1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur le sens de variation des suites

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{5}$, on donne une suite u définie sur $\mathbb{N}$ (sauf pour le $\boxed{2}$ où la suite est définie sur $\mathbb{N}^*$) par son terme général u_n.

Étudier le sens de variation de u.

$\boxed{1}$ $u_n = 2n^2 + n$

$\boxed{2}$ $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

$\boxed{3}$ $u_n = 2\times 3^n - 1$

$\boxed{4}$ $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

$\boxed{5}$ $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$

$\boxed{6}$ Soit u la suite définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n\left(1-u_n\right)$.
Étudier le sens de variation de u.

$\boxed{7}$ On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1}$.

1°) Justifier par un raisonnement « de proche en proche », sans faire de calcul, que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$.

Pour cela vérifier les deux points suivants :

- $u_0 > 0$
- si $u_k > 0$ pour un entier naturel k, alors $u_{k+1} > 0$.

2°) Étudier le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$ par différence.

Corrigé

Objectif des exercices : étudier le sens de variation de suites en utilisant à chaque fois la méthode adaptée.
Il faut donc toujours réfléchir au choix de la méthode avant de commencer.
Parfois, plusieurs méthodes sont possibles ce qui permet de comparer les méthodes entre elles.

Une consigne : tirer tous les traits de fraction à la règle lorsque c'est utile (exercices où le terme général de la suite est défini par un quotient).

Penser à **quantifier** bien les égalités et les inégalités.
La quantification des propositions est très importante.

Méthode :

Pour les suites définies en mode explicite, on regarde chaque fois l'expression de u_n en fonction de *n*.

La méthode par différence est la méthode à laquelle il faut penser en priorité.
Mais elle ne marche pas toujours. C'est pour cela qu'on étudie d'autres méthodes.

Il est intéressant de représenter graphiquement les suites considérées.

Méthodes pour déterminer le sens de variations des suites

La plus importante pour nous : la méthode de la différence.

Définition :

essentiel (il s'agit de phrases quantifiées)

→ (u_n) est croissante signifie que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n \leqslant u_{n+1}$.

→ (u_n) est décroissante signifie que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n \geqslant u_{n+1}$.

Recopier dans le cahier la définition de suite croissante / suite décroissante dans un encadré avant de commencer les exercices.

1 Méthode par différence ou par étude de fonction

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n^2 + n$

La suite est définie en mode explicite.

Étudions le sens de variation de la suite (u_n).

● **Méthode par différence**

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 + (n+1) - (2n^2 + n) = 2(n^2 + 2n + 1) + n + 1 - 2n^2 - n = 4n + 3$

On développe — Parenthèses importantes pour ne pas se tromper

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 4n + 3 > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

● **Méthode par étude de fonction** (un peu plus longue)

On doit définir la fonction *f* associée à la suite (u_n).

Considérons la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + x$ (on pourrait se limiter à $\mathbb{R}_+$).

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)$.

Le terme u_n (« *u* indice *n* ») est l'image de *n* par *f*.

On montre ainsi le lien entre la fonction *f* et la suite (u_n).
(Cela marche parce que la suite est définie en mode explicite et que l'on connaît la fonction associée).

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{R}_+$ si on a limité l'étude de *f* à $\mathbb{R}_+$) car *f* est une fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4x + 1$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) \geqslant 0$ (car la somme de deux nombres positifs est positive).

On en déduit que *f* est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (si *x* est positif, c'est croissant quoiqu'il arrive).

Par conséquent, la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

• On peut faire un tableau de variation mais ce n'est pas forcément utile.

• Il n'est pas nécessaire de calculer la dérivée de *f* (on connaît les variations d'une fonction polynôme du second degré, sans étudier la dérivée).

• On peut dire que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) > 0$.

On en déduit que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

• La **méthode par comparaison directe** peut marcher dans ce cas.

$\boxed{2}$ **Méthode par différence ou par étude de fonction**

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{n+1}{n}$

La suite (u_n) est définie en mode explicite (le terme général u_n est défini par un quotient).

Elle est définie sur $\mathbb{N}^*$ car *n* ne peut être égal à 0 (présente d'un *n* tout seul au dénominateur dans l'expression de u_n).

Étudions le sens de variation de la suite (u_n).

• **Méthode par différence**

On commence par calculer la différence puis on analyse son signe.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

Formule $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$

ne pas développer le dénominateur puisque c'est son signe qui nous intéresse

Si on développe le dénominateur, cela rallonge inutilement.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\dfrac{1}{n(n+1)} < 0$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

« à partir de l'indice 1 » car la suite est définie sur $\mathbb{N}^*$ (le premier élément de $\mathbb{N}^*$ est 1).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n < 0$.

• **Méthode par étude de fonction**

Considérons la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = f(n)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car *f* est une fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{1 \times x - (x+1) \times 1}{x^2} = \frac{x - x - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) < 0$.

On en déduit que *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 1 (car la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ donc son premier terme est u_1).

• **Méthode par quotient**

La méthode par quotient marche mais est un peu longue (donc à éviter).

Tous les termes à partir de l'indice 1 sont strictement positifs.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+1} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (en effet, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est le quotient de deux entiers naturels et le numérateur est strictement inférieur au dénominateur).

Donc la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 1.

3 Méthode par différence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2\times 3^n - 1$$

La suite est définie par mode explicite (formule qui donne le terme général en fonction de *n*).

On applique la méthode par différence.
On travaille en calcul littéral.

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \left(2\times 3^{n+1} - 1\right) - \left(2\times 3^n - 1\right) = 2\times 3^{n+1} - 2\times 3^n = 2\times 3^n \times 3 - 2\times 3^n = 6\times 3^n - 2\times 3^n = (6-2)\times 3^n = 4\times 3^n$$

$3^{n+1} = 3^n \times 3^1 = 3^n \times 3$ (règle sur les puissances)

On décompose 3^{n+1} en $3^n \times 3$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 4\times 3^n > 0$ (pour $n = 0$, on a : $4\times 3^0 > 0$)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

N.B. : La méthode par étude de fonction n'est pas envisageable (impossibilité de définir une fonction en 1ère).

4 Méthode par différence ou étude de fonction

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n^2}{n+1}$$

Étudions le sens de variation de la suite (u_n).

● Méthode par différence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^3 - n^2(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 - \cancel{n^3} - 2n^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)}$$

(ne pas développer le dénominateur)

Rappel : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

● Méthode par étude de fonction

Considérons la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

N.B. : Pour introduire la fonction, on peut faire une phrase du type : « Soit *f* la fonction définie par $f(x) = \ldots$ ».

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ car *f* est une fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \quad f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2\times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$ (on utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) \geqslant 0$ (car le numérateur et le dénominateur sont positifs ou nuls).

N.B. : On met bien le signe « supérieur ou égal ».

On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par conséquent, la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

● **Méthode par quotient**

Tous les termes à partir de l'indice 1 sont strictement positifs.

On fixe un entier naturel $n > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n+2} \times \frac{n+1}{n^2}$$

$$= \frac{(n+1)^3}{n^2(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^3}{n^2(n+2)} - 1$$

$$= \frac{(n+1)^3 - n^3 - 2n^2}{n^2(n+2)}$$ (on peut utiliser des parenthèses pour ne pas se tromper)

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 2n^2}{n^2(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2(n+2)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$$

N.B. : On pourrait déléguer le calcul à un logiciel de calcul formel.

$\boxed{5}$ Méthode par différence ou par quotient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n+1}{2^n}$$

Étudions le sens de variation de la suite (u_n).

● **Méthode par différence**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{n+2}{2 \times 2^n} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{(n+2) - 2(n+1)}{2 \times 2^n} = -\frac{n}{2^{n+1}}$$

On a deux fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre (on n'applique pas la formule $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$).

$u_n = \frac{n+1}{2^n}$ et $u_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+1}}$

Le dénominateur commun est 2^{n+1}.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{n}{2^{n+1}} \leqslant 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0.

● **Méthode par quotient**

Rappel : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Il faut d'abord dire que tous les termes de la suite sont strictement positifs (condition d'application de la méthode par quotient).

On peut le traduire mathématiquement de deux manières (et deux seulement).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ (tous les termes de la suite sont strictement positifs*)

ou $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \mathbb{R}_+^*$ (tous les termes de la suite appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$)

C'est très important à dire car sinon la propriété des quotients ne s'applique pas.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} - 1 = \frac{n+2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n+1} - 1 = \frac{n+2}{2 \times \cancel{2^n}} \times \frac{\cancel{2^n}}{n+1} - 1 = \frac{n+2}{2(n+1)} - 1 = \frac{n+2-2(n+1)}{2(n+1)} = -\frac{n}{2(n+1)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{n}{2(n+1)} \leqslant 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leqslant 0$ donc la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0.

N.B. : La suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

* Plutôt que de dire que tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut dire que « la suite (u_n) est à termes strictement positifs ».

6 On utilise la **méthode par différence**.

$u_0 \in \mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$

Étudions le sens de variation de la suite (u_n).

On utilise la **méthode par différence**.

La suite est définie par récurrence. On ne peut pas trouver une expression explicite de u_n (il est en général très difficile de passer du mode récurrent au mode explicite et ce n'est pas toujours possible ; c'est possible seulement dans certains cas particuliers, comme pour les suites arithmétiques ou géométriques qui ont été étudiées dans des chapitres spéciaux).
On ne cherche pas à « trouver » u_n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = u_n(1 - u_n) - u_n$
(on remplace u_{n+1} en utilisant la relation de récurrence et on laisse u_n tel quel*)
$= u_n - (u_n)^2 - u_n$ (on développe)
$= -(u_n)^2$

* On sait que $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$; on va remplacer u_{n+1} en fonction de u_n dans le calcul.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad -(u_n)^2 \leqslant 0$ (u_n peut être nul, on n'en sait rien, donc le signe est bien « inférieur ou égal »)

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0.

Remarque : On utilisera tout le temps cette méthode pour des suites définies par récurrence.

On ne peut pas utiliser le sens de variation de la fonction associée à la suite pour en déduire celui de la suite (u_n). En effet, il n'y a pas de propriété dans le cours permettant de déduire le sens de variation de la suite de celui de la fonction (on ne peut le faire que lorsque l'on a une suite définie en mode explicite).

7 (u_n) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1} \end{cases}$

La suite (u_n) est définie en **mode récurrent**.

Dans cet exercice, on ne cherchera pas à passer en mode explicite.

1°) **Justifions par un raisonnement « de proche en proche » que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.**

Le raisonnement de « proche en proche » est un raisonnement particulier aux suites qui permet de montrer comment une propriété se « propage » d'un terme au suivant (d'un indice à l'indice suivant).
L'exercice sur les voitures rouges et vertes de la feuille d'exercices consacrée aux généralités sur les suites en montrait déjà le principe.

Ici, on va raisonner en deux étapes :

1ère étape : On vérifie pour le premier indice, ici 0.

2e étape : On suppose qu'elle est vraie pour un indice fixé et on démontre, sans calcul, qu'elle reste alors vraie pour l'indice suivant.

- $u_0 = 5$ donc $u_0 > 0$

- Si $u_k > 0$ pour un entier naturel k fixé, alors
$3u_k + 1 > 0$ donc d'après la règle du signe d'un quotient $\frac{u_k}{3u_k + 1} > 0$ soit $u_{k+1} > 0$ (« hérédité » ou « transmissibilité » de la propriété « être positif »).

On a donc démontré le caractère héréditaire de la propriété.

On en déduit par un raisonnement de « proche en proche », on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.

Commentaires :

• Il s'agit d'une initiation au raisonnement de « proche en proche ».
Ce raisonnement sera mis en forme en Terminale sous le nom de raisonnement par récurrence.

Ce qui est intéressant c'est la proposition quantifiée (« pour tout » entier naturel n).

• On peut dire que la suite (u_n) est à termes strictement positifs (c'est-à-dire que tous les termes de la suite sont strictement positifs).

• On retiendra l'expression « raisonnement de proche en proche » qui consiste à passer d'un terme de la suite au terme suivant (d'un indice à l'indice suivant).

2°) **Étudions le sens de variation de la suite (u_n) par différence.**

On fixe un entier naturel n.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{u_n}{3u_n+1}-u_n \\ &= \frac{u_n-u_n(3u_n+1)}{3u_n+1} \\ &= \frac{u_n-3u_n^{\ 2}-u_n}{3u_n+1} \\ &= -\frac{3(u_n)^2}{3u_n+1} \end{aligned}$$

On a : $-3(u_n)^2 \leqslant 0$ et $3u_n+1>0$

Donc d'après la règle du signe d'un quotient, $-\dfrac{3(u_n)^2}{3u_n+1} \leqslant 0$ soit $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n \leqslant 0$.

Conclusion :

La suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0.

À propos du 1°) :

Le calcul des premiers termes permet de conjecturer aisément que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

Quelques points à noter dès le début ou au fur et à mesure des exercices :

- Pas de dérivées de suites.

- Pas de tableau de variation de suites.

- Ce n'est pas parce que le terme général d'une suite est donné sous forme explicite sous la forme d'un quotient que la méthode par quotient est à préconiser pour étudier son sens de variation.

- Fonctions seulement pour des suites en mode explicite.

Il ne faut pas hésiter à utiliser des parenthèses dans les calculs de différences afin de ne pas se tromper.