1ère S

# Suites arithmétiques (2)

**Plan du chapitre :**



## I. Rappels

### 1°) Définition [suite arithmétique]

On donne trois formulations à savoir par cœur.

Une **suite arithmétique** est une suite telle que chaque terme sauf le premier s'obtient en ajoutant au précédent un nombre fixe $r$ appelé la **raison**.

On dit qu'une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est une **suite arithmétique** pour exprimer qu'il existe un réel $r$ (indépendant de $n$) tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel $r$ est appelé la **raison** de la suite.

La relation $u_{n+1} = u_n + r$ est appelée relation de récurrence de la suite.

On dit qu'une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est une **suite arithmétique** lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence de la forme $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$ où $r$ est un réel (indépendant de $n$) appelé la **raison** de la suite.

Les termes de la suite sont notés $u_0$, $u_1$, $u_2$ …

Le processus algorithmique de calcul des termes successifs consiste à ajouter la raison $r$ à chaque fois.



On notera les deux manières possibles d'écrire la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$ ou $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_{n-1} + r$.

### 2°) Propriété [expression du terme général]

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$$

Pour une suite arithmétique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_1 + (n-1)\times r$.

## II. Relation entre deux termes quelconques d'une suite arithmétique

### 1°) Formule (relation entre deux termes quelconques d'indices *n* et *p*)

***u*** **est une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison *r*.**

***n*** **et *p* sont deux entiers naturels quelconques.**

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

### 2°) Démonstration

On a :

$u_n = u_0 + n \times r$
$u_p = u_0 + p \times r$

Donc par différence membre à membre, on obtient : $u_n - u_p = (n-p)\times r$.

### 3°) Cas particuliers

En particularisant $p$ dans la formule, on peut retrouver des formules déjà étudiées.

• En prenant $p = 0$, on retrouve la formule $u_n = u_0 + n \times r$ (expression du terme général d'une suite arithmétique de premier terme $u_0$).

• En prenant $p = 1$, on retrouve la formule $u_n = u_1 + (n-1)\times r$ (expression du terme général d'une suite arithmétique de premier terme $u_1$).

## III. Sens de variation d'une suite arithmétique

### 1°) Propriété

***u* est une suite arithmétique de raison *r*.**

- **Si $r > 0$, alors *u* est strictement croissante à partir de l'indice 0.**
- **Si $r = 0$, alors *u* est constante.**
- **Si $r < 0$, alors *u* est strictement décroissante à partir de l'indice 0.**

### 2°) Démonstration

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = r$

### 3°) Remarque

Une suite arithmétique est toujours monotone.

## IV. Propriété de la moyenne

### 1°) Définition

***a* et *b* sont deux réels.**

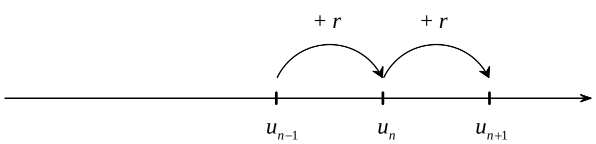
**La moyenne arithmétique de *a* et *b* est égale à $\frac{a+b}{2}$.**

### 2°) Propriété (justifiant l'appellation)

Pour une suite arithmétique, chaque terme (sauf le premier) est la moyenne arithmétique de ceux qui l'encadrent.

N. B. : Cette propriété n'est pas très utile en pratique.

### 3°) Démonstration




On a $u_n = u_{n+1} - r$ et $u_n = u_{n-1} + r$.

Par addition membre, on obtient $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$ d'où $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$.



### 4°) Définition [progression arithmétique]

**On dit que trois réels *a*, *b*, *c* dans cet ordre sont en progression arithmétique lorsque *a*, *b*, *c* sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.**

On peut parler du triplet $(a, b, c)$.

**Exemples :**

- 1, 2, 3
- 18, 24, 30

**Contre-exemple :**

1, 3, 4

**Généralisation :**

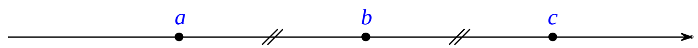
La définition se généralise au cas de quatre réels *a*, *b*, *c*, *d* et même au cas d'un nombre fini de réels.

**Propriété fondamentale :**

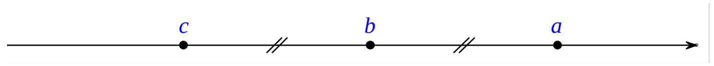
Trois réels *a*, *b*, *c* sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $b = \frac{a+c}{2}$ ou encore si et seulement si $a + c = 2b$.

Autrement dit, trois réels *a*, *b*, *c* sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si *b* se situe « au milieu » de *a* et *c*.

On retiendra les images mentales ci-dessous avec les réels *a*, *b*, *c* sur la droite réelle.




cas où la raison est positive




cas où la raison est négative

### 5°) Propriété des termes consécutifs d'une suite arithmétique

**Énoncé :**

Si des nombres sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors la somme de 2 termes équidistants des extrêmes est constante.

**Exemples :**

• Si $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$ $u_6$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique, on a :
$u_1+u_6=u_2+u_5=u_3+u_4$.

• Si $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$ $u_6$, $u_7$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique, on a :
$u_1+u_7=u_2+u_6=u_3+u_5=u_4+u_4$.

## V. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

### 1°) Exemple

$S=3+7+11+15$ (termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4)

On peut tout de suite dire que $S=26$.

On peut aussi écrire $S=15+11+7+3$.

On écrit ensuite les deux égalités l'une en dessous de l'autre.

$S=3+7+11+15$

$S=15+11+7+3$

L'addition membre à membre donne $2S=18+18+18+18$ autrement dit $S=\dfrac{4\times18}{2}$.

On retrouve bien le résultat obtenu par calcul mental.

### 2°) Formule sommatoire

**La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule :**

$$(\text{nombre de termes})\times\frac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}$$

Quand on écrit « premier terme » et « dernier terme » dans la formule, il s'agit de la valeur du premier terme et dernier terme.

### 3°) Démonstration (à apprendre et à savoir refaire)

On considère $p$ termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r$.
On note $a$ le premier terme et $b$ le dernier terme.

On pose $S=a+...+b$.

On désire calculer $S$ (trouver une formule simple).

On note $p$ le nombre de termes de la somme.

On reprend la même technique que dans l'exemple.



$S=a+...+b$

$S=b+...+a$

On additionne membre à membre les deux égalités.

On obtient alors :

$$2S=\underbrace{(a+b)+(a+b)+(a+b)+...+(a+b)}_{p\text{ termes}}$$

$$2S=p\times(a+b)$$

On en déduit que $S=\dfrac{p\times(a+b)}{2}$.

$$\boxed{S=(\text{nombre de termes})\times\frac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}}$$

La démonstration s'appuie sur la propriété vue dans le **III 5°)** qui dit que, dans une progression arithmétique, la somme de deux termes équidistants des extrêmes est constante (et uniquement sur cette propriété).

Voici un exemple de progression qui n'est pas arithmétique pour laquelle la propriété est vraie : 1 ; 2 ; 2 ; 3.
Dans cet ordre, la somme de deux termes équidistants des extrêmes est bien constante.
La somme de ces nombres est égale à 8 et est bien égale à
« $(\text{nombre de termes})\times\dfrac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}$ ».

### 4°) Exemple

**$u$ est la suite arithmétique de premier terme $u_0=7$ et de raison $r=2$.**

**Exprimer $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ en fonction de $n$ (sous forme factorisée).**

On applique la formule sommatoire.
On écrit donc :

$$S_n=(\text{nombre de termes})\times\frac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}$$

Le nombre de termes de la somme est égal à $n-0+1=n+1$.

$$S_n=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}$$

parenthèses

• On utilise la règle pour les quotients un peu longs.

• Les parenthèses autour du $n+1$ sont obligatoires.

$$u_n = u_0 + (n-0)\times r$$

$$= 7 + n\times 2$$

$$= 7 + 2n$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad S_n = (n+1)\times\frac{7+7+2n}{2}$$
$$= (n+1)\times\frac{14+2n}{2}$$

$$= (n+1)\times(n+7)$$

On teste la « formule » obtenue pour $n=0$ (important pour vérifier).

D'une part, $S_0 = u_0 = 7$.

D'autre part, $(0+1)\times(0+7) = 1\times 7 = 7$.

La formule fonctionne bien pour $n=0$.

## 5°) Remarque sur le nombre de termes d'une somme

**• Exemples**

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}_{(n+1)\text{ termes}}$$

$$\underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}_{n\text{ termes}}$$

$$\underbrace{u_3 + u_4 + \ldots + u_{20}}_{20-3+1=18\text{ termes}}$$

**• Formule générale**

$$\underbrace{u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n}_{(n-p+1)\text{ termes}}\qquad (p<n)$$



## 6°) Une application importante : somme des premiers entiers naturels

Formule (à savoir par cœur)

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Le premier membre est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1.

**Exemple :**

$$1+2+\ldots+100 = \frac{100\times 101}{2}$$
$$= \frac{10100}{2}$$
$$= 5050$$

La formule peut être obtenue visuellement en considérant les nombres triangulaires. On parle de « preuve sans parole ».

## 7°) Exercice [une propriété connue depuis l'antiquité]

Calcule 1, $1+3$, $1+3+5$, $1+3+5+7$, $1+3+5+7+9$ etc.
Quel résultat peut-on conjecturer ?
Démontrer cette conjecture.