1ère S Exercices sur le schéma de Bernoulli (2)

1 Dans une loterie, une roue présente des secteurs gagnants. À chaque lancer de roue, la probabilité de gagner est 0,1 et ne dépend pas du lancer précédent.
On joue quatre fois de suite.
Calculer, en rédigeant selon le modèle ci-dessous, la probabilité
- de gagner exactement une fois ;
- de gagner au moins une fois.

L'épreuve « lancer la roue » est une **épreuve de Bernoulli** modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

soit à un succès S : « tomber sur un secteur gagnant » $P(\mathrm{S}) = ...$

soit à un échec $\overline{\mathrm{S}}$: « tomber sur un secteur perdant » $P(\overline{\mathrm{S}}) = ...$

On répète cette épreuve quatre fois dans des **conditions identiques indépendantes**.
Il s'agit donc d'un **schéma de Bernoulli**.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des quatre lancers.
X suit la loi binomiale de paramètres $n = \ldots$ et $p = \ldots$.
On note E l'événement : « gagner exactement une fois ».

$$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{X} = ...)$$
$$= ...$$

On note F l'événement : « gagner au moins une fois ».

$$P(\mathrm{F}) = ...$$

2 Une usine fabrique des pièces en grande série dont 5 % sont défectueuses.
On en prélève quatre au hasard.
On admettra que, vu le grand nombre de pièces, cette opération peut être assimilée à quatre prélèvements successifs avec remise (donc indépendants).
Quelle est la probabilité que deux pièces exactement soient défectueuses ?

3 On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 cinq fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois le numéro 6 ?

4 Un joueur de basket sait qu'à chaque tir au panier sa probabilité de succès est 0,8.
Au cours d'un entraînement, il envisage quatre lancers successifs indépendants.
Quelle est la probabilité que le joueur réussisse

- au moins un panier ?
- au moins trois paniers ?

5 Une urne contient cinq boules noires et trois boules blanches.
On tire une boule au hasard trois fois de suite avec remise.
Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule blanche.

6 Un tireur à l'arc envoie quatre flèches sur une cible.
On admet que chaque tir est indépendant des précédents et que pour chaque tir la probabilité d'atteindre la cible est 0,75.
Calculer la probabilité d'atteindre
1°) exactement trois fois la cible ;
2°) au moins une fois la cible.
Donner les valeurs exactes des résultats sous forme décimale.

7 Un Q.C.M. comporte dix questions offrant chacune trois réponses possibles. Il n'y a chaque fois qu'une réponse exacte. On répond complètement au hasard.
Quelle est la probabilité
1°) d'obtenir exactement deux réponses exactes ?
2°) d'obtenir au moins cinq réponses exactes ?

8 La probabilité de gagner à un jeu est $\frac{1}{5}$.
En faisant cinq parties successives et indépendantes, quelle est la probabilité d'avoir gagné au moins une fois ?

9 Une étude statistique portant sur plusieurs années a montré que, dans une population donnée, la fréquence de naissance d'une fille est de 45 %. On suppose que le sexe d'un enfant à la naissance ne dépend pas du sexe de l'enfant précédent.
On s'intéresse au nombre de filles dans une famille de cinq enfants. On note X le nombre de filles dans ces familles.
1°) Quel est le nom de la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses caractéristiques.
2°) Calculer E(X), V(X) et σ(X).

10 Un exercice se présente sous la forme de cinq affirmations indépendantes où l'élève doit répondre par vrai ou faux.
Chaque réponse juste rapporte deux points tandis qu'une réponse incorrecte pénalise l'élève d'un point. Ainsi, la note obtenue peut être négative.
Un élève décide de répondre au hasard à toutes les questions.
On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de réponses justes.
1°) Indiquer la loi de probabilité de X et préciser la valeur de E(X).
2°) On note N la variable aléatoire qui indique la note obtenue à l'exercice.
a) Quelles sont les valeurs prises par N ?
b) Exprimer N en fonction de X ; en déduire E(N).
c) Que dire de la stratégie de réponse au hasard ?

11 **Loto foot**

On pronostique les résultats de quinze matchs de football.
Exemple (extrait de grille) :

Bordeaux	**Lyon**	1	N	2

On choisit parmi trois cases : 1 pour la victoire de Bordeaux, 2 pour celle de Lyon et N pour un match nul.
On suppose que les résultats des matchs sont indépendants et qu'il y a équiprobabilité entre les trois résultats pour chaque match. On remplit une grille (simple) au hasard.
Une grille est gagnante si elle contient au moins douze bonnes réponses.
Quelle est la probabilité d'avoir une grille gagnante ? On donnera la valeur arrondie à la quatrième décimale.

$\boxed{12}$ Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux rouges et trois noires.
On tire au hasard une boule dans l'urne.
Si la boule est rouge, on perd 2 € ; si elle est noire, on gagne 1 €.
Un joueur réalise cette épreuve quinze fois avec remise de la boule après un tirage.
On note G la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur en euros et X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules rouges obtenues au terme des quinze tirages.
1°) Exprimer G en fonction de X.
2°) Quelle est la loi de probabilité de X ? Quelle est son espérance mathématique et sa variance ?
3°) En déduire l'espérance mathématique et la variance de G.

$\boxed{13}$ Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé.
Les tirs successifs sont indépendants.
1°) Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?
2°) Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon c'est-à-dire que le ballon soit crevé au premier tir ou au second tir ?
3°) Quelle est la probabilité pour que n tirs suffisent pour crever le ballon (n étant un entier naturel tel que $n \geqslant 1$) ?

$\boxed{14}$ Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

1°) À l'aide de la calculatrice, faire un tableau donnant la loi de probabilité de X sur le modèle suivant.

$\boldsymbol{k}$	0	1	2				
$\boldsymbol{P(\mathrm{X} = k)}$							

2°) Représenter la loi de probabilité de X sous la forme d'un diagramme en bâtons. On prendra :
- un centimètre ou un gros carreau pour représenter 1 en abscisse ;
- un centimètre ou un gros carreau pour représenter 0,01 en ordonnée.

$\boxed{15}$ À l'aide de la calculatrice, dresser un tableau de la forme ci-dessous dans chacun des cas suivants.

1$^{\text{er}}$ cas : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$

2$^{\text{e}}$ cas : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,5$

3$^{\text{e}}$ cas : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,8$

$\boldsymbol{k}$	0	1	2				
$\boldsymbol{P(\mathrm{X} = k)}$							

Dans chaque cas, représenter ensuite la loi de probabilité de X par un diagramme en bâtons avec le choix suivant d'unités sur les axes : 1 cm pour 1 en abscisse et 2 cm pour 0,1 en ordonnée.

Corrigé

Dans ce chapitre, on n'utilise plus les arbres de probabilités (car cela serait trop fastidieux, voire impossible si le nombre de répétitions est élevé).

Dans ce chapitre, on abandonne les arbres.

$\boxed{1}$ L'épreuve « lancer la roue » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « tomber sur un secteur gagnant » $P(\text{S}) = 0{,}1$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « tomber sur un secteur perdant » $P(\overline{\text{S}}) = 0{,}9$

On répète cette épreuve quatre fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des quatre lancers.
X suit la loi binomiale de paramètres 4 (nombre d'épreuves) et 0,1 (probabilité d'un succès).

On note E l'événement « gagner exactement une fois ».

$$P(\text{E}) = P(\text{X}=1) = \binom{4}{1} \times 0{,}1 \times 0{,}9^3 \;{}^{*} = 4 \times 0{,}1 \times 0{,}9^3 = 0{,}2916$$

On note F l'événement « gagner au moins une fois ».

$$P(\text{F}) = P(\text{X} \geqslant 1) = 1 - P(\text{X}<1) = 1 - P(\text{X}=0) = 1 - \binom{4}{0} \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^4 \;{}^{**} = 1 - 1 \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^4 = 0{,}3439$$

On donne les valeurs exactes des probabilités demandées sous forme décimale.

Calculs des coefficients binomiaux :

* On sait que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\binom{n}{1} = n$; donc pour $n=4$, $\binom{4}{1} = 4$.

** On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\binom{n}{0} = 1$; donc pour $n=4$, $\binom{4}{0} = 1$.

On peut aussi utiliser la calculatrice ou le triangle de Pascal.
On pourrait aussi utiliser la formule de Pascal (mais c'est un peu long).

Autre méthode pour *P*(F) :

$$P(\text{F}) = P(\text{X}=1) + P(\text{X}=2) + P(\text{X}=3) + P(\text{X}=4)$$

Cette solution est moins économique en calcul que de passer par l'événement contraire.

On peut vérifier les résultats grâce à la calculatrice.

« gagner au moins une fois » signifie « gagner au minimum une fois ».

$\boxed{2}$ L'épreuve « prélever une pièce » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « la pièce est défectueuse » $P(\text{S}) = 0{,}05$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « la pièce n'est pas défectueuse » $P(\overline{\text{S}}) = 0{,}95$

On répète cette épreuve quatre fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des quatre prélèvements (c'est-à-dire le nombre de pièces défectueuses).
X suit la loi binomiale de paramètres 4 (nombre d'épreuves) et 0,05 (probabilité d'un succès).
On note E l'événement « obtenir exactement deux pièces défectueuses ».

$$P(\text{E}) = P(\text{X}=2) = \binom{4}{2} \times 0{,}05^2 \times 0{,}95^2 = 6 \times 0{,}05^2 \times 0{,}95^2 = 0{,}0135375$$

(valeur exacte, il s'agit d'un nombre décimal)

$\binom{4}{2} = \dfrac{4\times3}{1\times2} = 6$ ou utilisation de la calculatrice ou utilisation du triangle de Pascal

On vérifie (ou on calcule) ce résultat à l'aide de la calculatrice.

Moyen avec la calculatrice :

$\boxed{\text{seconde}}$ $\boxed{\text{var}}$ (distrib) binomFdp(4,0.05,2) $\boxed{\text{entrer}}$

0.0135375

$\boxed{3}$ L'épreuve « lancer le dé » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « avoir un 6 » $P(\text{S}) = \dfrac{1}{6}$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « ne pas avoir un 6 » $P(\overline{\text{S}}) = \dfrac{5}{6}$

On répète cette épreuve cinq fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des 5 lancers.
X suit la loi binomiale de paramètres 5 (nombre d'épreuves) et $\dfrac{1}{6}$ (probabilité d'un succès).

$P\left(\text{« obtenir exactement deux fois un 6 »}\right)=P\left(\text{X}=2\right)$

$$=\binom{5}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$=10\times\frac{1}{6^2}\times\frac{5^3}{6^3}$$

$$=10\times\frac{125}{6^5}$$

$$=\frac{625}{3\ 888}$$

• L'utilisation de la formule est ici indispensable pour donner le résultat sous forme fractionnaire (valeur exacte).
La calculatrice ne fournirait qu'une valeur approchée.

• Attention à bien mettre les parenthèses autour des fractions pour les puissances (principe d'enfermement des fractions dans des parenthèses) même si la calculatrice n'a pas forcément besoin de parenthèses pour faire le calcul.

> La formule donne la valeur exacte. C'est toujours intéressant d'avoir la valeur exacte.

Méthodes pour trouver $\binom{5}{2}$ (« 2 parmi 5 »)

1ère méthode : avec le triangle de Pascal

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

2e méthode : avec la calculatrice

Taper 5 (le grand nombre d'abord)
Appuyer sur la touche math .
Choisir PROB puis 3 : combinaison(ou nCr
Taper 2
Taper sur la touche entrer .

4 L'épreuve « lancer le ballon » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « réussir le panier » $P\left(\text{S}\right)=0{,}8$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « rater le panier » $P\left(\overline{\text{S}}\right)=0{,}2$

On répète cette épreuve quatre fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des 4 lancers (c'est-à-dire le nombre de paniers réussis).
X suit la loi binomiale de paramètres 4 (nombre d'épreuves) et 0,8 (probabilité d'un succès).

• Calculons la probabilité que le joueur réussisse au moins un panier.

$P\left(\text{« le joueur réussit au moins un panier »}\right)=P\left(\text{X}\geqslant 1\right)$

1ère méthode :

$$=1-P\left(\text{X}=0\right)$$
$$=1-0{,}2^4$$
$$=0{,}998$$

La probabilité que le joueur réussisse au moins un panier est égale à **0,998**.

2e méthode :

$$=P\left(\text{X}=1\right)+P\left(\text{X}=2\right)+P\left(\text{X}=3\right)+P\left(\text{X}=4\right)$$

Cela fait beaucoup de calculs.

3e méthode :

On utilise directement la calculatrice.

• Calculons la probabilité que le joueur réussisse au moins trois paniers.

$P\left(\text{« le joueur réussit au moins trois paniers »}\right)=P\left(\text{X}\geqslant 3\right)$

1ère méthode : calculs « à la main »

$P\left(\text{« le joueur réussit au moins trois paniers »}\right)=P\left(\text{X}=3\right)+P\left(\text{X}=4\right)=0{,}8192$

La probabilité que le joueur réussisse au moins trois paniers est égale à **0,8192**.

On a : $P\left(\text{X}=3\right)=\binom{4}{3}\times\left(0{,}8\right)^3\times 0{,}2^1=4\times\left(0{,}8\right)^3\times 0{,}2$; $P\left(\text{X}=4\right)=\binom{4}{4}\times\left(0{,}8\right)^4\times 0{,}2^0=\left(0{,}8\right)^4$

Les parenthèses autour de 0,8 ne sont pas obligatoires pour les puissances (ce sont des parenthèses de lisibilité, on pourrait les qualifier également de parenthèses inutiles ou superflues).

X : nombre de paniers après 4 tentatives

On peut définir les événements

E : « le joueur réussit au moins un panier » ;

F : « le joueur réussit au moins trois paniers »

2^{e} méthode : utilisation de la calculatrice

$P(\text{« le joueur réussit au moins trois paniers »}) = P(\mathrm{X} \geqslant 3)$

Pour la calculatrice Numworks : On obtient directement le résultat.

Pour la calculatrice TI 83 Premium CE : On écrit $P(\text{« le joueur réussit au moins trois paniers »}) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 2)$.

On utilise la calculatrice en tapant $1 - \text{binomFRép}(4, 0.8, 2)$ (calculatrice en français) ou $1 - \text{binomcdf}(4, 0.8, 2)$ (calculatrice en anglais).

Autre modèle de la calculatrice (boîtier noir) :
binomFRép
trials : 4
p : 0.8
x value : 2
Appuyer sur paste.

Variante :

$$\begin{aligned} P(\text{« le joueur réussit au moins trois paniers »}) &= P(\mathrm{X} \geqslant 3) \\ &= 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 2) \\ &= 1 - 0{,}1808 \\ &= 0{,}8192 \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ L'épreuve « tirer une boule dans l'urne » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « tirer une boule blanche » $P(\mathrm{S}) = \dfrac{3}{8}$
- soit à un échec $\overline{\mathrm{S}}$: « tirer une boule noire » $P(\overline{\mathrm{S}}) = \dfrac{5}{8}$

On répète cette épreuve trois fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des 3 tirages.

X suit la loi binomiale de paramètres 3 (nombres d'épreuves) et $\dfrac{3}{8}$ (probabilité d'un succès).

$P(\text{« tirer exactement deux boules blanches »}) = P(\mathrm{X} = 2) = \dbinom{3}{2} \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^2 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^1 = 0{,}263671875$ (valeur exacte, on a écrit toutes les décimales)

Attention à bien mettre des parenthèses autour des fractions qui sont élevées à des puissances.

$\boxed{6}$ L'épreuve « lancer la flèche » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « atteindre la cible » $P(\mathrm{S}) = 0{,}75$
- soit à un échec $\overline{\mathrm{S}}$: « rater la cible » $P(\overline{\mathrm{S}}) = 0{,}25$

On répète cette épreuve quatre fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des 4 lancers (c'est-à-dire le nombre de fois où la cible a été atteinte).
X suit la loi binomiale de paramètres 4 (nombre d'épreuves) et 0,75 (probabilité d'un succès).

$P(\text{« atteindre exactement trois fois la cible »}) = P(\mathrm{X} = 3) = \dbinom{4}{3} \times 0{,}75^3 \times 0{,}25^1 = 0{,}421875$ (valeur exacte, on a écrit toutes les décimales)

$P(\text{« atteindre au moins une fois la cible »}) = P(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - P(\mathrm{X} = 0) = 1 - 0{,}25^4 = 0{,}99609375$

$\boxed{7}$ L'épreuve « répondre à une question » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « la réponse est exacte » $P(\mathrm{S}) = \dfrac{1}{3}$
- soit à un échec $\overline{\mathrm{S}}$: « la réponse est fausse » $P(\overline{\mathrm{S}}) = \dfrac{2}{3}$

On répète cette épreuve 10 fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des 10 questions.

X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\dfrac{1}{3}$.

1°) **E : « obtenir exactement deux réponses exactes »**

$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{X} = 2) = \dbinom{10}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^8 = 45 \times \dfrac{2^8}{3^{10}} = 0{,}19509219...$

Attention à bien mettre des parenthèses autour des fractions qui sont élevées à certaines puissances.

2°) **F : « obtenir au moins cinq réponses exactes »**

1ère méthode :

$$\begin{aligned}P(\mathrm{F}) &= P(\mathrm{X} \geqslant 5)\\ &= 1 - \left[P(\mathrm{X}=0) + P(\mathrm{X}=1) + P(\mathrm{X}=2) + P(\mathrm{X}=3) + P(\mathrm{X}=4)\right]\\ &= 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \binom{10}{1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{9} + \binom{10}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{8} + \binom{10}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{7} + \binom{10}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\right]\\ &= 0{,}2131280...\end{aligned}$$

2e méthode :

$$P(\mathrm{F}) = P(\mathrm{X} \geqslant 5) = P(\mathrm{X}=5) + P(\mathrm{X}=6) + P(\mathrm{X}=7) + P(\mathrm{X}=8) + P(\mathrm{X}=9) + P(\mathrm{X}=10) = 0{,}2131280...$$

3e méthode : utilisation de la calculatrice

$$\begin{aligned}P(\mathrm{F}) &= P(\mathrm{X} \geqslant 5)\\ &= 1 - P(\mathrm{X} < 5)\\ &= 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 4)\end{aligned}$$

Sur la calculatrice, on tape : 1 – $\mathrm{binomFRép}(10{,}1/3{,}4)$.

8

On note S l'événement « gagner une partie ».

Il s'agit d'expériences indépendantes. On applique le principe multiplicatif.

On utilise le fait que l'événement contraire de « gagner au moins une fois » est « ne pas gagner ».

$$\begin{aligned}P(\text{« gagner au moins une fois »}) &= 1 - P(\text{« gagner aucune fois »})\\ &= 1 - P\left(\overline{\mathrm{S}}\text{-}\overline{\mathrm{S}}\text{-}\overline{\mathrm{S}}\text{-}\overline{\mathrm{S}}\text{-}\overline{\mathrm{S}}\right)\\ &= 1 - \left[P\left(\overline{\mathrm{S}}\right)\right]^5\\ &= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5\\ &= \frac{2101}{3125}\\ &= 0{,}67232\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{P(\text{« gagner au moins une fois »}) = 0{,}67232} \quad \textbf{(valeur exacte)}$$

Remarques :

★ On peut aussi parler de schéma de Bernoulli et introduire la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois où le joueur a gagné à l'issue des cinq parties mais ce n'est pas nécessaire.
Dans ce cas, on définit l'événement S : « gagner ».
L'événement contraire de S est alors l'événement $\overline{\mathrm{S}}$: « perdre ».

On a :

$$P(\mathrm{S}) = \frac{1}{5} = p$$

$$P\left(\overline{\mathrm{S}}\right) = \frac{4}{5} = q$$

★ On peut aussi définir l'événement E : « gagner au moins une fois ».

9 **Familles de cinq enfants** dans laquelle la probabilité de naissance d'une fille est de 0,45.

X : nombre de filles dans ces familles.

1°) **Loi de probabilité de X (nom et caractéristiques)**

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ (nombre d'épreuves) et $p = 0{,}45$ (probabilité d'un succès).

2°) **Espérance, variance et écart-type de X**

On applique les formules du cours donnant l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale.
On rappelle que la lettre q qui intervient dans la formule de la variance est définie par $q = 1 - p$.
Ici, on a donc : $q = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 5 \times 0{,}45 = \mathbf{2{,}25}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = npq = 5 \times 0{,}45 \times 0{,}55 = \mathbf{1{,}2375}$$

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})} = \sqrt{1{,}2375} = \mathbf{1{,}11242977...}$$

10 **V-F** constitué de 5 affirmations indépendantes

On suppose que l'élève a répondu à toutes les questions.

1°)

● **Déterminons la loi de probabilité de X.**

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{2}$ (car pour chaque réponse il y a deux choix de réponses : V ou F qui ont la même probabilité).

● **Calculons l'espérance mathématique de X.**

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

2°) N : note obtenue sur 10 (en fonction du nombre de réponses justes)

a) **Déterminons les valeurs prises par N.**

N peut prendre les valeurs – 5, – 2, 1, 4, 7, 10.
On trouve ces valeurs de manière logique (avec un arbre par exemple) selon le nombre de réponses justes :
(si l'on a 5 réponses justes, la note sera de 10, si l'on a 4 réponses justes et une réponse fausse, la note sera de $8-1=7$, etc.).

• Cette question n'a pas d'intérêt pour la suite de l'exercice.

• Il y a une autre méthode pour répondre à cette question en utilisant la question suivant où l'on établit que $N=3X-5$.
On remplace X par les différentes valeurs de X.

b) **Exprimons N en fonction de X et déduisons-en E(N).**

La note totale est donnée par :

$$\text{note}=(\text{nombre de réponses justes})\times 2+(\text{nombre de réponses fausses})\times(-1)$$

ou plus simplement :

$$\text{note}=(\text{nombre de réponses justes})\times 2-(\text{nombre de réponses fausses}).$$

Or X désigne le nombre de réponses justes au V-F.

Donc, comme il y a 5 questions, le nombre de réponses fausses est égal à $5-X$.

Donc on a :

$$\begin{aligned}N&=2X-(5-X)\\&=3X-5\end{aligned}$$

Donc $E(N)=3E(X)-5=\frac{15}{2}-5=\frac{5}{2}$.

• Attention, N ne suit pas la loi binomiale. Seule X suit une loi binomiale.
N désigne la note finale alors que X compte le nombre de réponses justes.
On ne peut donc pas calculer l'espérance et la variance de N en utilisant les formules du cours sur l'espérance et la variance d'une variable qui suit une loi binomiale.

• On utilise les formules données par une propriété du cours sur les variables aléatoires :
$E(aX+b)=a\times E(X)+b$ et $V(aX+b)=a^2\times V(X)$.

• On utilise les formules donnant l'espérance et la variance d'une variable qui suit une loi binomiale.

c) **Commentaire sur la stratégie de réponse au hasard**

L'espérance est une note moyenne que l'on peut espérer (2,5 sur 10 n'est pas une valeur atteinte).

La stratégie de réponses au hasard peut faire espérer une note de 2,5 en moyenne (sur un très grand nombre d'expériences).

Ce n'est pas une note (puisque les notes ne prennent que des valeurs entières).

11 **Loto foot (ancien jeu aussi appelé loto sportif)**

Exemple :
On choisit parmi trois cases : 1 pour la victoire de Bordeaux, 2 pour celle de Lyon et N pour un match nul.

On suppose que les résultats des matches sont indépendants et qu'il y a équiprobabilité entre les trois résultats pour chaque match. On remplit une grille (simple) au hasard.
Une grille est gagnante si elle contient au moins douze bonnes réponses.

Calculons la probabilité d'avoir une grille gagnante.

On note X le nombre de bonnes réponses total pour une grille.

X suit la loi binomiale de paramètres $n=15$ (car l'énoncé dit qu'il y a 15 matches) et $p=\frac{1}{3}$ (car il y a une chance sur 3 d'obtenir la bonne réponse pour chaque ligne).

$$\begin{aligned}P(\text{« avoir une grille gagnante »})&=P(X\geqslant 12)\\&=P(X=12)+P(X=13)+P(X=14)+P(X=15)\\&=1-P(X<12)\\&=1-P(X\leqslant 11)\end{aligned}$$

[facultatif : Avec la calculatrice, on obtient : $P(X\leqslant 11)=0,99971481\ldots$; on tape plutôt directement sur la calculatrice]

Donc $P(\text{« avoir une grille gagnante »})=0,000285108824\ldots$.

$P(\text{« avoir une grille gagnante »})\approx 0,0003$ (valeur arrondie à la quatrième décimale)

12 urne $\left|\begin{array}{l}2\text{ R}\\3\text{ N}\end{array}\right.$

boule rouge : perte de 2 €

boule noire : gain de 1 €

Un joueur réalise cette épreuve 15 fois avec remise de la boule après un tirage.

G : gain algébrique du joueur en euros

X : nombre de boules rouges obtenues au terme des quinze tirages

1°) **Exprimons G en fonction de X.**

$$\begin{aligned} G &= -2\times X+(15-X)\times(+1) \\ &= 15-3X \end{aligned}$$

2°) **Loi de probabilité, espérance et variance de X**

• X suit la loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=\frac{2}{5}$.

• $E(X)=15\times\frac{2}{5}=6$

• $V(X)=15\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$

3°) **Espérance et variance de G**

$E(G)=15-3E(X)=15-3\times 6=-3$

$V(G)=(-3)^2\times V(X)=9\times\frac{18}{5}=\frac{162}{5}$

On utilise la propriété suivante :

$E(aX+b)=aE(X)+b$

$V(aX+b)=a^2V(X)$

avec $a=-3$ et $b=15$.

13 **Tirs successifs indépendants**

1°) **Calculons la probabilité que le ballon soit intact au bout de deux tirs.**

$P($« le ballon est intact au bout de deux tirs »$)=P($« le ballon n'est pas crevé au 1er et au 2^{e} tir »$)$

$=P($« le ballon n'est pas crevé au 1er tir »$)\times P($« le ballon n'est pas crevé au 2^{e} tir »$)$

(car les tirs sont indépendants)

$=0,8\times 0,8$

$=\mathbf{0,64}$

La probabilité que le ballon soit intact au bout de deux tirs est égale à 0,64.

2°) **Calculons la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon (c'est-à-dire que le ballon soit crevé au premier tir ou au second tir).**

$P($« deux tirs suffisent pour crever le ballon »$)=1-P($« le ballon est intact au bout de deux tirs »$)$

$=1-0,64$

$=\mathbf{0,36}$

La probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon est égale à 0,36.

3°) **Calculons la probabilité pour que n tirs suffisent pour crever le ballon ($n\geqslant 1$).**

$P($« n tirs suffisent pour crever le ballon »$)=1-0,8^n$

• On donne la probabilité en fonction de n.

• On laisse la réponse en $1-0,8^n$.

• C'est une expression littérale qu'on ne peut ni calculer (ça n'aurait pas de sens) ni arranger le résultat).

La probabilité pour que n tirs suffisent pour crever le ballon est égale à $1-0,8^n$.

Remarque pour tout l'exercice :

On peut aussi utiliser la loi binomiale dans cet exercice mais ce n'est pas forcément utile.

14

X : variable aléatoire qui suit la loi de paramètres 10 (nombre d'épreuves) et 0,35 (probabilité d'un succès).

1°) On utilise le mode « fonction de la calculatrice ».

On tape tout simplement $Y1=\text{binomFdp}(10,0.35,X)$.

Pour la ligne « valeur de x » on tape directement le X des fonctions de sorte que l'on a : « valeur de x : X ».

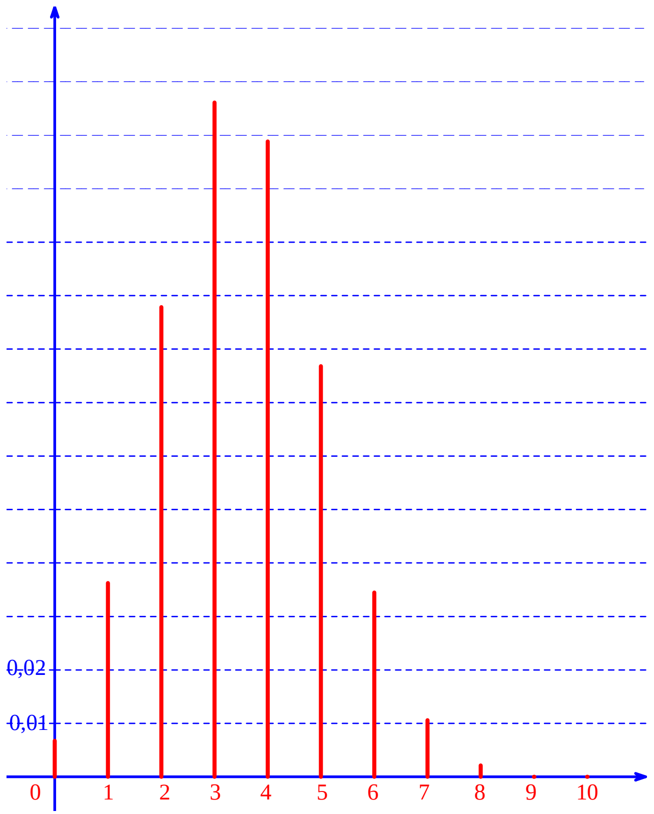
La loi de probabilité de X correspond aux valeurs de $P(X=k)$ pour tous les entiers k de 0 à 10.
Il s'agit de valeurs décimales car le paramètre p est un nombre décimal. Mais vu le grand nombre de chiffres après la virgule, on va se contenter de donner des valeurs arrondies au centième.

La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$	0,01	0,07	0,18	0,25	0,24	0,15	0,07	0,02	0,00	0,00	0,00

Les valeurs des probabilités sont arrondies au centième.

2°) Représentation graphique de la loi de probabilité de X (sous la forme d'un diagramme en bâtons)



Remarque d'une élève de 1ère S1 le 10-3-2016

Attention ce graphique est à la mauvaise échelle.

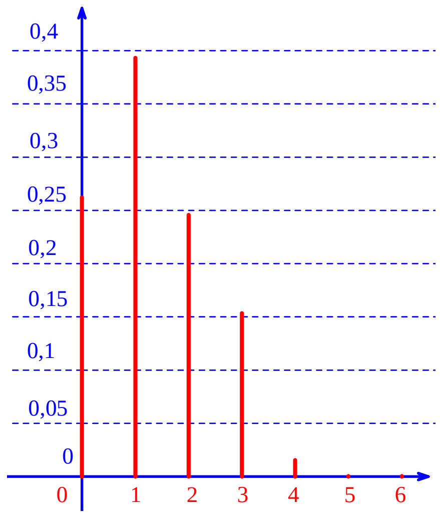
On a : $P\left(\mathrm{X}=0\right)=0,01346$. Or sur le graphique, $P\left(\mathrm{X}=0\right)\approx 0,008$ et ainsi de suite pour les autres valeurs de k.

On peut noter que $\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right)=10\times 0,35=3,5$. Cette valeur est proche de la valeur de k pour laquelle $P\left(\mathrm{X}=k\right)$ est maximale.

15

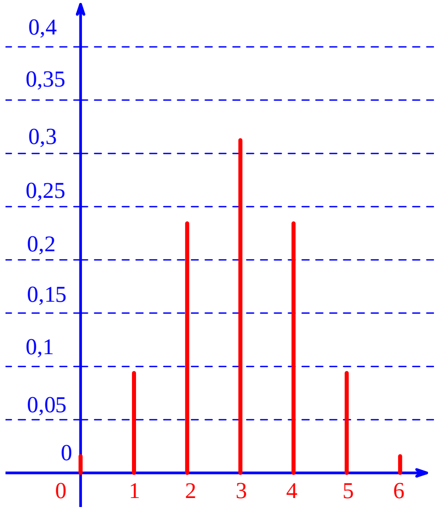
• **Loi binomiale de paramètres 6 et 0,2**

k	0	1	2	3	4	5	6
$P\left(\mathrm{X}=k\right)$	0,26214	0,39322	0,24576	0,08192	0,01536	0,00154	0,000064



• **Loi binomiale de paramètres 6 et 0,5**

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,01563	0,09375	0,23438	0,3125	0,23438	0,09375	0,01563



• **Loi binomiale de paramètres 6 et 0,8**

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,000064	0,00154	0,01536	0,08192	0,24576	0,39322	0,26214