$1^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le vendredi 16 mars 2012

I. L'objectif de cet exercice est de démontrer quelques relations métriques dans un triangle rectangle (en dehors du théorème de Pythagore) en utilisant le produit scalaire.

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A.

1°) Démontrer, en considérant le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$, que l'on a : $BA^2 = BH \times BC$ (1).
Démontrer également que l'on a : $CA^2 = CH \times CB$ (2).

2°) Démontrer que l'on a : $AH^2 = HB \times HC$ (3) en considérant le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

3°) Démontrer que l'on a : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ (4).

Indication : transformer le membre de droite en utilisant les relations (1) et (2) ; utiliser ensuite (3).

N.B.

- Toutes les relations de cet exercice méritent d'être retenues par cœur ; il est fortement conseillé de faire une fiche.

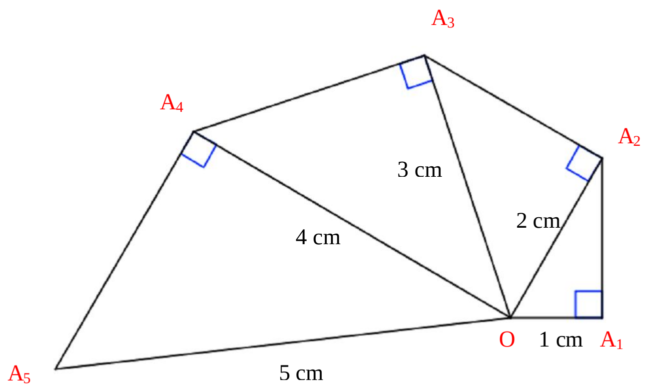
- On peut également démontrer ces relations par d'autres méthodes :

- (1) et (2) avec les cosinus ;
- (1), (2), (3) avec les triangles semblables.

II. Voici le début d'une spirale construite de telle façon que :

– les longueurs OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5 sont respectivement égales à 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm.
– les angles $\widehat{OA_1A_2}$, $\widehat{OA_2A_3}$, $\widehat{OA_3A_4}$, $\widehat{OA_4A_5}$ sont droits.

On tourne toujours dans le même sens.



1°) Exprimer en fonction de p la distance $A_{p-1}A_p$ (distance entre les points A_{p-1} et A_p) où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2°) On note L_n la longueur en centimètres de la spirale $A_1A_2\ldots A_n$ (c'est-à-dire de la ligne brisée constituée par les segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, … $[A_{n-1}A_n]$).

Recopier et compléter l'égalité :

$$L_n = \sum_{p=\ldots}^{p=\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

On notera qu'il n'existe pas de formule sommatoire pour L_n.

3°) À l'aide de la calculatrice (en utilisant la fonction spéciale permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite), d'un tableur ou d'un logiciel de calcul formel, calculer la valeur arrondie à l'unité de la longueur en centimètres de la spirale $A_1A_2\ldots A_{25}$ (indiquer le moyen de calcul choisi ; dans le cas d'un logiciel de calcul formel préciser le nom).

4°) On se propose de déterminer le plus petit entier naturel n tel que la longueur de la spirale $A_1A_2\ldots A_n$ dépasse 3 mètres.

a) Écrire un algorithme en langage naturel permettant de répondre à la question.

b) Programmer cet algorithme sur calculatrice ou sur ordinateur et en déduire la valeur cherchée.

Correction du devoir pour le 16 mars 2012

I. Relations métriques dans un triangle rectangle

Hypothèses :

ABC triangle rectangle en A
H pied de la hauteur issue de A.

1°) D'une part, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC)

$=BH\times BC$ car $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens

D'autre part, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}$ car A est le projeté orthogonal de C sur la droite (BA)

$=\overrightarrow{BA}^2$

$=BA^2$

Conclusion : $BA^2=BH\times BC$ (1).

D'une part, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC)

$=CH\times CB$ car $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de même sens

D'autre part, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}$ car A est le projeté orthogonal de B sur la droite (CA)

$=\overrightarrow{CA}^2$

$=CA^2$

Conclusion : $CA^2=CH\times CB$ (2).

2°) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)$

$$=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\underbrace{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}}_{0}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$$

$$=\overrightarrow{AH}^2-HB\times HC$$

$$=AH^2-HB\times HC$$

D'autre part, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ car le triangle ABC est rectangle en A.

On a donc : $AH^2-HB\times HC=0$.

Par suite, on en déduit que $\boxed{AH^2=HB\times HC}$ (3).

3°) Démontrons que l'on a: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}$ (4).

On va partir du membre de droite de cette relation.

D'après les relations (1) et (2), on a : $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{BH\times BC}+\dfrac{1}{CH\times CB}$.

$$=\frac{1}{BC}\left(\frac{1}{BH}+\frac{1}{CH}\right)$$

$$=\frac{1}{BC}\left(\frac{BH+CH}{BH\times CH}\right)$$

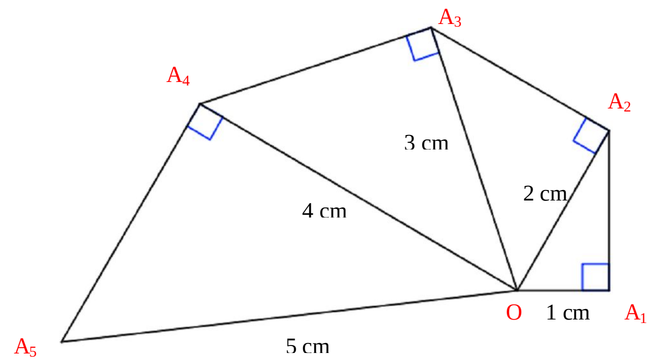
Or $H\in[BC]$ d'où $BH+CH=BC$.

De plus, d'après la relation (4), on a : $AH^2=HB\times HC$.

D'où : $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{\cancel{BC}}\times\dfrac{\cancel{BC}}{AH^2}$

Par suite, on a : $\boxed{\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AH^2}}$.

II. Spirale

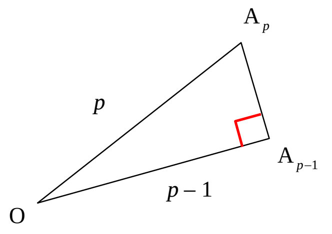


La spirale est construite sur un **principe algorithmique**.

La spirale définit une **suite de points** A_1, A_2, A_3, … A_n (suite de points indexée).

1°) **Exprimons en fonction de p la distance $A_{p-1}A_p$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.**

On commence par observer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad OA_n = n$.



Commentaire :

$A_{p-1}A_p$ désigne la longueur du segment $[A_{p-1}A_p]$.
On ne met pas de signe $\times$ ce qui n'aurait aucun sens : $A_{p-1} \times A_p$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $OA_{p-1}A_p$ rectangle en A_{p-1}, on a :
$OA_p^{\ 2} = OA_{p-1}^{\ 2} + A_{p-1}A_p^{\ 2}$.

Donc $A_{p-1}A_p^{\ 2} = OA_p^{\ 2} - OA_{p-1}^{\ 2}$

$= p^2 - (p-1)^2$

$= p^2 - (p^2 - 2p + 1)$

$= 2p - 1$

Or une distance est positive ou nulle donc $\boxed{A_{p-1}A_p = \sqrt{2p-1}}$.

2°) **L_n : longueur en centimètres de la spirale $A_1A_2\ldots A_n$**

$L_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$

$= \sum_{p=2}^{p=n} A_{p-1}A_p$

$= \sum_{p=2}^{p=n} \sqrt{2p-1}$

Il n'existe pas de formule sommatoire pour L_n c'est-à-dire que l'on ne peut exprimer cette somme à l'aide d'une formule explicite en fonction de n.

3°) **Calculons la longueur de la spirale $A_1A_2\ldots A_{25}$.**

Cette longueur en centimètres correspond à la valeur de $L_{25} = \sum_{p=2}^{p=25} \sqrt{2p-1}$.

Pour calculer cette somme (plutôt, pour obtenir une valeur approchée de cette somme), on peut utiliser la calculatrice (voir ci-dessous) ou un tableur.
On obtient : $L_{25} = 116{,}931347\ldots$

Quelques commentaires sur ce résultat :

1. Le résultat obtenu sur calculatrice n'est pas la valeur exacte de L_{25}. Toutes les décimales affichées sont exactes sauf peut-être la dernière.

2. On ne met pas l'unité (on n'écrit pas : $L_{25} = 116{,}931347\ldots$ cm).

3. On peut écrire $L_{25} \approx 117$ (valeur arrondie au dixième).
Cette fois, on ne peut mettre de signe = .

On trouve que la longueur de la spirale $A_1A_2\ldots A_{25}$ est environ égale à **117 cm (valeur arrondie à l'unité)**.

La calculatrice permet de calculer une somme définie à l'aide du symbole Σ :

• Calculatrice TI :

On doit afficher sur l'écran : $\boxed{\text{somme (suite(}\sqrt{\ }\text{ (2p – 1), p, 2, 25))}}$.
On obtient :
- *somme* (ou *sum* en anglais) par Listes ($\boxed{\text{2 nde}}$ $\boxed{\text{stats}}$), choix MATH, puis *somme* ;
- *suite* (ou *seq* avec une parenthèse lorsque la calculatrice est en anglais) par Listes, OPS puis suite(.

Il est possible d'obtenir *somme* et *suite* en allant dans le catalogue (pour cela, taper $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{0}$) et on cherche dans la liste.

• Calculatrice CASIO GRAPH 35 + :

On doit afficher sur l'écran : $\boxed{\sum_{p=2}^{25} \sqrt{2p-1}}$.

On fait : Menu Math (F4) puis F6 : il s'affiche le symbole Σ.

4°) Le but de cette question est de déterminer le plus petit entier naturel n tel que la longueur de la spirale $A_1A_2\ldots A_n$ dépasse 3 mètres.

a) **Algorithme en langage naturel permettant de répondre à la question.**

Il faut commencer par convertir la longueur 3 m en centimètres.

3 mètres = 300 cm.

On rédige un algorithme utilisant une boucle « Tantque ».

Variables :
p : entier naturel
A : réel

Initialisations :
p prend la valeur **2**
A prend la valeur 0

Traitement :
Tantque A $\leqslant$ 300 **Faire**
  A prend la valeur A + $\sqrt{2p-1}$
  p prend la valeur p + 1
FinTantque

Sortie :
Afficher ***p* – 1**
(Afficher A) ⟵ ligne inutile

Quelques commentaires :

1. Les variables sont des lettres « muettes » ; elles peuvent être remplacées par d'autres lettres.
En particulier, le p peut être remplacé par n sans aucune gêne.

2. Attention à l'ordre des instructions dans la boucle « Tantque ».
On ne peut échanger les instructions « A prend la valeur A + $\sqrt{2p-1}$ » et « p prend la valeur p + 1 ».

3. On initialise p à 2 ; le nombre qui doit s'afficher en sortie doit être p – 1 et non p (sinon on obtient 48, ce qui ne colle pas avec la vérification).

4. L'instruction p prend la valeur p + 1 vient après la première instruction ; il est maladroit de commencer par celle-ci car il faut alors initialiser p à 1 (cf. variantes).

5. Dans cet algorithme, la variable p représente un indice ; la variable A représente une longueur.

Variantes (qui sont un peu maladroites) :

1. Avec initialisation de *p* à 1 (à éviter)

Variables :
p : entier naturel
A : réel

Initialisations :
p prend la valeur 1
A prend la valeur 0

Traitement :
Tantque A $\leqslant$ 300 **Faire**
  p prend la valeur p + 1
  A prend la valeur A + $\sqrt{2p-1}$
FinTantque

Sortie :
Afficher p

2. Avec affichage au cours du traitement (à éviter)

Variables :
p : entier naturel
A : réel

Initialisations :
p prend la valeur 2
A prend la valeur 0

Traitement et sortie :
Tantque A $\leqslant$ 300 **Faire**
  A prend la valeur A + $\sqrt{2p-1}$
  Afficher p
  p prend la valeur p + 1
FinTantque

b) **Déterminons le plus petit entier naturel n tel que la longueur de la spirale $A_1A_2\ldots A_n$ dépasse 3 mètres.**

On programme l'algorithme écrit au a) sur calculatrice ou sur ordinateur.

On trouve alors que le plus petit entier naturel n tel que la longueur de la spirale $A_1A_2\ldots A_n$ dépasse 3 mètres est **47** (on obtient alors une longueur environ égale à 3,02 m).

On peut vérifier ce résultat avec la calculatrice.

En effet, on trouve :

$L_{46} = 293,22609\ldots$

$L_{47} = 302,22609\ldots$

Commentaire :

On écrit $n = 47$.
On n'écrit pas $n = 47$ cm.
n est un indice ; ce n'est pas une longueur.