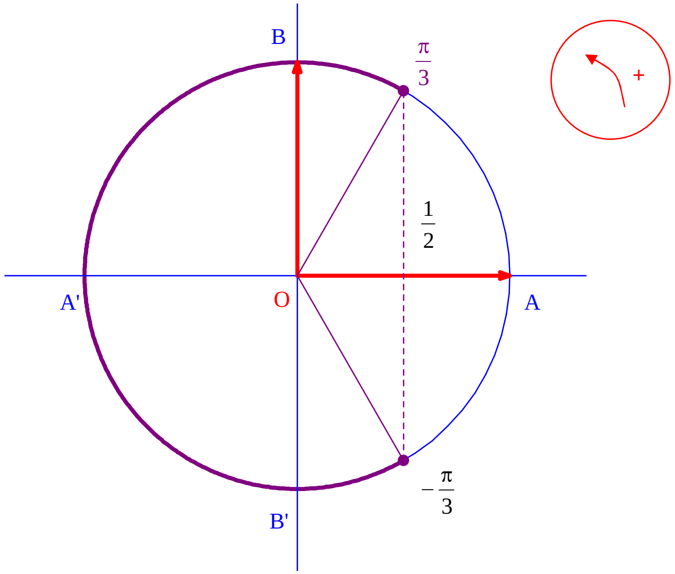
$$S = \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$$

2°) Exemple 2

Résoudre dans l'intervalle [– π ; π] l'inéquation $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

On hachure sur la zone de l'axe des abscisses de – 1 à $\frac{1}{2}$.

On hachure la zone des abscisses de – 1 à $\frac{1}{2}$.



Les solutions apparaissent sur un grand arc.

On part de A' et on fait un tour complet.

On doit voir ce grand arc comme la réunion de deux arcs.

L'ensemble des solutions S de l'inéquation dans l'intervalle [– π ; π] est donc la réunion de deux intervalles.

$$\boxed{S = \left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]}$$

3°) Remarques

• Les solutions d'une inéquation du type $\cos x \geqslant a$ ou $\sin x \geqslant a$ (où a est un réel donné compris entre – 1 et 1) apparaissent sur un **petit arc** ou sur un **grand arc**.

• On prend soin de bien matérialiser les **extrémités** de ces arcs (selon que le signe est $\geqslant$, $\leqslant$, > ou <).

• L'ensemble des solutions est soit un intervalle soit une réunion d'intervalles suivant l'intervalle dans lequel on résout l'inéquation.
On détermine le sens des crochets suivant les extrémités des arcs.

III. Pratique du cercle trigonométrique ; déplacements sur le cercle trigonométrique

1°) Résoudre dans [– π ; π]

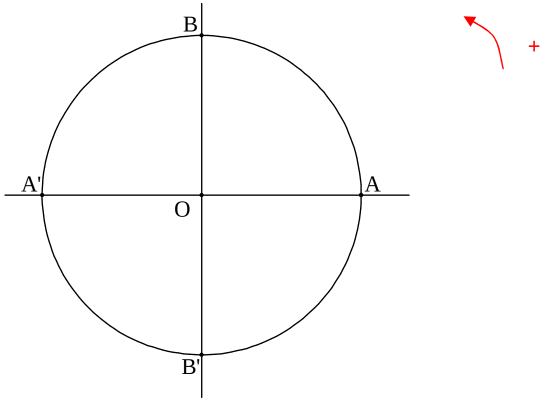
On doit aller de – π à π.

Pour cela, on fait le cercle trigonométrique.

A' : image de π et de – π

A : image de 0 et de 2π

On va de A' à A' en faisant un tour complet dans le sens positif.



2°) Résoudre dans [0 ; 2π]

On part de A et on va à A en faisant un tour complet.

3°) Résoudre dans [0 ; π]

On part de A et on va à A' en faisant un demi-tour dans le sens trigonométrique.

4°) Résoudre dans [– π ; 0]

On part de A' et on va à A en faisant un demi-tour dans le sens trigonométrique.

Appendice : valeurs remarquables du cosinus et sinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

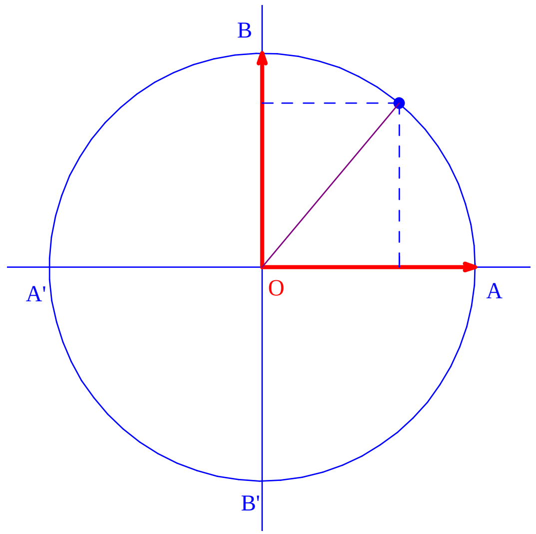
Cours oral

On revient à la trigonométrie.

Rappels pour commencer sur le cercle trigonométrique

On prend un réel x quelconque.

On note M le point image associé à x sur le cercle trigonométrique.



① Le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan.

cos x est l'abscisse de M.

sin x est l'ordonnée de M.

② M correspond à tous les réels de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

③ **Valeurs remarquables du cosinus et sinus**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Constructions :

Constructions de la famille des « $\frac{\pi}{3}$ »

Constructions de la famille des « $\frac{\pi}{4}$ »

Constructions de la famille des « $\frac{\pi}{6}$ »

Constructions de la famille des $\frac{\pi}{3}$: 2 constructions possibles → **règle et compas (papier blanc)** / → **médiatrices**

Équations et inéquations trigonométriques

On **repasse l'inconnue en rouge**.

On regarde le nombre dans le membre de droite.

Inéquation $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$

On pourrait aussi résoudre l'équation associée.

Dans ce chapitre, on se ramènera toujours à une forme simple d'équation ou d'inéquation (on doit toujours avoir un cosinus ou un sinus « pur »).