

1] Soit ABCD un carré de côté a . Calculer les produits scalaires

$$p_1 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} ; p_2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} ; p_3 = \overline{AB} \cdot \overline{CD} ; p_4 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}.$$

2] Soit A et B deux points tels que $AB = a$. On note I le milieu de [AB] et J le symétrique de B par rapport à A.

Calculer les produits scalaires $\overline{AB} \cdot \overline{AI} ; \overline{IA} \cdot \overline{IB} ; \overline{BA} \cdot \overline{BJ}$.

3] Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 5$ et $BC = 4$. On note I le milieu de [BC].

Calculer le produit scalaire $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$.

4] Soit A, B, C trois points tels que $AB = 4$, $AC = 6$ et $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 12$.

Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique \widehat{BAC} .

5] Soit ABCD un carré de côté a .

On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].

Faire une figure codée en prenant (AB) « horizontale », A en bas à gauche, B à droite, C et D « au-dessus » de (AB).

Démontrer en utilisant le produit scalaire que (AJ) \perp (DI).

6] Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$.

Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

7] Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$.

Déterminer le réel k tel que les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $2\vec{u} + k\vec{v}$ soient orthogonaux.

On rédigera ainsi :

« $\vec{u} + \vec{v}$ et $2\vec{u} + k\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si ».

8] Soit \mathcal{C} un cercle de diamètre [AB], C un point quelconque de \mathcal{C} et D un point quelconque de [AB].

La droite passant par D et perpendiculaire à (AB) coupe (AC) en E.

Exprimer de deux manières différentes le produit scalaire $\overline{AE} \cdot \overline{AB}$.

En déduire que l'on a : $AD \times AB = AE \times AC$.

9] Soit ABCD un parallélogramme. On pose $AB = a$ et $AD = b$.

Calculer $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$ en fonction de a et b .

10] Soit ABCD un parallélogramme.

Démontrer que l'on a : $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

11] Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a > 0$.

On note G le point défini par l'égalité vectorielle $\overline{AG} = 3\overline{AB} + 2\overline{AC}$.

Faire une figure en prenant (AB) « horizontale », A à gauche de B, C « au-dessus » de (AB). Placer alors le point G sur la figure.

Calculer AG en fonction de a sans introduire de nouveaux points.

12] Soit ABC un triangle du plan P .

On note G son centre de gravité.

On rappelle que G est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$.

1°) Démontrer que pour tout point M du plan P , on a : $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$.

2°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \cdot \overline{AB} = 0$.

On rédigera la recherche de l'ensemble E en utilisant une chaîne d'équivalences selon le modèle suivant :

$$M \in E \text{ si et seulement si } (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \cdot \overline{AB} = 0$$

si et seulement si ...

si et seulement si ...

si et seulement si ...

On pourra utiliser le symbole d'équivalence \Leftrightarrow à la place du « si et seulement si ».

On conclura ainsi :

« L'ensemble E est ... »

13] Soit ABC un triangle du plan P .

Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AM} \cdot \overline{AC}$.

14] Soit A et B deux points distincts du plan P .

Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = AB^2$.

15] Soit A et B deux points distincts du plan P .

1°) On note I et J les points définis par $\overline{IA} - 2\overline{IB} = \vec{0}$ et $\overline{JA} + 2\overline{JB} = \vec{0}$.

a) Exprimer \overline{AI} et \overline{AJ} en fonction de \overline{AB} .

b) Démontrer que pour tout point M du plan P , on a : $\overline{MA} - 2\overline{MB} = -\overline{MI}$ et $\overline{MA} + 2\overline{MB} = 3\overline{MJ}$.

2°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $MA^2 - 4MB^2 = 0$.

Indications :

- introduire des carrés scalaires ;

- factoriser en utilisant des identités remarquables ;

- introduire les points I et J.

16 Soit A et B deux points distincts du plan.

Soit D et D' deux droites perpendiculaires à (AB) . Ces droites coupent respectivement (AB) en M et N.

Soit P un point quelconque de D ; la droite (AP) coupe D' en Q.

Comparer $\overline{AB} \cdot \overline{MQ}$ et $\overline{AB} \cdot \overline{PN}$.

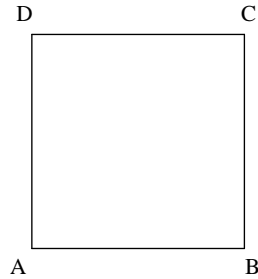
Corrigé

Rappel de notation : Le produit scalaire de deux vecteurs se note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et non $\vec{u} \times \vec{v}$.

1 Calculs de produits scalaires

$$p_1 = a^2 ; p_2 = 0 ; p_3 = -a^2 ; p_4 = -a^2$$

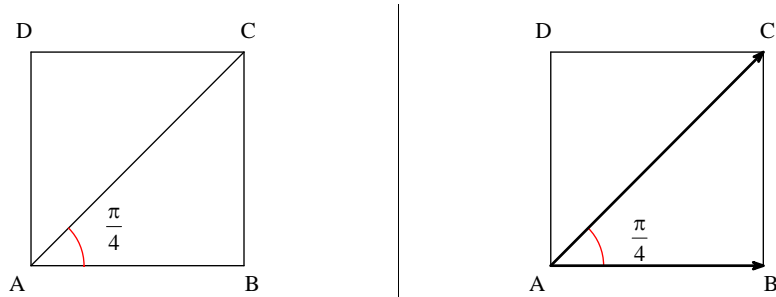
Solution détaillée :



On obtient des nombres que l'on ne cherche pas à interpréter (sauf dans le cas où l'on obtient 0) puisque le résultat d'un produit scalaire n'a pas d'interprétation « concrète » géométrique. C'est un nombre sans interprétation.

• Calcul de $p_1 = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

1^{ère} méthode : on utilise la définition du produit scalaire de deux vecteurs.



$p_1 = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ (on évite d'écrire $\cos(\vec{AB}; \vec{AC})$ qui est un peu lourd, même si c'est ce que l'on fait en physique ; on évite aussi d'utiliser des normes)

Or ABCD est un carré donc ABC est rectangle isocèle en B.

$$\text{Par suite } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}.$$

De plus, $AC = a\sqrt{2}$ (formule donnant la diagonale d'un carré).

D'où :

$$p_1 = a \times a\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ car } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$p_1 = a^2$$

2^e méthode : on utilise les projetés orthogonaux

ABCD est un carré donc $(BA) \perp (BC)$.

B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$$p_1 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$$

$$p_1 = \vec{AB}^2 \text{ (carré scalaire du vecteur } \vec{AB} \text{)}$$

$$p_1 = AB^2$$

$$p_1 = a^2$$

N.B. : On pourrait aussi projeter orthogonalement B sur la droite (AC) mais c'est un peu moins facile.

• Calcul de $p_2 = \vec{AB} \cdot \vec{BC}$

ABCD est un carré donc $(AB) \perp (BC)$.

Par suite, les vecteurs \vec{AB} et \vec{BC} sont orthogonaux.

Donc $p_2 = 0$ (le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul).

Version maladroite :

On écrit :

$$p_2 = \vec{AB} \cdot \vec{BC}$$

$$= AB \times BC \times \cos(\widehat{AB; BC})$$

L'angle géométrique $\widehat{AB; BC}$ (angle géométrique formé par les vecteurs \vec{AB} et \vec{BC}) est droit car le quadrilatère ABCD est un carré.

Donc

$$p_2 = a \times a \times \cos \frac{\pi}{2}$$

$$= a \times a \times 0$$

$$= 0$$

• Calcul de $p_3 = \vec{AB} \cdot \vec{CD}$

Comme ABCD est un carré, les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires et de sens contraires.

Donc $p_3 = -AB \times CD = -a^2$.

• Calcul de $p_4 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$

1^{ère} méthode :

$$p_4 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$$

$$p_4 = DA \times DB \times \cos(\widehat{AD, DB})$$

Il est impératif de mettre le chapeau car il s'agit d'un angle géométrique de vecteurs.

Si l'on ne met pas de chapeau, alors il s'agit d'un angle orienté de vecteurs ce qui n'est pas possible car le plan n'est pas orienté.

$$p_4 = a \times a\sqrt{2} \times \cos \frac{3\pi}{4} \quad (\widehat{AD, DB}) = \frac{3\pi}{4} \text{ obtenu par déplacement des vecteurs à une même origine}$$

$$p_4 = a \times a\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$p_4 = -a^2$$

2^e méthode :

$$p_4 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$$

$$p_4 = (-\overline{DA}) \cdot \overline{DB}$$

$$p_4 = -(\overline{DA} \cdot \overline{DB})$$

$$p_4 = -DA \times DB \times \cos \widehat{ADB}$$

$$p_4 = -a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$p_4 = -a^2$$

3^e méthode :

ABCD est un carré donc $(AD) \perp (AB)$.

A est le projeté orthogonal de B sur la droite (AD).

$$p_4 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$$

$$p_4 = \overline{AD} \cdot \overline{DA}$$

$$p_4 = -AD \times AD$$

$$p_4 = -a^2$$

Pour le calcul de $p_1 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$, voici une manière extrêmement maladroite de faire le calcul.

$$p_1 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$= \|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\| \times \cos(\overline{AB}; \overline{AC})$$

$$= a \times \sqrt{2}a^2 \times \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2a^2}{2}$$

$$= a^2$$

2 Cet exercice porte sur des calculs de produits scalaires de vecteurs colinéaires.

Pour la figure, tracer le segment [AB] horizontal avec A à gauche de B.

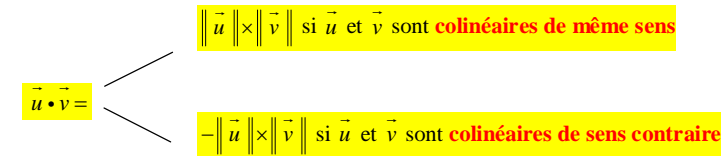
Placer I en marquant le codage.

$$\overline{AB} \cdot \overline{AI} = \frac{a^2}{2}; \quad \overline{IA} \cdot \overline{IB} = -\frac{a^2}{4}; \quad \overline{BA} \cdot \overline{BJ} = 2a^2$$

Cet exercice porte sur le calcul du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.

On utilise la propriété du cours qui permet d'écrire rapidement l'expression du produit scalaire.

\vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs quelconques non nuls.



Dans le premier cas, l'angle géométrique formé par les deux vecteurs est 0 ; son cosinus vaut 1.

Dans le deuxième cas, l'angle géométrique formé par les deux vecteurs vaut pi ; son cosinus vaut -1.

Solution détaillée :

$$AB = a$$

I : milieu de [AB]

J : symétrique de B par rapport à A



• Calcul de $\overline{AB} \cdot \overline{AI}$

I est le milieu de [AB] donc \overline{AB} et \overline{AI} sont colinéaires de même sens.

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AI} &= AB \times AI \\ &= a \times \frac{a}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

• Calcul de $\overline{IA} \cdot \overline{IB}$

I est le milieu de [AB] donc \overline{IA} et \overline{IB} sont colinéaires de sens contraires.

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \overline{IA} \cdot \overline{IB} &= -IA \times IB \\ &= -\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \\ &= -\frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

• Calcul de $\overline{BA} \cdot \overline{BJ}$

J est le symétrique A par rapport à B donc \overline{BA} et \overline{BJ} sont colinéaires de même sens.

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \overline{BA} \cdot \overline{BJ} &= BA \times BJ \\ &= a \times 2a \quad (\text{comme J est le symétrique de B par rapport à A, } BJ = 2a) \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

3 On utilise la méthode du projeté orthogonal.

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 8$$

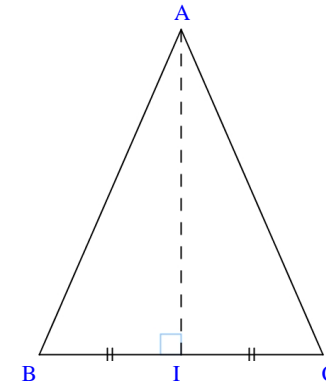
Solutions détaillée :

ABC : triangle isocèle en A

AB = 5

BC = 4

I : milieu de [BC]



Calculons $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$.

On ne connaît pas la mesure de l'angle géométrique \widehat{BAC} donc on ne va pas utiliser l'expression trigonométrique du produit scalaire (expression de définition).

On va plutôt utiliser la méthode de calcul avec les projetés orthogonaux.

ABC est un triangle isocèle en A et I est le milieu de [BC].

Donc I est aussi le pied de la hauteur issue de A.

Par conséquent, I est le projeté orthogonal de A sur (BC).

$$\text{Donc } \overline{BA} \cdot \overline{BC} = \overline{BI} \cdot \overline{BC}$$

Les vecteurs \overline{BI} et \overline{BC} sont colinéaires et de même sens (car I est le milieu de [BC]) donc

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = BI \times BC = 2 \times 4 = 8$$

Présentation simplifiée :

I est le pied de la hauteur issue de A car ABC est isocèle en A donc I est le projeté orthogonal de A sur (BC).

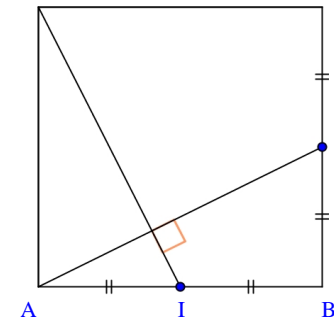
$$\begin{aligned} \overline{BA} \cdot \overline{BC} &= \overline{BI} \cdot \overline{BC} \\ &= BI \times BC \quad \text{car } \overline{BI} \text{ et } \overline{BC} \text{ sont colinéaires et de même sens} \\ &= 2 \times 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Remarques :

• Les longueurs de [AB] et [AC] ne nous servent à rien (on ne se sert pas de $AB = AC = 5$).

• On ne peut pas utiliser les longueurs BA et BC car on ne connaît pas l'angle \widehat{ABC} .

On pourrait cependant calculer le cosinus de cet angle en se plaçant dans le triangle ABI rectangle en I.
 La méthode reviendrait en fait à la méthode par le projeté orthogonal.
 On aime donc mieux éviter cette méthode.



4 Calcul d'un angle

$$\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$$

Solution détaillée :

$$AB = 4$$

$$AC = 6$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 12$$

Déterminons la mesure en radians de l'angle géométrique \widehat{BAC} .

On a : $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ (on évite l'écriture avec les normes)

$$\begin{aligned} \text{D'où } \cos \widehat{BAC} &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \times AC} \\ \cos \widehat{BAC} &= \frac{12}{4 \times 6} \\ \cos \widehat{BAC} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La mesure en radians de l'angle \widehat{BAC} est comprise entre 0 et π .

Donc $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ (car $\frac{\pi}{3}$ est le seul nombre compris entre 0 et π dont le cosinus est égal à $\frac{1}{2}$).

5 On calcule $\overline{AJ} \cdot \overline{DI}$ en décomposant les vecteurs. On montre que ce produit scalaire est nul.

Solution détaillée :

ABCD : carré de côté a
I : milieu de [AB]
J : milieu de [BC]

D

C

Démontrons que $(AJ) \perp (DI)$.

$$\begin{aligned} \overline{AJ} \cdot \overline{DI} &= (\overline{AB} + \overline{BJ}) \cdot (\overline{DA} + \overline{AI}) \quad (\text{on utilise la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs}) \\ &= \underbrace{\overline{AB} \cdot \overline{DA}}_0 + \overline{AB} \cdot \overline{AI} + \overline{BJ} \cdot \overline{DA} + \underbrace{\overline{BJ} \cdot \overline{AI}}_0 \\ &= \overline{AB} \times \overline{AI} - \overline{BJ} \times \overline{DA} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car les vecteurs } \overline{AB} \text{ et } \overline{DA} \text{ sont orthogonaux} \\ \text{car les vecteurs } \overline{BJ} \text{ et } \overline{AI} \text{ sont orthogonaux} \end{array} \right) \\ &= \frac{a}{2} \times a - \frac{a}{2} \times a \quad \left(\begin{array}{l} \text{car les vecteurs } \overline{AB} \text{ et } \overline{AI} \text{ sont colinéaires} \\ \text{car les vecteurs } \overline{BJ} \text{ et } \overline{AD} \text{ sont colinéaires de} \\ \text{et de même sens} \hspace{10em} \text{sens contraires} \end{array} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs \overline{AJ} et \overline{DI} sont orthogonaux.
 Par suite, $(AJ) \perp (DI)$.

Pour le calcul du produit scalaire $\overline{BJ} \cdot \overline{DA}$, on pourrait très bien projeter orthogonalement

Étude d'une solution fautive :

Le projeté orthogonal du point J sur (AB) est le point B.
 Le projeté orthogonal du point D sur (AB) est le point A.

Cette méthode n'est pas applicable car la droite (AB) ne supporte aucun des deux vecteurs qui interviennent dans le produit scalaire $\overline{AJ} \cdot \overline{DI}$.

Autre façon fautive dans la même veine :

On ne peut pas projeter sur \overline{AJ} sur la droite (AB) et \overline{DI} sur la droite (AD).

L'outil du produit scalaire se montre particulièrement efficace pour résoudre ce type de problème.

On utilise vraiment le produit scalaire comme un outil.

L'idée générale de la décomposition :

On remplace un produit scalaire par un autre produit scalaire qui lui est égal, plus compliqué que l'on développe ensuite par bilinéarité (en « distribuant »).

À aucun moment on ne remplace les vecteurs par des nombres (leurs normes).

Comme souvent en mathématiques, on est obligé de compliqué pour obtenir quelque chose de plus simple.

On retiendra la structure :

$$\vec{AJ} \cdot \vec{DI} = (\vec{\dots} + \vec{\dots}) \cdot (\vec{\dots} + \vec{\dots})$$

$$= \vec{\dots} \cdot \vec{\dots} + \vec{\dots} \cdot \vec{\dots} + \vec{\dots} \cdot \vec{\dots} + \vec{\dots} \cdot \vec{\dots}$$

Difficulté pour les élèves : 3 opérations qui se mêlent (le produit scalaire, l'addition et la multiplication par un réel), pas évident pour les élèves (cf. [5]).

Retenir la structure du [5] :

$$\vec{AJ} \cdot \vec{DI} = (\vec{\dots} + \vec{\dots}) \cdot (\vec{\dots} + \vec{\dots}) \quad (\text{on décompose chaque vecteur, on reste en vecteurs})$$

$$= \vec{\dots} \cdot \vec{\dots} + \vec{\dots} \cdot \vec{\dots} + \vec{\dots} \cdot \vec{\dots} + \vec{\dots} \cdot \vec{\dots} \quad (\text{on développe ; on reste en vecteurs})$$

$$= \dots + \dots + \dots + \dots = \quad (\text{on calcule chaque produit scalaire})$$

[6] $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{6}$

Solution détaillée :

$$\|\vec{u}\| = 1$$

$$\|\vec{v}\| = 3$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$$

Calculons $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

On va utiliser la propriété du produit scalaire d'un vecteur.
Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme.

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ est le carré de la norme de $\vec{u} + \vec{v}$.

$(\vec{u} + \vec{v})^2$ est le carré scalaire du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2$$

$$= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad (\text{on applique l'identité remarquable scalaire})$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$= 1^2 + 2 \times (-2) + 3^2$$

$$= 1 - 4 + 9$$

$$= 6$$

Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{6}$.

Solution fausse : $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Cette égalité est fautive ; la norme d'une somme n'est pas égale à la somme des normes.

[7] On traduit l'orthogonalité des deux vecteurs en disant que le produit scalaire est nul. On trouve : $k = -3$.

Solution détaillée :

$$\|\vec{u}\| = 5$$

$$\|\vec{v}\| = 4$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$$

Déterminons k tel que les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $2\vec{u} + k\vec{v}$ soient orthogonaux.

On raisonne par chaîne d'équivalences.

On peut remplacer le « si et seulement si » par la double flèche \Leftrightarrow .

$$\vec{u} + \vec{v} \text{ et } 2\vec{u} + k\vec{v} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + k\vec{v}) = 0^*$$

$$\text{si et seulement si } \vec{u} \cdot (2\vec{u}) + \vec{u} \cdot (k\vec{v}) + \vec{v} \cdot (2\vec{u}) + \vec{v} \cdot (k\vec{v}) = 0^{**}$$

$$\text{si et seulement si } 2(\vec{u} \cdot \vec{u}) + k(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{u}) + k(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 0$$

$$\text{si et seulement si } 2\vec{u}^2 + k(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + k\vec{v}^2 = 0$$

$$\text{si et seulement si } 2 \times 25 + 2k + 4 + 16k = 0$$

$$\text{si et seulement si } 18k = -54$$

$$\text{si et seulement si } k = -3$$

* Les parenthèses sont obligatoires : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + k\vec{v}) = 0$.

parenthèses obligatoires

Il n'y a pas véritablement de priorité.

** On développe en utilisant la bilinéarité du produit scalaire.

8 Solution détaillée :

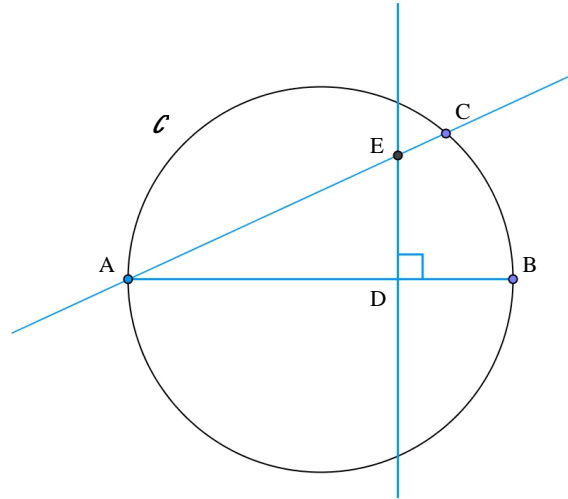
Pour la figure, on prendra le segment [AB] « horizontal », le point A « à gauche » de B et C « au-dessus » de la droite (AB). On n'est pas obligé de placer le centre du cercle.

\mathcal{C} : cercle de diamètre [AB]

$C \in \mathcal{C}$

$D \in [AB]$

La droite passant par D et perpendiculaire à (AB) coupe (AC) en E.



Démontrons que $AD \times AB = AE \times AC$.

Pour cela, nous allons exprimer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

1^{ère} manière :

Par hypothèse, on sait que $(DE) \perp (AB)$ et que $D \in (AB)$.

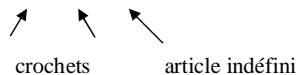
Donc le point D est le projeté orthogonal de E sur la droite (AB).

Par conséquent, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$

= $AD \times AB$ car les vecteurs \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires et de même sens.

2^e manière :

Par hypothèse, on sait que $C \in \mathcal{C}$ et que le segment [AB] est un diamètre de \mathcal{C} , donc le triangle ABC est rectangle en C.



(Attention à l'article « un » et aux crochets pour noter le segment car le mot diamètre est ici pris au sens de « segment » ; de même, il est important de donner la précision ABC rectangle en C).

On en déduit que C est le projeté orthogonal de B sur (AE).

Par conséquent : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$

= $AC \times AE$ car les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AE} sont colinéaires et de même sens.

On met en relation les deux expressions obtenues du produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

D'après ce qui précède, on a $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = AD \times AB$ et $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = AE \times AC$.

On en déduit que $AD \times AB = AE \times AC$.

Il s'agit d'une relation métrique, c'est-à-dire d'une égalité concernant des longueurs.

Autre méthode (sans utiliser le produit scalaire, en utilisant les cosinus) :

On exprime le cosinus de l'angle \widehat{A} de deux manières différentes en se plaçant dans deux triangles rectangles.

On écrit :

$$\cos \widehat{EAD} = \frac{AD}{AE}$$

$$\cos \widehat{CAB} = \frac{AC}{AB}$$

Donc $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$ d'où $AD \times AB = AE \times AC$.

9 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = b^2 - a^2$

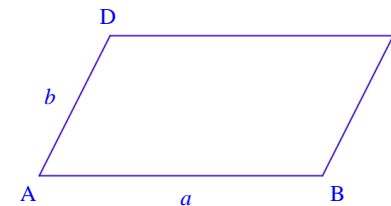
Solution détaillée :

ABCD : parallélogramme

$AB = a$

$AD = b$

On commence par faire une figure. La disposition à adopter est : (AB) « horizontale », A « à gauche » de B, C et D « au-dessus » de (AB).



Calculons $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$ en fonction de a et de b .

On n'est pas obligé de tracer les vecteurs \overline{AC} et \overline{BD} sur la figure.

Méthode : on décompose les vecteurs.

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$ d'après la règle du parallélogramme.

$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = -\overline{AB} + \overline{AD}$ (relation de Chasles)

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = (\overline{AB} + \overline{AD}) \cdot (\overline{AD} - \overline{AB})$$

On utilise l'égalité du parallélogramme $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$

$$= (\overline{AD} + \overline{AB}) \cdot (\overline{AD} - \overline{AB})$$

$$= \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 \quad (\text{On applique l'identité remarquable } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}))$$

$$= AD^2 - AB^2 \quad (\text{En effet, } \overline{AD}^2 = AD^2 \text{ et } \overline{AB}^2 = AB^2)$$

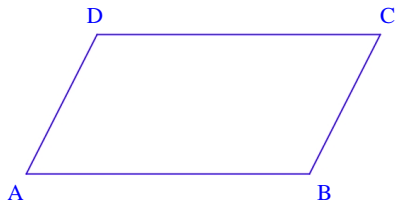
$$= b^2 - a^2$$

Le carré scalaire du vecteur \overline{AD} est égal au carré de la distance AD.

10 Égalité d'Appolonius

ABCD : parallélogramme

Faire une figure (on prendra la droite (AB) « horizontale », A à gauche de B, C et D « au-dessus » de (AB), l'angle \widehat{BAD} aigu).



Démontrons que $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

Même méthode que dans l'exercice précédent.

Idée : $AC^2 + BD^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{AD})^2 + (\overline{BA} + \overline{BC})^2 = (\overline{AB} + \overline{AD})^2 + (-\overline{AB} + \overline{AD})^2 = \dots$

On développe en utilisant les identités remarquables scalaires.

$$AC^2 + BD^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$$

$$= (\overline{AB} + \overline{AD})^2 + (\overline{BA} + \overline{BC})^2 \quad (\text{car } \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} \text{ d'après la règle du parallélogramme})$$

$$= (\overline{AB} + \overline{AD})^2 + (-\overline{AB} + \overline{AD})^2 \quad (\text{car } \overline{BA} = -\overline{AB} \text{ et } \overline{AD} = \overline{BC}, \text{ ABCD étant un parallélogramme})$$

$$= \overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AD}^2$$

$$= 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2$$

$$= 2AB^2 + 2AD^2$$

$$= 2(AB^2 + AD^2)$$

Le résultat de l'égalité d'Appolonius peut s'énoncer ainsi :

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs de tous les côtés.

Il s'agit d'une relation métrique dans un parallélogramme.

Le produit scalaire est un très bon moyen d'établir des relations métriques.

11 Calcul de longueur

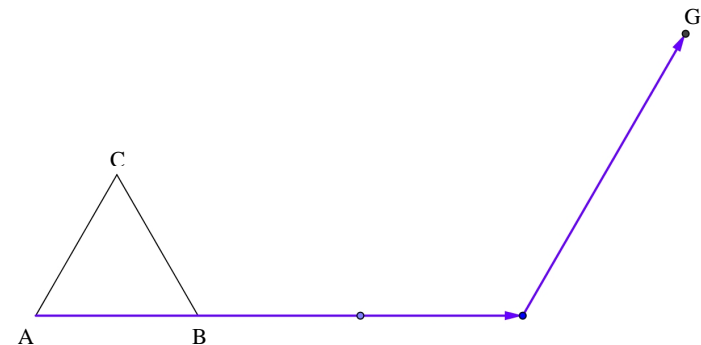
Cet exercice montre l'utilisation de l'outil produit scalaire pour calculer une longueur.

Par égalité de position, on a : $\overline{AG} = 3\overline{AB} + 2\overline{AC}$; on calcule \overline{AG}^2 ; on trouve : $AG = a\sqrt{19}$.

Solution détaillée :

ABC : triangle équilatéral de côté a

$$\overline{AG} = 3\overline{AB} + 2\overline{AC}$$



Calculons AG en fonction de a.

On ne peut pas écrire $AG = 3AB + 2AC$ (cf. explication ci-dessous).

Par contre, on va pouvoir utiliser les carrés scalaires en écrivant $AG^2 = \overline{AG}^2$.

On va « mettre au carré » le vecteur \overline{AG} ; autrement dit, on calcule le carré scalaire du vecteur \overline{AG} .

$$\begin{aligned}\overline{AG}^2 &= (3\overline{AB} + 2\overline{AC})^2 \\ &= 9\overline{AB}^2 + 2 \times [(3\overline{AB}) \cdot (2\overline{AC})] + 4\overline{AC}^2 && \text{(identité remarquable scalaire)} \\ &= 9AB^2 + 12\overline{AB} \cdot \overline{AC} + 4AC^2 \\ &= 9AB^2 + 12 \times AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{3} + 4AC^2 \\ &= 9a^2 + 12a^2 \times \frac{1}{2} + 4a^2 \\ &= 19a^2\end{aligned}$$

Donc : $AG = a\sqrt{19}$ (car $a > 0$).

Solution tentante mais complètement fautive :

$$\|\overline{AG}\| = \|3\overline{AB} + 2\overline{AC}\| = \|3\overline{AB}\| + \|2\overline{AC}\| = 3\|\overline{AB}\| + 2\|\overline{AC}\| = 3a + 2a = 5a$$

En effet, si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs, en général, on a : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Cet exercice montre l'intérêt du produit scalaire pour calculer des distances. Le produit scalaire est un outil de calcul (de longueurs et d'angles).

Les exercices **12** à **15** portent sur la recherche d'ensembles de points définis à l'aide du produit scalaire (il s'agit de recherche de **lieux géométriques**).

Dans tous les cas, on se ramène à un produit scalaire nul.

On reconnaît alors un **lieu géométrique d'orthogonalité de référence**.

12 Recherche d'un ensemble de points

1°) **Démontrons que pour tout point M du plan P, on a : $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$.**

$$\begin{aligned}\forall M \in P \quad \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} &= \overline{MG} + \overline{GA} + \overline{MG} + \overline{GB} + \overline{MG} + \overline{GC} && \text{(relation de Chasles)} \\ &= 3\overline{MG} + \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}\end{aligned}$$

Or G est le centre de gravité du triangle ABC.

L'énoncé rappelle que G est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$.

On en déduit que $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$.

2°) **Déterminons l'ensemble $E = \{M \in P / (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \cdot \overline{AB} = 0\}$.**

Cette notation se lit : « E est l'ensemble ($E = \{\dots\}$) des points M du plan P ($M \in P$) tels que (/)

$$(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \cdot \overline{AB} = 0.$$

On fait trois étapes.

On réduit la somme vectorielle en un seul vecteur.

1^{ère} partie : réduction de la somme vectorielle

D'après la question 1°),

$\forall M \in P \quad \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$ (on n'intercale pas de texte comme « on a » entre le quantificateur et l'égalité)

2^e partie : chaîne d'équivalences

Soit M un point quelconque du plan P.

$M \in E$ si et seulement si $(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \cdot \overline{AB} = 0$

si et seulement si $(3\overline{MG}) \cdot \overline{AB} = 0$

si et seulement si $3(\overline{MG} \cdot \overline{AB}) = 0$ (on applique la règle du cours : $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$)

si et seulement si $\overline{MG} \cdot \overline{AB} = 0$

si et seulement si $\overline{MG} \perp \overline{AB}$ (on peut aussi s'arrêter à la ligne d'avant)

On ne peut écrire : $(MG) \perp (AB)$.

En effet, lorsque $M = G$, la droite (MG) n'existe pas.

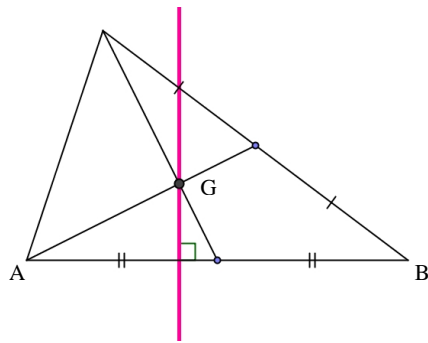
3^e partie : conclusion ; identification de l'ensemble

E est la droite passant par G et qui est perpendiculaire à (AB).

[On exprime la conclusion de la manière la plus claire, la plus concise possible, sans parler du point M.]

On fait une figure en prenant la disposition habituelle des sommets d'un triangle quelconque : (AB) horizontale, A à gauche de B et C au-dessus.

C E



On ne fait pas figurer le point M sur la figure.
On marque l'angle droit par un codage.

13 Recherche d'un ensemble de points

L'ensemble E est la droite passant par A perpendiculaire à (BC).

Solution détaillée :

ABC : triangle

Déterminons l'ensemble $E = \{M \in P / \overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AM} \cdot \overline{AC}\}$.

On rédige par chaîne d'équivalences.

Soit M un point quelconque du plan P .

- $M \in E$ si et seulement si $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AM} \cdot \overline{AC}$
- si et seulement si $\overline{AM} \cdot \overline{AB} - \overline{AM} \cdot \overline{AC} = 0$ (attention, c'est bien 0 et pas $\vec{0}$)
- si et seulement si $\overline{AM} \cdot (\overline{AB} - \overline{AC}) = 0$
- si et seulement si $\overline{AM} \cdot \overline{CB} = 0$ *
- si et seulement si $\overline{AM} \perp \overline{CB}$ (\perp : symbole d'orthogonalité pour les vecteurs)**

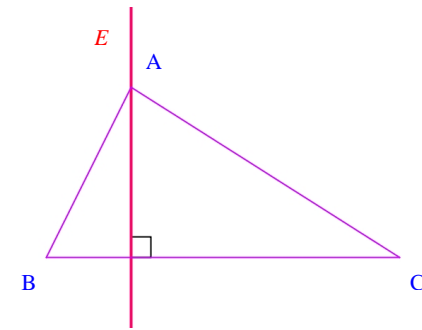
* $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{CA} = \overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}$ (on peut aussi dire que c'est la forme soustractive de la relation de Chasles)

** Cette ligne est facultative.

Conclusion :

E est la droite passant par A perpendiculaire à (BC).

On peut aussi dire que E est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On fait une figure et on trace l'ensemble E en rouge.
On fait figurer le nom de l'ensemble E à côté.



On fait figurer le codage de l'angle droit.

14 Recherche d'un ensemble de points

L'ensemble E est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

Solution détaillée :

A ≠ B

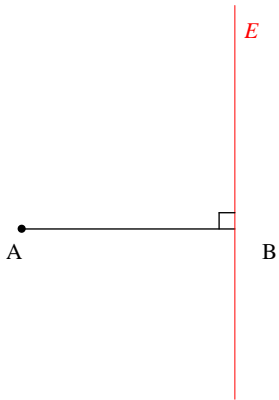
Déterminons l'ensemble $E = \{M \in P / \overline{AM} \cdot \overline{AB} = AB^2\}$.

Soit M un point quelconque du plan P .

- $M \in E$ si et seulement si $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = AB^2$
- si et seulement si $\overline{AM} \cdot \overline{AB} - \overline{AB}^2 = 0$
- si et seulement si $\overline{AM} \cdot \overline{AB} - \overline{AB} \cdot \overline{AB} = 0$
- si et seulement si $\overline{AB} \cdot (\overline{AM} - \overline{AB}) = 0$
- si et seulement si $\overline{AB} \cdot \overline{BM} = 0$
- si et seulement si $\overline{AB} \perp \overline{BM}$

E est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

Faire une figure en prenant (AB) horizontale, A à gauche de B.
Tracer l'ensemble E en rouge.
Marquer le codage d'orthogonalité.



On fait figurer le codage de l'angle droit.

15 Recherche d'un ensemble de points

Solution détaillée :

$$1^\circ) \quad \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad (1) \qquad \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0} \quad (2)$$

a) **Exprimons \overrightarrow{AI} et \overrightarrow{AJ} en fonction de \overrightarrow{AB} .**

(1) équivaut successivement à :

$$\overrightarrow{IA} - 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ (I est donc le symétrique de A par rapport à B)

(2) équivaut successivement à :

$$\overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$-3\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

b)

• **Démontrons que $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$.**

$$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$= -\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}$$

$$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$$

• **Démontrons que $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MJ}$.**

$$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$= 3\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB}}_{\vec{0}}$$

$$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MJ}$$

2°) **Déterminons l'ensemble $E = \{M \in P / MA^2 - 4MB^2 = 0\}$.**

Soit M un point quelconque du plan P.

$$M \in E \text{ si et seulement si } MA^2 - 4MB^2 = 0$$

$$\text{si et seulement si } \overrightarrow{MA}^2 - 4\overrightarrow{MB}^2 = 0 \quad (\text{on passe des distances aux carrés scalaires de vecteurs})$$

$$\text{si et seulement si } (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = 0$$

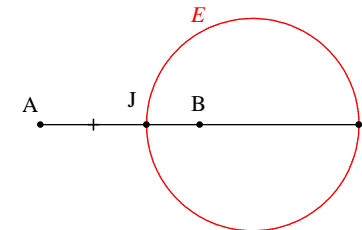
$$\text{si et seulement si } (-\overrightarrow{MI}) \cdot (3\overrightarrow{MJ}) = 0$$

$$\text{si et seulement si } -3(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}) = 0$$

$$\text{si et seulement si } \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\text{si et seulement si } \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}$$

L'ensemble E est le cercle de diamètre [IJ].



Pour construire E, on place le milieu de [IJ].

Bilan des exercices 11 à 15 :

On ne parle pas du point M dans la conclusion.

On répond d'une manière sèche : « E est la droite / le cercle ... » ou « L'ensemble E est la droite / le cercle ... ».

On bannit complètement des formulations idiotes telles que « L'ensemble E des points M est ... » qui n'ont aucun sens.

16 Hypothèses : A et B deux points distincts du plan.

$$D \perp (AB) \text{ et } D' \perp (AB)$$

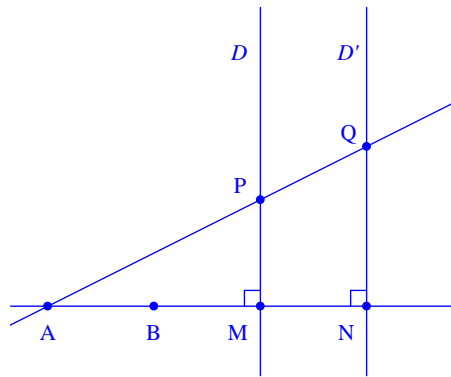
$$D \cap (AB) = \{ M \} ; D' \cap (AB) = \{ N \}$$

$$P \in D$$

$$(AP) \cap D' = \{ Q \}$$

Faire une figure.

Marquer le codage des angles droits.



Comparons $\overline{AB} \cdot \overline{MQ}$ et $\overline{AB} \cdot \overline{PN}$.

$$\overline{AB} \cdot \overline{MQ} = \overline{AB} \cdot \overline{MN} \quad (\text{car le projeté orthogonal de Q sur (AB) est N})^*$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{PN} = \overline{AB} \cdot \overline{MN} \quad (\text{car le projeté orthogonal de P sur (AB) est M})^{**}$$

On en déduit que $\overline{AB} \cdot \overline{MQ} = \overline{AB} \cdot \overline{PN}$.

* et **: Il est possible de dire que le projeté orthogonal du vecteur \overline{MQ} sur la droite (AB) est le vecteur \overline{MN} et que le projeté orthogonal du vecteur \overline{PN} sur la droite (AB) est le vecteur \overline{MN} .

Autres formulations possibles :

① Le vecteur \overline{MQ} a pour projeté orthogonal \overline{MN} sur la droite (AB).

Le vecteur \overline{PN} a pour projeté orthogonal \overline{MN} sur la droite (AB).

② Le vecteur \overline{MQ} se projette orthogonalement en \overline{MN} sur la droite (AB).

Le vecteur \overline{PN} se projette orthogonalement en \overline{MN} sur la droite (AB).

Fait avec Carolone Ekima (Blanche de Castille le samedi 22 mars 2014)

Elle :

Comparer : il faut dire quel est le plus petit ? quel est le plus grand ?

Il faut forcément les calculer ?

Moi :

Je dirais plutôt qu'il faut transformer leur expression.

Attention, pour les projetés, on dit bien « projeté orthogonal sur (AB) » et non sur (MN) (car on parle de la droite portée par le vecteur que l'on conserve).

Classification des exercices par compétences

Calculer un produit scalaire en utilisant la définition	1 et 2
Calculer un produit scalaire en utilisant la propriété de projection orthogonale*	3 , 8 , 16
Calculer un angle en utilisant un produit scalaire	4
Calculer la longueur d'un segment ou la norme d'un vecteur à l'aide du produit scalaire	6 et 11
Démontrer que deux droites sont perpendiculaires à l'aide du produit scalaire	5
Exprimer que deux vecteurs sont orthogonaux à l'aide du produit scalaire	7
Calculs de produits scalaires en utilisant des décompositions de vecteurs	9 et 10
Recherche d'ensembles de points définis par un produit scalaire	12 , 13 , 14 , 15

* Comprendre la notion de « projeté orthogonal ».