# Fiche sur le produit scalaire dans le plan

**Notations :**

On note $P$ l'ensemble des points du plan ;

**V** l'ensemble des vecteurs du plan.

Une unité de longueur est fixée.

## I. Définition et conséquences immédiates

### 1°) Définition (expression trigonométrique)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques de **V**.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}\right) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

### 2°) Cas particulier

A, B, C sont trois points quelconques tels que A $\neq$ B et A $\neq$ C.

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

### 3°) P.S. de 2 vecteurs colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls de **V**.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires de sens contraire} \end{cases}$$

### 4°) Signe du P.S.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques **non nuls** de **V**.

- $\vec{u} \bullet \vec{v} > 0$ si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **aigu**
- $\vec{u} \bullet \vec{v} < 0$ si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **obtus**
- $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **droit**

## II. Carré scalaire d'un vecteur

### 1°) Définition

$\vec{u}^2 = \vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

### 2°) Cas particulier

$\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

## III. Vecteurs orthogonaux

### 1°) Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de **V** sont **orthogonaux** (on note $\vec{u} \perp \vec{v}$) pour exprimer que :

- soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2}$
- soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

### 2°) Propriété

$\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

### 3°) Lieux d'orthogonalité de référence dans le plan

- Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CM} = 0$ où A, B, C sont trois points tels que A $\neq$ B : **droite** orthogonale à (AB) passant par C.

- Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$ où A et B sont deux points tels que A $\neq$ B : **cercle** de diamètre de diamètre [AB].

## IV. Expression du produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal

### 1°) Propriété

A, B, C sont trois points quelconques tels que A $\neq$ C.
On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}$.

### 2°) Généralisation

A, B, C, D sont quatre points quelconques de $P$ tels que A $\neq$ B.
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{HK}$.

## V. Propriétés du produit scalaire

### 1°) Propriétés fondamentales (symétrie et bilinéarité du produit scalaire)

$P_1$ : $\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in \mathbf{V}^2 \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$.

$P_2$ : $\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in \mathbf{V}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{u} \bullet \left(\lambda \vec{v}\right) = \lambda \left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)$

$P_3$ : $\forall \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) \in \mathbf{V}^3 \quad \vec{u} \bullet \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

### 2°) Conséquence sur les développements scalaires doubles

$$\forall \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}'\right) \in \mathbf{V}^4 \quad \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u}' + \vec{v}'\right) = \vec{u} \bullet \vec{u}' + \vec{u} \bullet \vec{v}' + \vec{v} \bullet \vec{u}' + \vec{v} \bullet \vec{v}'$$

### 3°) Identités remarquables scalaires

$$\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in \mathbf{V}^2 \quad \left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in \mathbf{V}^2 \quad \left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in \mathbf{V}^2 \quad \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

# Bilan des méthodes de calcul d'un produit scalaire

**P.S. de 2 vecteurs**

**Expression trigonométrique avec le cosinus (cas particuliers**

- vecteurs colinéaires + ou – le produit des normes
- vecteurs orthogonaux : 0)

**Projeté orthogonal**

**Décomposition de vecteurs**

**Calcul dans un repère orthonormé**

$\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'$