$1^{\text{ère}}$ S Schéma de Bernoulli ; loi binomiale (2)

Dans ce chapitre, nous allons reprendre l'étude du schéma de Bernoulli en montrant comment on peut se passer d'arbres de probabilités grâce à des formules (ce qui ne veut pas dire que nous ne les utilisons plus dans certaines situations, notamment en terminale avec l'étude des probabilités conditionnelles).

I. Rappels sur le schéma de Bernoulli

1°) Définitions

● **Épreuve de Bernoulli :** expérience aléatoire dans laquelle on s'intéresse à la réalisation d'un événement S (succès) ou de son contraire $\overline{\text{S}}$ (échec).

● **Schéma de Bernoulli :** répétition d'une même épreuve de Bernoulli dans des conditions identiques indépendantes.

2°) Notations

On considère une épreuve de Bernoulli qui conduit
- soit à un succès S $\quad P(\text{S}) = p$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$ $\quad P(\overline{\text{S}}) = 1 - P(\text{S}) = 1 - p = q$

On répète n fois cette épreuve de Bernoulli dans des conditions identiques indépendantes.

Ainsi :

p désigne la probabilité d'un succès.

$q = 1 - p$ désigne la probabilité d'un échec.

n désigne le nombre d'épreuves de Bernoulli.

3°) Utilisation d'arbres de Bernoulli

Dans le chapitre précédent, on a rencontré un certain nombre de situations relevant du modèle du schéma de Bernoulli (modèle de la loi binomiale, ainsi que nous le verrons dans ce chapitre).
On avait alors privilégié une représentation en arbre qui a permis d'installer une représentation mentale efficace.
Cela a ainsi facilité la découverte de la loi binomiale pour de petites valeurs de n ($n \leqslant 4$).

4°) Objectifs du chapitre

On va progressivement abandonner les arbres (bien que ceux-ci se soient avérés très utiles pour représenter les situations de schéma de Bernoulli avec un petit nombre de répétitions) pour mettre en place une formule générale.

II. Définition des coefficients binomiaux

1°) Introduction

En reprenant les notations rappelées dans le paragraphe précédent, pour calculer la probabilité d'avoir exactement k succès, on doit noter toutes les issues formées de k succès et de $n-k$ échecs.

D'après le principe multiplicatif (épreuves indépendantes), la probabilité de chacune de ces issues est égale à $\left[P(\mathrm{S})\right]^k \times \left[P(\overline{\mathrm{S}})\right]^{n-k} = p^k \times q^{n-k}$.

2°) Notation

n est un entier naturel non nul.
k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre de Bernoulli est noté $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$ (on lit « k parmi n »).

3°) Vocabulaire

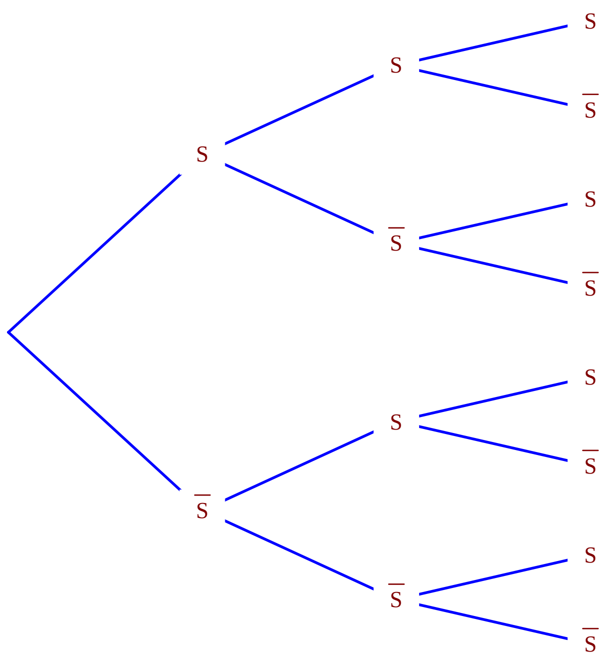
Le nombre $\binom{n}{k}$ est appelé un **coefficient binomial**.

Le nom provient d'une formule extrêmement importante qui ne sera pas étudiée au lycée donnant le développement du binôme $(a+b)^n$ pour tout couple $(a\,;b)$ de réels quelconques et pour tout entier naturel n.
De manière évidente, cette formule s'appelle la « formule du binôme ».

4°) Exemple

On prend $n=3$ et $k=2$.

$\binom{3}{2}$ est le nombre de chemins réalisant 2 succès pour 3 répétitions sur l'arbre de Bernoulli.



En faisant l'arbre de Bernoulli, on s'aperçoit qu'il y a 3 chemins correspondant à 2 succès :
S-S-$\overline{\mathrm{S}}$; S-$\overline{\mathrm{S}}$-S, $\overline{\mathrm{S}}$-S-S.

On peut donc écrire : $\binom{3}{2}=3$.

Il y a une formule générale permettant de calculer « à la main » les coefficients mais cette formule (hors programme) ne sera pas donnée cette année.

5°) Convention

On convient que $\binom{0}{0}=1$.

6°) Coefficients binomiaux particuliers

• Propriété :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{0} = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \binom{n}{1} = n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{n} = 1$

• Démonstration :

• Il y a un seul chemin pour lequel il n'y a aucun succès : le chemin $\overline{S}$-$\overline{S}$- $\overline{S}$ - … - $\overline{S}$ (avec que des échecs).

Donc $\binom{n}{0} = 1$.

• Il y a n chemins pour lesquels il y a un seul succès :

S-$\overline{S}$- $\overline{S}$ - … - $\overline{S}$; $\overline{S}$ - S - $\overline{S}$ - … - $\overline{S}$; $\overline{S}$-$\overline{S}$ - S - $\overline{S}$; … ; $\overline{S}$-$\overline{S}$-$\overline{S}$- $\overline{S}$-S

Donc $\binom{n}{1} = n$.

• Il y a un seul chemin pour lequel il y a n succès (autant de succès que d'épreuves) : le chemin S - S - S - … - S (avec que des succès).

Donc $\binom{n}{n} = 1$.

7°) Utilisation de la calculatrice

Exemple : calcul de $\binom{32}{2}$

• Numworks

Aller dans la rubrique « Calculs » puis ouvrir la « Boîte à outils » et rentrer dans le menu « Dénombrement » puis choisir binomial(n,k).
Ici, $n = 32$ et $k = 2$ donc binomial(32,2).

Calculs
Boîte à outils
Dénombrement
rentrer
binomial(n,k)

• TI

TI 83 Plus

32 $\boxed{\text{math}}$ PRB nCr 2 $\boxed{\text{entrer}}$ 496
Attention à bien mettre 32 (qui joue le rôle de n) avant 2 (qui joue le rôle de k).

TI 84 Plus

32 $\boxed{\text{math}}$ PRB Choisir 3 $\boxed{\text{Combinaison}}$ 2 $\boxed{\text{entrer}}$ 496

TI 83-Premium CE

$\boxed{\text{math}}$ PROB 3 : Combinaison $\boxed{\text{entrer}}$

ou

raccourci en utilisant la barre de fraction :

$${}_{\square}C_{\square}$$

Dans le premier « carré », on écrit la valeur de n (le plus grand des deux nombres).

Dans le deuxième « carré », on écrit la valeur de k (le plus petit des deux nombres).

Puis on appuie sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

Exemple :

$\binom{10}{3} = 120$ (affichage ${}_{10}C_3$)

Il y a 120 chemins correspondant à exactement 3 succès dans un schéma de Bernoulli à 10 épreuves.

• Casio Graph 35 +

On utilise les touches $\boxed{\text{OPTN}}$, $\boxed{\text{F6}}$, $\boxed{\text{F3}}$ (pour être dans les probabilités PROB).

32 $\boxed{\text{F3}}$ (pour avoir nCr) 2 (on aura pour affichage à l'écran 32C2) $\boxed{\text{EXE}}$ 496.

On obtient $\binom{32}{2} = 496$

Interprétation du résultat :

Il y a 496 chemins avec 2 succès dans un arbre de Bernoulli correspondant à 32 répétitions (arbre à 32 niveaux).

8°) Calcul d'un coefficient binomial « à la main »

Il est possible de calculer un coefficient binomial sans la calculatrice.
Nous admettrons la méthode de calcul qui sera étudiée plus tard en études supérieures.

• Exemples :

$$\binom{7}{4}=\frac{7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4}$$

Au numérateur, on écrit le produit des 4 entiers consécutifs décroissants à partir de 7.
Au dénominateur, on écrit le produit des 4 entiers consécutifs croissants à partir de 1.

$$\binom{15}{3}=\frac{15\times14\times13}{1\times2\times3}$$

Au numérateur, on écrit le produit des 3 entiers consécutifs décroissants à partir de 15.
Au dénominateur, on écrit le produit des 3 entiers consécutifs croissants à partir de 1.
On achève le calcul en simplifiant le plus possible.

$$\binom{15}{3}=5\times7\times13=\ldots$$

• Cas général :

Lorsque $k\geqslant1$, nous admettrons que $\binom{n}{k}=\dfrac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}{1\times2\times\ldots\times k}$ (k facteurs décroissant à partir de n au numérateur et k facteurs croissant à partir de 1 au dénominateur).

Cette formule peut aussi s'écrire avec des factorielles : $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\times(n-k)!}$.

III. Propriétés des coefficients binomiaux

1°) Énoncés

• **Formule de symétrie.** Pour tout couple $(n\,;k)$ d'entiers naturels tel que $k\leqslant n$, on a : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

• **Formule de Pascal.** Pour tout couple $(n\,;k)$ d'entiers naturels tel que $k<n$, on a : $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

2°) Exemples

$$\binom{100}{97}=\binom{100}{3}$$

$$\binom{10}{3}+\binom{10}{4}=\binom{11}{4}$$

3°) Démonstrations

• Formule de symétrie

Il y a autant de chemins réalisant k succès que k échecs.

Le nombre de chemins réalisant k succès sur n expériences est $\binom{n}{k}$.

Le nombre de chemins réalisant k échecs c'est-à-dire $n-k$ succès sur n expériences est $\binom{n}{n-k}$.

On a donc $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

• Formule de Pascal

On exprime de deux manières différentes le nombre de chemins réalisant $k+1$ succès sur $n+1$ expériences.

1ère façon : le nombre de chemins réalisant $k+1$ succès sur $n+1$ expériences est égal à $\binom{n+1}{k+1}$.

2e façon :

- soit il y a k succès pour les n premières expériences, puis un succès à la dernière expérience : cela fournit $\binom{n}{k}$ chemins.

- soit il y a $k+1$ succès pour les n premières expériences, puis un échec à la dernière expérience : cela fournit $\binom{n}{k+1}$ chemins.

On en déduit, par somme de ces nombres la formule donnée : $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

IV. Le triangle de Pascal

Pascal (1623-1652)
Traité du triangle arithmétique publié en 1654

On a déjà rencontré le triangle de Pascal lors de l'étude des identités remarquables.

1°) Principe

On reporte les coefficients $\binom{n}{k}$ dans un tableau de sorte que le coefficient se trouve sur la ligne n et dans la colonne k (on remarquera que ce coefficient existe uniquement lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$).

2°) Remplissage

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**		
0	1						
1	1	+ 1					
2	1	+ 2	+ 1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		

• Remplissage de la première colonne :

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{0} = 1$ donc il n'y a que des 1 dans la première colonne.

• Remplissage de la diagonale :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{n} = 1$ donc il n'y a que des 1 sur la diagonale.

• Remplissage des cases restantes :

On les remplit de haut en bas en utilisant la formule de Pascal.

$$\underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}_{\text{2 coefficients consécutifs de la ligne } n} = \underbrace{\binom{n+1}{k+1}}_{\text{coefficient de la ligne } n+1}$$

Exemples :

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1}$$

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \binom{3}{1}$$

On peut continuer indéfiniment.

3°) Présentation de Pascal

1 1 1 1
1 2 3
1 3
1

4°) Utilisation du triangle de Pascal

Le triangle de Pascal permet de calculer des coefficients binomiaux pour de petites valeurs de n.

V. Loi du nombre de succès

1°) Propriété (formule générale)

On considère une épreuve de Bernoulli qui conduit soit à un succès de probabilité p, soit à un échec de probabilité $1 - p = q$.

On répète n fois cette épreuve de Bernoulli dans des conditions identiques indépendantes.

$$\boxed{\forall k \in \{0\,;1\,;\ldots\,;n\} \quad P(\text{« obtenir exactement } k \text{ succès »}) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}}$$

On notera que la probabilité d'obtenir exactement k succès est égale au produit d'un nombre qui ne dépend que k et n (lié à l'arbre) par $p^k \times q^{n-k}$.

Le 5-1-2022

$$P(\text{« obtenir exactement } k \text{ succès »}) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k} \qquad (k \text{ en couleur})$$

$\boxed{k \text{ en couleur}}$

2°) Démonstration

On considère l'événement « obtenir exactement k succès parmi les n épreuves de Bernoulli ».
Les résultats qui correspondent à cet événement sont constitués de k S et $(n-k)\ \bar{\text{S}}$.
D'après le principe multiplicatif (épreuves indépendantes), la probabilité de chaque résultat est égale à $\left[P(\text{S})\right]^k \times \left[P(\bar{\text{S}})\right]^{n-k} = p^k \times q^{n-k}$.

Le nombre de résultats possibles pour cet événement est égal à $\binom{n}{k}$.

Donc $P(\text{« obtenir exactement } k \text{ succès »}) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}$.

3°) Variable aléatoire liée au schéma de Bernoulli

On reprend les notations précédentes.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des *n* épreuves de Bernoulli.

X peut prendre les valeurs 0, 1, …*n*.

Pour tout $k \in \{0\,;1\,;\ldots\,;n\}$, $(\mathrm{X}=k)$ désigne l'événement « obtenir exactement *k* succès ».

D'après la propriété du 1°), on a :

$$\boxed{\forall k \in \{0\,;1\,;\ldots\,;n\} \quad P(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}}$$

Le 5-1-2022

$$P(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k} \qquad (k \text{ en couleur})$$

$\boxed{k \text{ en couleur}}$

4°) Vocabulaire

On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres *n*** (nombre d'épreuves de Bernoulli) **et *p*** (probabilité d'un succès).

On note cette loi **B(*n* ; *p*)**.

5°) Présentation en tableau

Lorsque l'on a les valeurs de *n* et *p*, on peut donner la distribution de probabilité de X dans un tableau.
On le fait cependant assez peu car cela ne présente pas d'intérêt dans ce chapitre.

6°) Représentation graphique

Comme pour les variables aléatoires réelles définies sur un univers fini, on peut représenter la loi binomiale sous la forme d'un diagramme en bâtons.

Exemple :

Il est intéressant d'observer la forme des diagrammes en bâtons pour différentes valeurs de *n* et *p* (on peut notamment observer certaines formes de courbes en cloche).

Le 23-6-2022

Loi binomiale (diagramme en bâtons)
https://www.geogebra.org/m/FcTaeADw

VI. Exercice-type

Énoncé :

On considère une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à 0,3.

On effectue 5 lancers successifs indépendants.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de piles obtenus à l'issue des 5 lancers.

• Quelle est la loi de probabilité de X ?

Solution :

La situation étudiée relève du modèle de la loi binomiale comme cela va être expliqué.

L'épreuve « lancer la pièce » est une **épreuve de Bernoulli** modélisée par une loi de probabilité *P* qui conduit

- soit à un succès S : « la pièce tombe sur pile » $\quad P(\mathrm{S}) = 0{,}3$
- soit à un échec $\overline{\mathrm{S}}$: « la pièce tombe sur face » $\quad P(\overline{\mathrm{S}}) = 0{,}7$

On répète cette épreuve 5 fois dans des **conditions identiques indépendantes**.
Il s'agit donc d'un **schéma de Bernoulli**.

X compte le nombre de succès à l'issue des 5 lancers.

X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ (nombre d'épreuves) et $p=0{,}3$ (probabilité d'un succès).

• Calculons la probabilité d'obtenir exactement 2 piles à l'issue des 5 lancers.

Solution :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{X}=2) &= \binom{5}{2} \times (0{,}3)^2 \times (0{,}7)^3 \qquad (\text{formule avec } n=5,\ p=0{,}3 \text{ et } k=2 \text{ d'où } n-k=3) \\ &= 10 \times (0{,}3)^2 \times (0{,}7)^3 \\ &= 0{,}3087 \end{aligned}$$

• Calculons la probabilité d'obtenir au plus 2 piles à l'issue des 5 lancers.

Solution :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{X} \leqslant 2) &= P(\mathrm{X}=0) + P(\mathrm{X}=1) + P(\mathrm{X}=2) \\ &= \binom{5}{0} \times (0{,}3)^0 \times (0{,}7)^5 + \binom{5}{1} \times (0{,}3)^1 \times (0{,}7)^4 + P(\mathrm{X}=2) \\ &= 0{,}16807 + 0{,}36015 + 0{,}3087 \\ &= 0{,}83692 \end{aligned}$$

Sur calculatrice, on pourrait taper $\sum_{K=0}^{2}\binom{5}{K}\times 0{,}3^{K}\times 0{,}7^{5-K}$. On obtient le même résultat.

Nicolas Holzinger, élève de $1^{\text{ère}}$ S2, m'a dit le lundi 18-2-2019 à partir de cette idée : « On pourrait presque faire une fonction ».

• Calculons la probabilité d'obtenir au moins 2 piles.

Solution :

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 2)&=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\\&=P(X=2)+\binom{5}{3}\times(0{,}3)^{3}\times(0{,}7)^{2}+\binom{5}{4}\times(0{,}3)^{4}\times(0{,}7)^{1}+\binom{5}{5}\times(0{,}3)^{5}\times(0{,}7)^{0}\\&=0{,}3087+0{,}1323+0{,}02835+0{,}00243\\&=0{,}47148\end{aligned}$$

$$P(X\geqslant 2)\begin{cases}P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\\1-P(X<2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]\end{cases}$$

À noter :

$(X\geqslant 1)$: événement « obtenir au moins un succès »

$\overline{(X\geqslant 1)}$: événement « obtenir aucun succès »

On peut écrire $\overline{(X\geqslant 1)}=(X=0)$.

Donc $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$.

VII. Utilisation de la calculatrice pour la loi binomiale

1°) Calculs de probabilités

Dans ce paragraphe, on considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 4 (nombre d'épreuves) et 0,1 (probabilité d'un succès).

Calculatrice Numworks

On va dans Probabilités $\boxed{\text{EXE}}$.
Choisir le type de loi.
Binomiale (bi : 2 ; épreuve de Bernoulli : 2 succès)
EXE
n : nombre d'épreuves (de parties, de lancers, de roues tournés)
p : probabilité d'un succès en une épreuve (ces deux valeurs sont modifiables)
La légende est donnée en dessous.

5 pour *n*
$\frac{1}{6}$ pour *p*

Suivant (EXE)

X : nombre de succès

= (exactement aller dans le 4^e choix) on met X=2.

Les calculatrices possèdent une commande permettant de calculer directement le résultat du calcul de $P(X=...)$ et de $P(X\leqslant ....)$.
Il n'y a pas de commande pour calculer $P(X<...)$, $P(X\geqslant ....)$, $P(X>...)$ sur la calculatrice.

• TI 83 Plus

On tape : $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ (distrib).

• Calcul de $P(X=3)$.

Sélectionner binomFdp pour calculatrice en français ou binompdf pour calculatrice en anglais.
Taper (4,0.1,3) dans les deux cas puis $\boxed{\text{entrer}}$.

• Calcul de $P(X \leqslant 3)$.

Sélectionner binomFRép pour calculatrice en français ou binomcdf pour calculatrice en anglais.
Taper (4,0.1,3) dans les deux cas puis $\boxed{\text{entrer}}$.

Donc binomFdp(4,0.1,3) ou binomFRép(4,0.1,3)

4 : nombre d'épreuves 0,1 : probabilité d'un succès 3 : nombre de succès

On trouve : $P(X=3)=0{,}0036$ et $P(X \leqslant 3)=0{,}9999$.

Calculatrice TI-84 Plus avec couvercle noir

► Exemple : calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 succès

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ → distrib → $\boxed{\text{binompdf}}$ (A)

Un écran s'affiche avec marqué tout en haut : binompdf ou binomFdp.

Trials : mettre la valeur de *n* (ici 4) p : mettre la valeur de *p* (ici 0,1) Xvalue : mettre la valeur de *k* (ici 3) Paste	nbreEssais : mettre la valeur de *n* (ici 4) p : mettre la valeur de *p* (ici 0,1) valeur de x : mettre la valeur de *k* (ici 3) Coller

Appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.

Réappuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.

$\boxed{\text{2nde}}$ → $\boxed{\text{var}}$ distrib

À l'écran choisir - binomfdp
ou
- binomFRép

Trials → *n*

p → valeur de *p*

xvalue → *k*

Trials = essais

► Exemple : calculer la probabilité d'obtenir au plus 3 succès

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ → distrib → $\boxed{\text{binomcdf}}$ (B)

Un écran s'affiche avec marqué tout en haut : binompdf ou binomFdp.

Trials : mettre la valeur de *n* (ici 4)
p : mettre la valeur de *p* (ici 0,1)
Xvalue : mettre la valeur de *k* (ici 3)
Paste

Appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.
Réappuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.

La calculatrice ne fait que les « inférieur ou égal ».

On retiendra pour une calculatrice TI :

$P(X=k)$ → binomFdp(*n*,*p*,*k*) ou binompdf(*n*,*p*,*k*)

$P(X \leqslant k)$ → binomFRép(*n*,*p*,*k*) ou binomcdf(*n*,*p*,*k*)

On sépare les paramètres par des virgules (touche de virgule : au-dessus du $\boxed{7}$).

pdf est l'abréviation de *probability density* (ou *distribution*) *function.*

cdf est l'abréviation de *cumulative distribution function*.

La calculatrice ne possède pas de commande permettant de calculer directement une probabilité du type $P(X \geqslant k)$. On est obligé de passer par l'événement contraire pour se ramener à une probabilité avec $\leqslant$.

• Casio graph 35 +

Il y a deux façons possibles : la première – qui est la meilleure car la plus simple – marche pour les modèles récents, la deuxième marche quel que soit le modèle.

- $\boxed{\text{MENU}}$, choisir RUNMAT puis appuyer sur $\boxed{\text{OPTN}}$, puis choisir STAT, puis DIST, puis BINM.
On tape la formule (voir ci-dessous).

- $\boxed{\text{MENU}}$, puis choisir STAT DIST BINM Bpd ou Bcd (un peu plus compliqué)

• Calcul de $P(X=3)$.

$\boxed{\text{MENU}}$ → RUNMAT → $\boxed{\text{OPTN}}$ → $\boxed{\text{F5}}$ (STAT) → $\boxed{\text{F3}}$ (DIST) → $\boxed{\text{F5}}$ (BINM) → $\boxed{\text{F1}}$ (Bpd)
Entrer les paramètres.
Taper (3,4,0.1) (attention à l'ordre).
On obtient l'affichage BinominalPD(3,4,0.1).
Puis faire $\boxed{\text{EXE}}$.
On obtient 0,0036 (valeur exacte).

• **Calcul de $P(X \leqslant 3)$.**

MENU → RUNMAT → OPTN → F5 (STAT) → F3 (DIST) → F5 (BINM) → F2 (Bcd)
Entrer les paramètres.
Taper (3,4,0.1) (attention à l'ordre).
On obtient l'affichage BinominalCD(3,4,0.1).
Puis faire EXE .
On obtient 0,9999 (valeur exacte).

On retiendra pour une calculatrice CASIO :

$$P(X = k) \to \mathbf{Bpd}(k,n,p)$$

$$P(X \leqslant k) \to \mathbf{Bcd}(k,n,p)$$

On sépare les paramètres par des virgules.

Nous allons reprendre les calculs de l'exercice précédent en utilisant la calculatrice.

• **Calculons la probabilité d'obtenir exactement 2 piles à l'issue des 5 lancers.**

$P(X = 2) = 0{,}3087$ binompdf(5,0.3,2) ou binomFdp(5,0.3,2)

• **Calculons la probabilité d'obtenir au plus 2 piles.**

$P(X \leqslant 2) = 0{,}83692$ binomcdf(5,0.3,2) ou binomFRép(5,0.3,2)

• **Calculons la probabilité d'obtenir au moins 2 piles.**

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X \leqslant 1) \\ &= 0{,}47178 \end{aligned}$$

(On tape : 1 – binomcdf(5,0.3,1) ou 1 – binomFRép(5,0.3,1))

Dans les trois calculs, on a chaque fois obtenu avec la calculatrice la valeur exacte du résultat.

On notera que la calculatrice donne des valeurs approchées ; la dernière décimale n'est en général pas exacte.

➤ **Retenir l'utilisation de la fonction de répartition de la loi binomiale (ou fonction cumulative).**

2°) Tableau donnant une loi de probabilité binomiale

Dans ce paragraphe, on considère une variable aléatoire Z qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; 0{,}1)$.

• **TI**

Taper $f(x)$ puis taper binomFdp(4,0.1, X).

On a alors : Y1 = binomFdp(4,0.1, X).

On définit un tableau de valeurs avec un pas de 1.
On obtient le tableau suivant :

X *	Y1
0	0,6561
1	0,2916
2	0,0486
3	0,0036
4	1×10^{-4}

* Cette lettre X ne doit pas être confondue avec la notation d'une variable aléatoire (que nous avons exceptionnellement notée Z dans ce paragraphe).

Pour des valeurs de X strictement inférieures à 0 ou strictement supérieures à 4, les valeurs de la deuxième colonne sont nulles, ce qui est normal car on a considéré une variable aléatoire Z qui suit la loi binomiale de paramètres 4 et 0,1 (les valeurs prises par Z sont donc 0, 1, 2, 3, 4).

• **Casio (pour les modèles les plus récents de calculatrice Graph 35+)**

Appuyer la touche **MENU**.

Sélectionner le menu **TABLE**.

On veut saisir dans Y1 : binominalPD(X,4,0.1) (on applique la méthode du 1°) : **OPTN** etc…).

Taper **EXE** .

On choisit **SET** (touche F5).

On entre la première valeur (Start) et la dernière valeur (End) de k, ainsi que le pas, suivi de EXE .

Table Setting
X

Start : 0
End : 4
Step : 1

On choisit **TABL** (en bas de l'écran, touche F6).

Le début du tableau de valeurs s'affiche ; on obtient la suite du tableau en appuyant sur la touche ▼ du pavé directionnel.

Variante sur CASIO : obtention de la liste des probabilités

Bpd(*n*,*p*) $\rightarrow$ liste des probabilités $P(X=k)$ pour toutes les valeurs de *k*

Bcd(*n*,*p*) $\rightarrow$ liste des probabilités $P(X\leqslant k)$ pour toutes les valeurs de *k*

Cette méthode n'est pas forcément très exploitable.

Autre moyen sur CASIO en passant par MENU STAT :

Binomial P,D
Data : List
Numtrial : 10 EXE
p : 0.1 EXE
EXE (Execute)

3°) Représentation graphique d'une loi binomiale par un diagramme en bâtons

On veut représenter la loi de probabilité d'un variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,4 sous forme d'un diagramme en bâtons ou plutôt d'un diagramme à barres.

• TI 84

On utilise des listes.

Dans L1, on veut mettre la suite des entiers de 0 à 10.
Dans L2, on veut mettre les probabilités de $P(X=k)$.

On va utiliser un remplissage automatique des listes (intéressant surtout pour les grandes valeurs de *n*).

seq(K,K,0,10) $\rightarrow$ L1

On appuie sur : entrer ; on obtient une liste à l'écran écrite en accolades.

binompdf(10, 0.4, L1) $\rightarrow$ L2

On appuie sur : entrer ; on obtient une liste à l'écran écrite en accolades.

On retourne ensuite dans le menu statistiques. On observe que les listes ont bien été remplies.

On tape ensuite sur 2nde puis $f(x)$ (graph stats).
On choisit le type de graphique qui nous intéresse (diagramme en barres).

On doit régler la fenêtre :

Xmin = 0
Xmax = 10
Ymin = 0
Ymax = 0.5

On obtient un diagramme à barres. Malheureusement, les rectangles sont accolés, ce qui ne devrait pas être le cas car il ne s'agit pas d'un histogramme (dit plus familièrement, les diagrammes de la calculatrice sont « moches »).

• Casio à compléter

Menu STAT, saisir 0, 1, 2, …, *n* en liste 1 puis choisir DIST, puis BINM, Bpd et List.
Dans le Menu STAT, choisir GRPH, puis SET ; on sélectionne Hist comme type, puis List 1 en Xlist, List2 en Frequency.
On trace le diagramme avec GPH1, en choisissant Start : 0, et Width : 1.

OPTN LIST Seq(K,K,0,6,1) $\rightarrow$ F1 F1 1 (affichage : Seq(K,K,0,6,1) $\rightarrow$ List 1)

OPTN STAT DIST BINM Bpd $\rightarrow$ SHIFT 1 2 (affichage : BinominalPD(6,0.4) $\rightarrow$ List 2)

VIII. Utilisation d'un tableur

On utilise l'instruction **LOI.BINOMIALE()**. Cette « fonction » a quatre arguments.
Les trois premiers sont des entiers et le quatrième argument est une valeur logique (soit « VRAI », soit « FAUX »).
Ainsi, on écrit dans la cellule concernée (on remplace *k*, *n* et *p* par les valeurs numériques) :

• **pour *P*(X = *k*) :** **= LOI.BINOMIALE(*k* ; *n* ; *p* ; FAUX 0)** ;

• **pour *P*(X ⩽ *k*) :** **= LOI.BINOMIALE(*k* ; *n* ; *p* ; VRAI 1)** .

Si on veut calculer la probabilité $P(k_1\leqslant X\leqslant k_2)$, il suffit de calculer :
$P(X\leqslant k_2)-P(X<k_1)$, et pour calculer $P(X<k_1)$, on calcule $P(X\leqslant k_1-1)$.

On peut obtenir aisément le tableau donnant la distribution de probabilité d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale ainsi que le diagramme en bâtons correspondant.

IX. Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale

1°) Formules (admises sans démonstration)

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

• L'espérance de X est donnée par $\mathbf{E(X) = np}$.

• La variance de X est donnée par $\mathbf{V(X) = npq}$ où $q = 1 - p$.

On applique ces formules directement (il est donc inutile de poser les calculs pour une variable aléatoire qui suit la loi binomiale).

2°) Écart-type

On reprend les mêmes notations qu'au **1°)**.
L'écart-type de X est donné par $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{npq}$.

3°) Interprétation théorique

Par définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{k=n} k \times P(\mathrm{X} = k)$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{k=n} \left(k - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 \times P(\mathrm{X} = k)$$

On admet sans démonstration que :

$$\sum_{k=0}^{k=n} k \times P(\mathrm{X} = k) = np \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{k=n} \left(k - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 \times P(\mathrm{X} = k) = npq.$$

définition de l'espérance et de la variance de la variable X

4°) Interprétation concrète

On répète un très grand nombre de fois le schéma de Bernoulli.
Pour chaque schéma de Bernoulli, on calcule le nombre de succès.

Lorsque l'on répète un très grand nombre de fois le schéma de Bernoulli, on constate expérimentalement que la distribution des fréquences des nombres de succès se rapproche de plus en plus de la distribution de probabilité de la loi binomiale (« loi des grands nombres »).
On peut vérifier cette propriété en effectuant des simulations.
Par conséquent, lorsque l'on répète un très grand nombre de fois le schéma de Bernoulli,

- la moyenne du nombre de succès se rapproche de plus en plus de l'espérance de la loi binomiale ;
- la variance (et donc aussi l'écart-type) du nombre de succès se rapproche de la variance (et donc aussi de l'écart-type) de la loi binomiale.

Ainsi :

$\mathrm{E}(\mathrm{X})$ peut être interprété comme le nombre moyen de succès lorsque l'on répète un très grand nombre de fois l'expérience.

$\mathrm{V}(\mathrm{X})$ peut être interprété comme moyenne des carrés des écarts à la moyenne lorsque l'on répète un très grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

X. Réalité et modèle de la loi binomiale

1°) Exemple

On dispose d'une pièce telle que la probabilité d'obtenir pile soit égale à p.
Pour un lancer, on désigne par S l'événement : « obtenir pile » (succès).

On considère l'expérience qui consiste à lancer la pièce 4 fois.
On compte le nombre de piles c'est-à-dire le nombre de succès à l'issue des quatre lancers aléatoires (entier compris entre 0 et 4).

On répète cette expérience n fois.
On obtient un échantillon aléatoire formé par une suite de n nombres entiers compris entre 0 et 4.

On obtient une distribution de fréquences (c'est-à-dire les fréquences correspondant aux nombres 0, 1, 2, 3, 4) qui sera différente pour chaque série de n lancers. On peut la représenter à l'aide d'un diagramme en bâtons.

Lorsque l'on recommence une série de n lancers, on n'obtient pas le même échantillon aléatoire donc pas la même distribution de fréquences. C'est le phénomène de fluctuation d'échantillonnage.

Cependant, lorsque le nombre de lancers n augmente les fluctuations s'atténuent et les distributions de fréquences se stabilisent. La distribution de fréquences se rapproche de la distribution de probabilité de la loi binomiale de paramètres n et p (la fréquence de chaque nombre se rapproche de la probabilité de ce nombre avec la loi binomiale).

On peut observer ce phénomène en effectuant des simulations sur tableur. On peut alors faire apparaître sur le même graphique le digramme en bâtons de la distribution de fréquences et le diagramme en bâtons de la loi de probabilité.

Confrontation du modèle et de l'expérience :

On se place dans le cas où $p = 0,5$ (c'est-à-dire dans le cas d'une pièce non truquée).

On a réalisé une simulation de 1000 séries de 4 lancers.

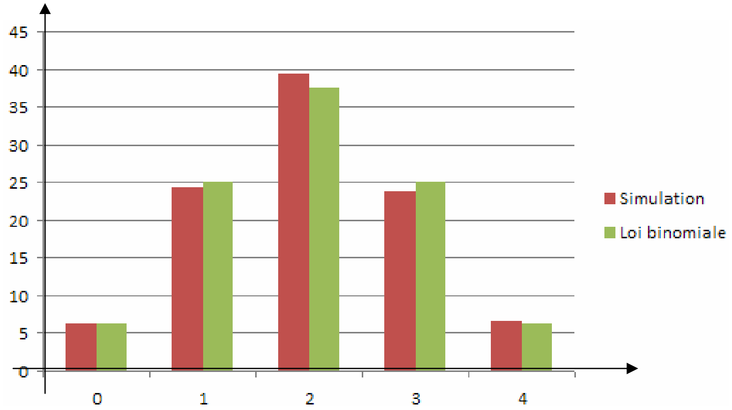
Voici les résultats obtenus (les fréquences et les probabilités sont exprimées en pourcentages).

Le modèle pour le nombre de piles est la loi binomiale de paramètres 4 et 0,5.

Nombre de piles	0	1	2	3	4	Total
Effectif	62	242	393	238	65	1000
Fréquence	6,2	24,2	39,3	23,8	6,5	100
Loi binomiale*	6,3	25,0	37,5	25,0	6,3	100

* Il s'agit de la loi binomiale de paramètres 4 et 0,5.

Superposition du diagramme en bâtons des fréquences observées et du diagramme en bâtons de la loi binomiale :



2°) Un cas où l'on adopte le modèle de la loi binomiale

Lorsque l'on effectue des tirages simultanés dans une urne qui contient un très grand nombre de boules, on peut assimiler les tirages à des tirages successifs sans remise.

XI. L'expérience de la planche de Galton

Voir site de Thérèse Éveilleau

1°) Dispositif

2°) Résultats

On peut ainsi visualiser le diagramme en bâtons d'une loi binomiale pour un paramètre *n* quelconque et $p = \frac{1}{2}$.

La planche de Galton constitue une bonne image mentale de la loi binomiale.