$1^{\text{ère}}$ S

Le plan muni d'un repère orthonormé

Plan du chapitre :

I. Expression analytique du produit scalaire

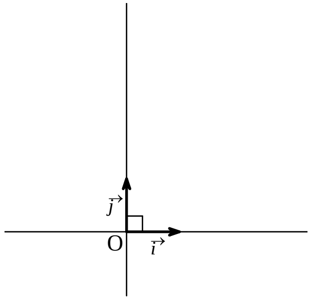
1°) Remarque préliminaire

Dans tout le chapitre, $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère **orthonormé** du plan P c'est-à-dire vérifiant les deux conditions :

C_1 : $\vec{i} \perp \vec{j}$

C_2 : $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$ (pour l'unité de longueur choisie)

On dit que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **normés** ou **unitaires**.



2°) Propriété

$\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ sont deux vecteurs quelconques.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'$

3°) Démonstration

Il est inutile de faire un graphique et de représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans la démonstration, on utilise le fait que le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ soit orthonormé.

On décompose les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ c'est-à-dire qu'on exprime chacun des deux vecteurs en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) \bullet \left(x'\vec{i} + y'\vec{j}\right)$$

$$= xx' \underbrace{\vec{i}^{\,2}}_{1\,(H_2)} + xy' \underbrace{\vec{i} \bullet \vec{j}}_{0\,(H_1)} + yx' \underbrace{\vec{i} \bullet \vec{j}}_{0\,(H_1)} + yy' \underbrace{\vec{j}^{\,2}}_{1\,(H_2)} \qquad \text{(on utilise la bilinéarité du produit scalaire)}$$

$$= xx' + yy'$$

II. Distance et orthogonalité

1°) Norme d'un vecteur

$\vec{u}\,(x\,;\,y)$ est un vecteur quelconque.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2°) Distance de deux points

$A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ sont deux points quelconques.

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$

Donc $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

3°) Condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité de deux vecteurs

$\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ sont deux vecteurs quelconques.

$\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$

4°) Exercice

$*$ $\vec{u}\,(2\,;6)$ et $\vec{v}\,(9\,;-3)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

$\vec{u}\bullet\vec{v} = 2\times 9 + 6\times(-3)$

$= 18 - 18$

$= 0$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$*$ $\vec{u}\,(1\,;4)$ et $\vec{v}\,(5\,;-1)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

$\vec{u}\bullet\vec{v} = 1\times 5 + 4\times(-1)$

$= 5 - 4$

$= 1$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

5°) Propriété

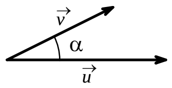
a et b sont deux réels quelconques.

$\vec{u}\,(a\,;b)$ et $\vec{v}\,(-b\,;a)$ sont orthogonaux et de même norme.

6°) Cosinus de l'angle géométrique formé par deux vecteurs non nuls

$\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.

On a : $\vec{u}\bullet\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$



Donc $\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\times\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

III. Équations cartésiennes de droites

1°) Propriété (très importante)

D est une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ $\left((a\,;b) \neq (0\,;0)\right)$.

$*$ Le vecteur $\vec{u}\,(a\,;b)$ est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à celle de *D*.

$*$ Le vecteur $\vec{v}\,(-b\,;a)$ est un vecteur non nul qui a la même direction que *D*.

2°) Définitions

$*$ On dit que le vecteur $\vec{u}\,(a\,;b)$ est un **vecteur normal à** *D*.

$*$ On dit que le vecteur $\vec{v}\,(-b\,;a)$ est un **vecteur directeur de** *D*.

De manière générale, on retiendra les deux définitions suivantes :

- un vecteur normal à une droite *D* donnée est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à celle de *D* ;

- un vecteur directeur d'une droite *D* donnée est un vecteur non nul dont la direction est la même que celle de *D*.

Ces deux définitions permettent de bien comprendre la différence entre vecteur directeur et vecteur normal.

3°) Exercice

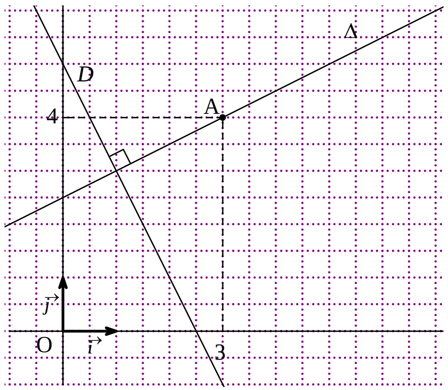
D est la droite d'équation $2x+y-5=0$.

$A(3\,;4)$

Δ est la droite passant par A et perpendiculaire à *D*.

$D:\ y=-2x+5$

x	0	3
y	5	-1



Déterminer une équation cartésienne de Δ.

On sait que le vecteur $\vec{u}\,(2\,;1)$ est un vecteur normal à *D*.

On sait que le vecteur $\vec{v}\,(-1\,;2)$ est un vecteur directeur de *D*.

1ère méthode :

$D\perp\Delta$ donc $\vec{v}$ est un vecteur normal à Δ.

M est un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$M\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{v}$ [ligne facultative]

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\bullet\vec{v}=0$ $\overrightarrow{AM}\,(x-3\,;y-4)$

$\Leftrightarrow (x-3)\times(-1)+(y-4)\times 2=0$

$\Leftrightarrow -x+2y-5=0$

$\Leftrightarrow x-2y+5=0$ (on peut multiplier toute l'équation par – 1)

Une équation cartésienne de Δ est $x-2y+5=0$.

2e méthode :

$D\perp\Delta$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ.

M est un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$M\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ y-4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow 1\times(x-3)-2\times(y-4)=0$

$\Leftrightarrow x-2y+5=0$

Une équation cartésienne de Δ est $x-2y+5=0$.

Point-méthode :

Dans certains exercices, comme celui-ci, il est possible d'utiliser indifféremment un vecteur normal ou un vecteur directeur.

4°) Vecteur directeur et coefficient directeur

$D:\ y=mx+p$

Une équation cartésienne de *D* s'écrit : $\underbrace{m}_{a}x\underbrace{-1}_{b}y+\underbrace{p}_{c}=0$.

Le vecteur $\vec{v}\left(\boxed{1}\,;m\right)$ est <u>un</u> vecteur directeur de *D*.

toujours

5°) Condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité de deux droites à l'aide de leurs coefficients directeurs

D : $y = mx + p$ donc le vecteur $\vec{v}\,(1\,;m)$ est un vecteur directeur de D.

D' : $y = m'x + p'$ donc le vecteur $\vec{v}\,'(1\,;m')$ est un vecteur directeur de D'.

Donc **<u>en repère orthonormé</u>**

$$\begin{aligned} D \perp D' &\Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{v}\,' \\ &\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v}\,' = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \times 1 + m \times m' = 0 \\ &\Leftrightarrow m \times m' = -1 \end{aligned}$$

Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées <u>dans un repère orthonormé</u> sont orthogonales si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à – 1.

IV. <u>Équations de cercles</u>

1°) Deux cas

Définition	Caractérisation	Traduction en coordonnées
cercle $\mathcal{C}$ $\left\vert \begin{array}{l} \text{de centre } \Omega(a\,;b) \\ \text{de rayon } R > 0 \end{array}\right.$	$M(x\,;y) \in \mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; \Omega M^2 = R^2$	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB]	$M(x\,;y) \in \mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$	$(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$

2°) Exemples de détermination d'équations de cercles

$*$ $\mathcal{C}$: cercle $\left\vert \begin{array}{l} \text{de centre } \Omega(-1\,;4) \\ \text{de rayon } R = 3 \end{array}\right.$

<u>Une</u> équation cartésienne de $\mathcal{C}$ s'écrit $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$.

Cette équation s'écrit aussi $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 9$

ou encore $\underbrace{\boxed{x^2 + y^2}}_{\text{termes carrés}} + \underbrace{\boxed{2x - 8y}}_{\text{termes rectangles}} + 8 = 0$ (équation sous forme développée).

$*$ $\mathcal{C}$: cercle de diamètre [AB] avec $A \left\vert \begin{array}{c} -2 \\ 3 \end{array}\right.$ et $B \left\vert \begin{array}{c} 4 \\ -5 \end{array}\right.$

<u>Une</u> équation de $\mathcal{C}$ s'écrit $(x+2)(x-4) + (y-3)(y+5) = 0$.

On développe et on réduit le premier membre.

<u>Une</u> équation cartésienne de $\mathcal{C}$ s'écrit $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$.

3°) Exemples de déterminations d'ensembles à partir d'équations cartésiennes

• Déterminer l'ensemble $E_1 = \left\{ M(x\,;y) \in P \,/\, x^2 + y^2 - 8x + 6y + 2 = 0 \right\}$.

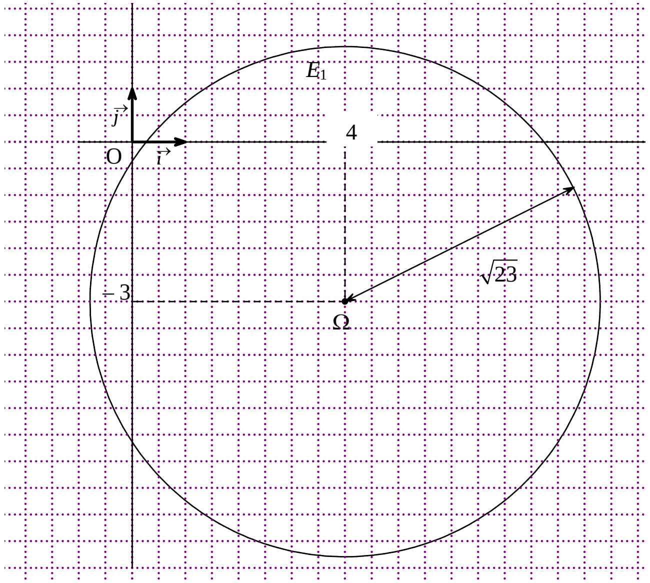
L'équation de E_1 s'écrit $\underbrace{x^2 - 8x}_{\substack{\text{polynôme} \\ \text{du second} \\ \text{degré en } x}} + \underbrace{y^2 + 6y}_{\substack{\text{polynôme} \\ \text{du second} \\ \text{degré en } y}} + 2 = 0$.

(Ces deux polynômes sont incomplets.)

$$(x-4)^2 - 16 + (y+3)^2 - 9 + 2 = 0$$
$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 23$$
$$(x-4)^2 + \left[y - (-3)\right]^2 = \left(\sqrt{23}\right)^2$$

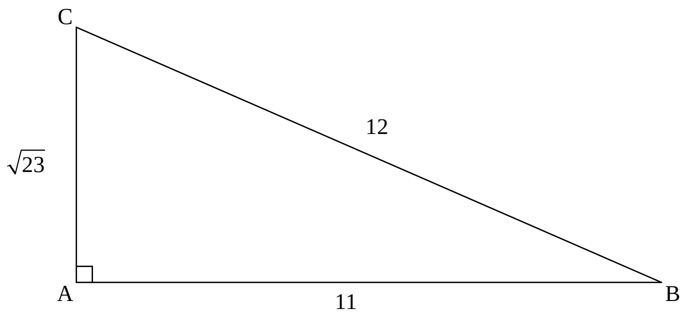
On reconnaît une équation de la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

E_1 est le cercle de centre $\Omega(4\,;-3)$ et de rayon $R = \sqrt{23}$.



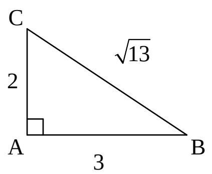
Construction d'un segment de longueur $\sqrt{23}$ à la règle et au compas :

On utilise le théorème de Pythagore en remarquant que $23=12^2-11^2$.



On peut noter que tout entier impair s'exprime comme différence de deux carrés.
En effet, $\forall n\in\mathbb{N}\quad 2n+1=(n+1)^2-n^2$.
Cette égalité permet de construire n'importe quel segment de longueur $\sqrt{2n+1}$.

De même, on peut construire un segment de longueur $\sqrt{13}$ à la règle et au compas.



Pour construire un segment de longueur $\sqrt{5}$ à la règle et au compas, on a deux possibilités :
1$^{\text{ère}}$ possibilité : $5=1^2+2^2$.
2$^{\text{e}}$ possibilité : $5=3^2-2^2$.

Autre méthode : l'escargot de Pythagore qui permet de construire des segments de longueurs $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$…
Méthode longue et fastidieuse lorsqu'il s'agit l'entier sous le radical est grand.

Enfin, il y a la **méthode de Descartes** qui permet de construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{a}$ connaissant un segment de longueur *a*.
Cette méthode utilise les relations métriques dans un triangle.

• Déterminer l'ensemble $E_2=\left\{\mathrm{M}(x\,;y)\in P\,/\,x^2+y^2+2x-6y+10=0\right\}$.

L'équation de E_2 est équivalente aux équations suivantes :

$$\underbrace{x^2+2x}+\underbrace{y^2-6y}+10=0$$

$$(x+1)^2-1+(y-3)^2-9+10=0$$

$$(x+1)^2+(y-3)^2=0$$

$$\boxed{E_2=\{\,\Omega\,\}\text{ avec }\Omega(-1\,;3)}$$

On dit que E_2 est **<u>un singleton</u>**.

• Déterminer l'ensemble $E_3=\left\{\mathrm{M}(x\,;y)\in P\,/\,x^2+y^2+4x+2y+6=0\right\}$.

L'équation de E_3 est équivalente aux équations suivantes :

$$x^2+4x+y^2+2y+6=0$$

$$(x+2)^2-4+(y+1)^2-1+6=0$$

$$(x+2)^2+(y+1)^2=-1 \text{ (impossible)}$$

$$\boxed{E_3=\varnothing}$$

4°) Bilan

• **Tout cercle admet une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.**

• **Réciproque fausse.**
L'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ tels que $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ est soit un cercle, soit un singleton, soit l'ensemble vide.

5°) Complément

On note E l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ du plan tels que $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ où α, β, γ sont trois réels donnés.

Déterminons la nature de E suivant les valeurs de α, β, γ.

$$\begin{aligned} M(x\,;y)\in E &\Leftrightarrow x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0\\ &\Leftrightarrow x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\beta^2}{4}+\gamma=0\\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma \end{aligned}$$

On regarde le signe de $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma$.

Discussion :

- Si $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma<0$, alors $E=\varnothing$.
- Si $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma>0$, alors E est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma}$.
- Si $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma=0$, alors E est le singleton $\{\ \Omega\ \}$.

On parle parfois, de manière abusive, de « cercle-point ».

On pourrait créer un algorithme sur calculatrice permettant de déterminer la nature d'un ensemble admettant une équation cartésienne du type de celle d'un cercle.

V. Utilisation de *Geogebra*

1°) Produit scalaire

Geogebra permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs.

2°) Vecteur normal, vecteur directeur d'une droite

3°) Équations de cercles

a) On constate que lorsque l'on trace un cercle sur *Geogebra* on voit apparaître une équation de ce cercle u cercle dans la fenêtre algèbre.

b) On peut tracer une courbe implicite (commande « Courbe Implicite). On peut rentrer directement une équation sous la forme $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$. On obtient automatiquement le tracé du cercle (lorsque c'en est un).

Exercice :

Tracer avec *Geogebra* la courbe d'équation $(x+y)^2+(x-y)^2=a^2 \quad (a>0)$.
Déterminer la nature de cette courbe.