1ère S

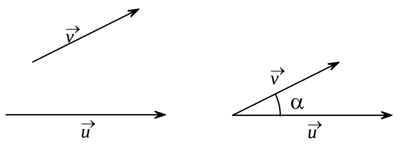
Le produit scalaire dans le plan

Une unité de longueur est fixée dans tout le chapitre.

I. Définition et conséquences immédiates

1°) Définition (expression trigonométrique)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques du plan.



Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (on lit « $\vec{u}$ **scalaire** $\vec{v}$ ») ainsi défini :

1er cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls

α est la mesure en radians de l'angle géométrique $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ ($\alpha \in [0\,;\pi]$).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$$

2e cas : l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

On notera que l'angle géométrique de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls apparaît sur une figure à partir du moment où on les a représentés à partir de la même origine.
Il s'agit d'un angle saillant dont la mesure en degrés est comprise entre 0 et 180 et dont la mesure en radians est comprise entre 0 et π.

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on retient la formule du produit scalaire sous la forme :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right).$$

On dit qu'il s'agit de l'« expression trigonométrique du produit scalaire » parce que l'on a un cosinus dans la formule.

Attention à la notation de l'angle géométrique : chapeau et parenthèses.

2°) Lien avec la physique : travail d'une force

Par définition, le **travail d'une force** constante $\vec{F}$ qui s'exerce en un point sur un trajet rectiligne de A à B est donné par la formule $\boxed{W_{A \to B}\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}}$.

Ainsi, on a : $W_{A \to B}\left(\vec{F}\right) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{F}\,;\overrightarrow{AB}}\right)$ (on suppose que $\vec{F} \neq \vec{0}$).

Du point de vue des unités, le travail d'une force est exprimé en joules sachant que la norme de $\vec{F}$ est exprimée en newtons et la distance AB en mètres.

C'est la seule interprétation « concrète » du produit scalaire que nous donnerons.

3°) Quelques points à noter

La définition du produit scalaire ne manque pas de surprendre de prime abord.

Comme dans tout chapitre, il est légitime de se poser un certain nombre de questions :

- À quoi ça sert ?
- Quelles sont les propriétés ?
- Qu'est-ce que ça représente ?
- Comment va-t-on calculer un produit scalaire ?

La suite du cours va apporter des réponses à toutes ces questions.

On peut noter dès le début de ce chapitre que :

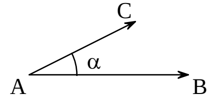
- Le produit scalaire n'a pas d'interprétation « concrète » ; c'est l'une des difficultés du chapitre.
Le produit scalaire de deux vecteurs est une quantité numérique attachée à deux vecteurs qui n'a pas d'interprétation géométrique. En général, il n'y a pas de moyen simple de vérifier les résultats.

- Il est possible d'obtenir la valeur du produit scalaire de deux vecteurs grâce à un logiciel de géométrie.

Néanmoins, le produit scalaire va s'avérer être un outil puissant de démonstration, comme nous le verrons en exercices :
- outil pour démontrer des résultats d'orthogonalité ;
- outil pour calculer des distances et des angles.

4°) Cas où les vecteurs sont définis par des points et ont la même origine

A, B, C sont trois points quelconques tels que A ≠ B et A ≠ C.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \alpha$$

ou mieux :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}}$$

5°) Exercice

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

D'après les valeurs des normes, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

On applique donc la formule de définition.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) \\ &= 4 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 4 \times 5 \times \frac{1}{2} \\ &= 10\end{aligned}$$

Problème des unités :

Le problème de l'unité d'un produit scalaire ne se pose pas.
Cependant, on peut dire que $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ étant exprimées dans la même unité de longueur, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est exprimé dans l'unité de longueur au carré (comme une aire) ; l'usage veut cependant qu'on ne l'écrive pas.

Pour nous, le produit scalaire sera un nombre sans unité.

II. Propriétés déduites de la définition

1°) Symétrie du P.S.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$$

Démonstration :

La démonstration est très facile.

• La propriété est évidente lorsqu'au moins l'un des deux vecteurs est nul.

• On suppose donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}\right)$$
$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}}\right)$$

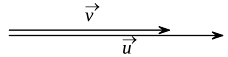
On utilise la propriété de la multiplication des réels et le fait que $\left(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

2°) P.S. de 2 vecteurs colinéaires

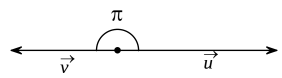
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$

- $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de même sens**
  (car $\left(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}\right) = 0$ et $\cos 0 = 1$)



- $-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de sens contraire**
  (car $\left(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}\right) = \pi$ et $\cos \pi = -1$)



Application : vecteurs colinéaires définis par des points

A, B, C sont des points alignés tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.

• Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$.

• Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$.

A, B, C, D sont des points alignés tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

• Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD$.

• Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD$.

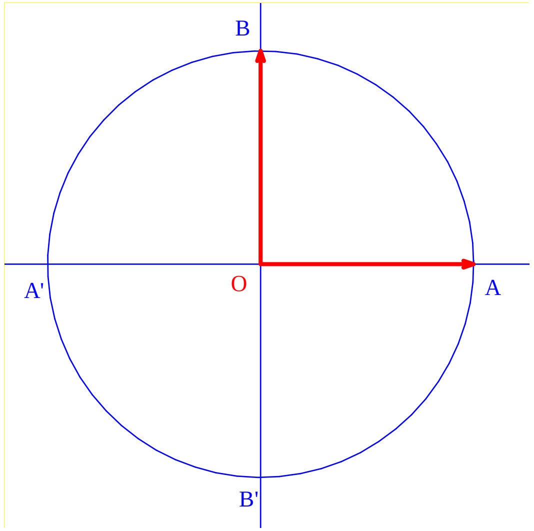
3°) Signe du P.S.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls quelconques.
$\left(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}\right) = \alpha$ ($\alpha \in [0\,;\pi]$)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \underbrace{\|\vec{u}\|}_{>0} \times \underbrace{\|\vec{v}\|}_{>0} \times \cos \alpha$$

Le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le même que celui de $\cos \alpha$.

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$	$+$	0	$-$



Propriété :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ si et seulement si $\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})}$ est **aigu**
- $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ si et seulement si $\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})}$ est **obtus**
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ si et seulement si $\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})}$ est **droit**

Cette propriété permet éventuellement de vérifier le signe d'un produit scalaire.

En physique, suivant le signe du travail d'une force, on parle de travail moteur lorsqu'il est positif et de travail résistant lorsqu'il est négatif.

Application : signe d'un produit scalaire de deux vecteurs ayant la même origine

A, B, C sont trois points quelconques du plan tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.

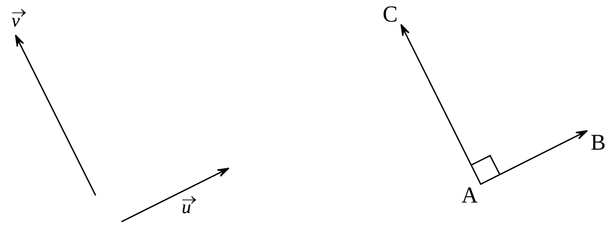
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$ si et seulement si l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$ si et seulement si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ si et seulement si l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

III. Produit scalaire et orthogonalité

1°) Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** (on note $\vec{u}\perp\vec{v}$) pour exprimer que :

- soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})}=\frac{\pi}{2}$;



- soit $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$

On retiendra que par convention le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

2°) Propriété (déduite de l'étude du signe du produit scalaire)

Le produit scalaire sert à caractériser l'orthogonalité.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Attention c'est bien 0 et pas $\vec{0}$.

3°) Remarques

• Emploi de l'adjectif « orthogonal » :

L'adjectif « orthogonal » s'applique à deux droites, deux vecteurs, deux directions.

• Notations

On utilise le même symbole pour des vecteurs que pour des droites : $\vec{u}\perp\vec{v}$.

4°) Erreur à ne pas faire

~~Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, alors $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$.~~

P : $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$

Q : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$P \Rightarrow Q$ <u>mais</u> $Q \not\Rightarrow P$

5°) Utilisation

A, B, C, D sont quatre points tels que A $\neq$ B et C $\neq$ D.

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = 0$ si et seulement si (AB) $\perp$ (CD).

IV. Carré scalaire d'un vecteur

1°) Définition

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque.
On note $\vec{u}^{\,2} = \vec{u} \bullet \vec{u}$.
On dit qu'il s'agit du **carré scalaire** de $\vec{u}$.

2°) Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$.

Attention, contrairement à la physique, on n'écrira pas : $\|\vec{u}\| = u$ ni $\|\vec{u}\|^2 = u^2$.
(Le *u* sans flèche ne signifie rien.)

On retiendra :

$$\boxed{\vec{u}^{\,2} = \vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$$

3°) Démonstration

1er cas : $\boxed{\vec{u} \neq \vec{0}}$

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\underbrace{\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{u}}\right)}_{0}$$
$$= \|\vec{u}\|^2$$

2e cas : $\boxed{\vec{u} = \vec{0}}$

$\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$ (par définition du produit scalaire de deux vecteurs)
Or $\|\vec{u}\|^2 = 0$ car $\|\vec{0}\| = 0$
Donc $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

4°) Cas particulier d'un vecteur défini par deux points

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}^{\,2} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} \text{ (définition)}$$
$$= \|\overrightarrow{AB}\|^2 \text{ (propriété du 2°)}$$
$$= AB^2 \text{ (car } \|\overrightarrow{AB}\| = AB\text{)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}^{\,2} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2}$$

carré scalaire du vecteur (domaine vectoriel) — **distance au carré (domaine métrique)**

V. Expression du produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal

Les propriétés de ce paragraphe permettent de ramener le calcul du produit scalaire de deux vecteurs au calcul du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires, calcul en général plus facile.

1°) Propriété

A, B, C sont trois points quelconques tels que A $\neq$ C.
On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
On a : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}$.

On remarquera que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \underbrace{\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}}_{\text{vecteurs colinéaires}}$$

Cette propriété fournit une autre expression du produit scalaire de deux vecteurs intéressante dans de nombreuses situations.

La propriété permet de ramener le calcul d'un produit scalaire de deux vecteurs à un produit scalaire de vecteurs colinéaires.

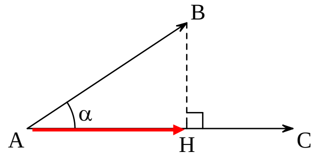
On garde le point A (« point d'attache ») et on remplace le point B par son projeté orthogonal sur (AC).

2°) Démonstration

On pose $\widehat{BAC} = \alpha$ ($\alpha \in [0\,;\pi]$).

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\alpha$$
$$= AB \times \cos\alpha \times AC$$

• **1er cas :** $\widehat{BAC}$ aigu



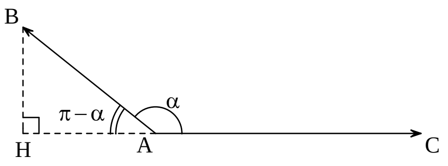
Dans ce cas, $H \in [AC)$.

$AH = AB \times \cos\alpha$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AH \times AC$

$\quad\quad = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}$ (car $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens)

• **2e cas :** $\widehat{BAC}$ obtus



Dans ce cas, H appartient à la demi-droite d'origine A de support (AC), ne contenant pas C.

$AH = AB \times \cos(\pi - \alpha)$

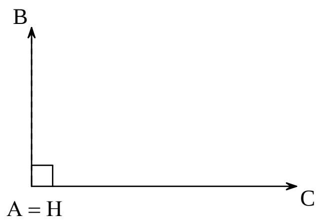
$AH = AB \times (-\cos\alpha)$

$AH = -AB \times \cos\alpha$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = -\, AH \times AC$

$\quad\quad = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}$ (car $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraires)

• **3e cas :** $\widehat{BAC}$ droit



$$\underbrace{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}_{\text{car } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}} = 0 = \underbrace{\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}}_{\text{car } \overrightarrow{AH} = \vec{0}}$$

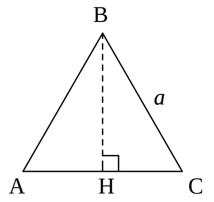
3°) Bilan sur les méthodes de calcul d'un produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} \\ \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

(expression utile quand on ne connaît pas les angles)

4°) Exercice

ABC est un triangle équilatéral de côté a.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes.



1ère méthode :

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

$\quad\quad = a^2 \times \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\quad\quad = \dfrac{a^2}{2}$

2e méthode :

On note H le projeté orthogonal de B sur (AC). On sait que H est le milieu de [AC].

Donc $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}$

$\quad\quad = AH \times AC$ (car $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens)

$\quad\quad = \dfrac{1}{2} AC \times AC$

$\quad\quad = \dfrac{a^2}{2}$

5°) Mise en garde

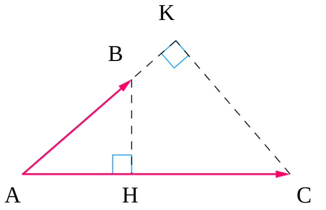
Remarques de calcul d'un produit scalaire :

• On peut remplacer un vecteur par un autre vecteur qui lui est égal.

• Attention, on ne peut pas projeter sur n'importe quelle droite du plan.
On ne peut projeter que sur 2 droites.
On n'a le droit de projeter que sur les droites formées par les vecteurs.

Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$, projection orthogonale possible sur la droite (AB) et (AC) (mais pas sur une autre droite).

A, B, C sont trois points tels que A $\neq$ B et A $\neq$ C.
On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) et K le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

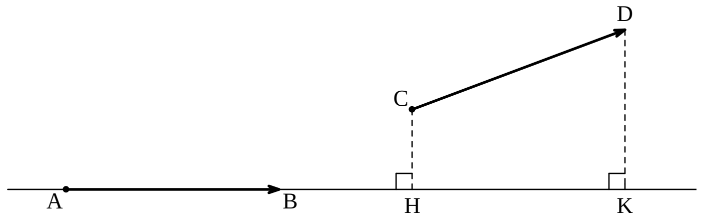


On a : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AK}$.

6°) Généralisation (projection complète)

• Propriété

A, B, C, D sont quatre points quelconques de P tels que A $\neq$ B.
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{HK}$



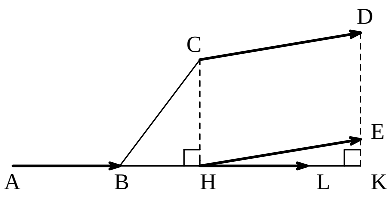
On peut remplacer $\overrightarrow{CD}$ par $\overrightarrow{HK}$ dans le scalaire (on ne dit pas que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HK}$).

Dès qu'on a deux points, on peut les faire « descendre » sur l'autre droite.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont des vecteurs colinéaires pas forcément de même sens.

• Démonstration

On considère le point L tel que $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{AB}$.
On considère le point E tel que $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{CD}$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{HL} \bullet \overrightarrow{HE} \\ &= \overrightarrow{HL} \bullet \overrightarrow{HK} \\ &= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{HK}\end{aligned}$$

VI. Bilinéarité du produit scalaire

1°) Propriétés

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs quelconques.
k est un réel quelconque.

P_1 : $\left(k\vec{u}\right) \bullet \vec{v} = k\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)$

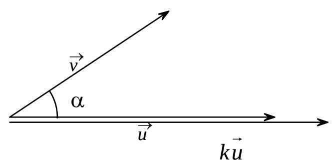
P_2 : $\vec{u} \bullet \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

2°) Démonstration de P_1

La propriété est évidente lorsque l'un au moins des deux vecteurs est nul ou (inclusif) $k = 0$.

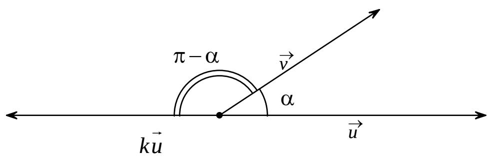
On suppose donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $k \neq 0$.
$\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \alpha$ ($\alpha \in [0\,;\pi]$)

• 1er cas : $\boxed{k > 0}$



$$\begin{aligned}\left(k\vec{u}\right) \bullet \vec{v} &= \left\| k\vec{u} \right\| \times \left\| \vec{v} \right\| \times \cos \alpha \\ &= |\,k\,| \left\| \vec{u} \right\| \times \left\| \vec{v} \right\| \times \cos \alpha \\ &= k \left\| \vec{u} \right\| \times \left\| \vec{v} \right\| \times \cos \alpha \\ &= k\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)\end{aligned}$$

• **2^e cas :** $\boxed{k<0}$

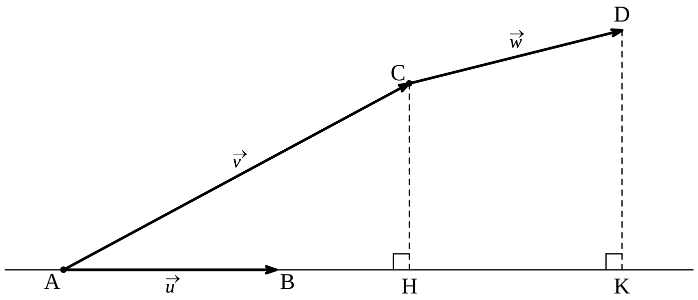


$$\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\left\|k\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\pi-\alpha\right)$$
$$=\left|k\right|\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\pi-\alpha\right)$$
$$=\left(-k\right)\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\left(-\cos\alpha\right)$$
$$=k\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\alpha$$
$$=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$

2°) Démonstration de P_2

La propriété est évidente lorsque $\vec{u}=\vec{0}$.

On suppose donc que $\vec{u}\neq\vec{0}$.
A et B sont deux points tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.
C est le point tel que $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.
D est le point tel que $\overrightarrow{CD}=\vec{w}$.
H : projeté orthogonal de C sur (AB).
K : projeté orthogonal de D sur (AB).



Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HK}=k\,\overrightarrow{AH}$.

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK}\quad(1)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\left(k\overrightarrow{AH}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+k\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\right)\quad\text{d'après } P_1$$
$$=\boxed{(1+k)}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\left[(1+k)\overrightarrow{AH}\right]$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\boxed{k\overrightarrow{AH}}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\underbrace{\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HK}}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK}\quad(2)$$

D'après (1) et (2), on a donc : $\boxed{\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}}$.

4°) Conséquences de P_1 et P_2

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ sont quatre vecteurs quelconques.
k et k' sont deux réels quelconques.

$$\left(k\vec{u}\right)\cdot\left(k'\vec{v}\right)=kk'\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$
$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}'+\vec{v}'\right)=\vec{u}\cdot\vec{u}'+\vec{u}\cdot\vec{v}'+\vec{v}\cdot\vec{u}'+\vec{v}\cdot\vec{v}'$$

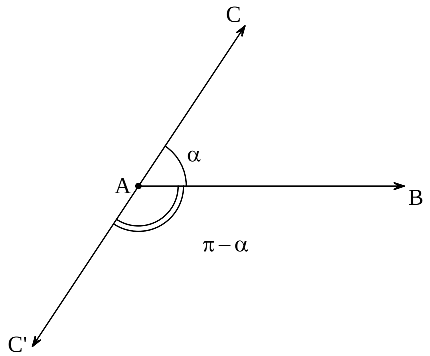
5°) Applications

• Calculs de produit scalaires par décomposition (voir exercices).

• Un cas particulier d'application de la propriété P_1 : $\vec{u}\cdot\left(-\vec{v}\right)=\left(-\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=-\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$.

• Un exemple pratique de mise en œuvre de la propriété P_1 :

A, B, C sont trois points tels que $A\neq B$ et $A\neq C$



$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CA} = -\, \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$

$AB \times AC \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CA}}\right)$

VII. Identités remarquables scalaires

1°) Formules

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$$
$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$$
$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$$

Normalement, on devrait écrire :

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right) + \vec{v}^{\,2}$$
$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right) + \vec{v}^{\,2}$$

2°) Démonstration (à savoir refaire)

Utilisation de la bilinéarité du produit scalaire.

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 &= \left(\vec{u}+\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\\ &= \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v}\\ &= \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^{\,2}\end{aligned}$$

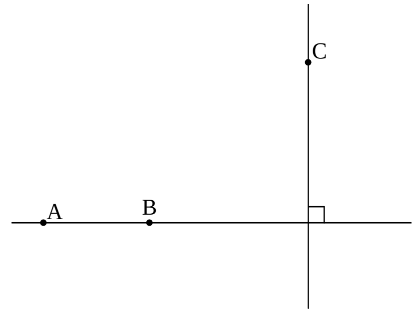
$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 &= \left(\vec{u}-\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u}-\vec{v}\right)\\ &= \vec{u} \bullet \vec{u} - \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v}\\ &= \vec{u}^{\,2} - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^{\,2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u}-\vec{v}\right) &= \vec{u} \bullet \vec{u} - \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} - \vec{v} \bullet \vec{v}\\ &= \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}\end{aligned}$$

VIII. Lieux géométriques d'orthogonalité

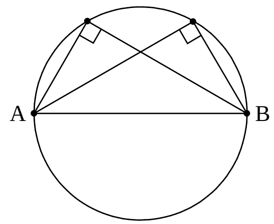
1°) A, B, C sont trois points tels que A ≠ B.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CM} = 0$ est la **droite** orthogonale à (AB) passant par C.



2°) A et B sont deux points tels que A ≠ B.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$ est le **cercle** de diamètre [AB].



3°) Application aux ensembles de points

Voir exercices

IX. Appendice 1 : révision de la propriété de 4e sur triangle rectangle et cercle

1°) Énoncés en « si …, alors … »

● Propriété directe

Formulation 1

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse.

Formulation 2

Si ABC est un triangle rectangle en C, alors son cercle circonscrit a pour diamètre [AB].

Formulation 3

Si ABC est un triangle rectangle en C, alors C appartient au cercle de diamètre [AB].

● Propriété réciproque (propriété de l'angle droit dans un cercle)

Formulation 1

A et B sont deux points distincts.

Si C appartient au cercle de diamètre [AB] et est distinct de A et B, alors le triangle ABC est rectangle en C.

Formulation 2

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, alors on obtient un angle droit.

Formulation 3

A et B sont deux points distincts.

Si M est un point du cercle de diamètre [AB] distinct de A et de B, alors l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.

Si M est un point du cercle de diamètre [AB] distinct de A et de B, alors le triangle AMB est rectangle en M.

2°) Création d'un seul énoncé en « si et seulement si »

Formulation 1

A et B sont deux points distincts.
M est un point distinct de A et B.

● Si M appartient au cercle de diamètre [AB], alors le triangle ABM est rectangle en M.

● Si le triangle ABM est rectangle en M, alors M appartient au cercle de diamètre [AB].

M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Formulation 2

A et B sont deux points distincts.
M est un point distinct de A et B.

● Si M appartient au cercle de diamètre [AB], alors l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.

● Si l'angle $\widehat{AMB}$ est droit, alors M appartient au cercle de diamètre [AB].

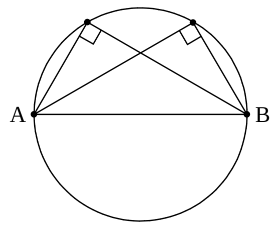
M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.

3°) Caractérisation d'un cercle comme ensemble de points

Caractérisation d'un cercle comme lieu géométrique

Lieu des points d'où l'on « voit » un diamètre sous un angle droit.

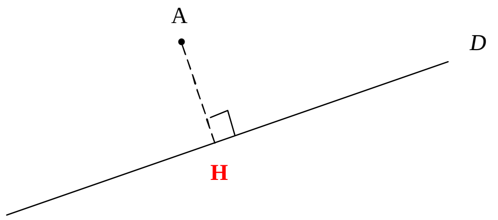
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ où A et B sont deux points tels que $A \neq B$ est le **cercle** de diamètre de diamètre [AB].



X. Appendice 2 : projeté orthogonal d'un point

1°) Définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite du plan

D est une droite.
A est un point du plan.
On appelle **projeté orthogonal** de A sur *D* le point H d'intersection de la droite *D* et de la droite passant par A et perpendiculaire à *D*.
La distance AH est appelée **distance du point A à la droite *D***.



2°) Caractérisation

Le projeté orthogonal d'un point A sur *D* est le point H de *D* défini par :

- H = A si $A \in D$;
- $(AH) \perp D$ si $A \notin D$.

XI. Appendice 3 : norme d'un vecteur

1°) Définition de la norme d'un vecteur

La **norme** d'un vecteur $\vec{u}$ est la longueur du vecteur $\vec{u}$.
La norme de $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$.

De manière évidente, on a : $\|\vec{u}\| \geqslant 0$.

2°) Cas particulier

$\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

3°) Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques du plan.
k est un réel quelconque.

$\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

$\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

4°) Expression de la norme dans un repère orthonormé

Voir chapitre des repères orthonormés

Appendice : démonstration du théorème de Pythagore à l'aide du produit scalaire

ABC est un triangle.

Démontrons que si ABC est rectangle en A, alors $\text{AB}^2+\text{AC}^2=\text{BC}^2$.

$$\begin{aligned}\text{BC}^2 &= \overrightarrow{\text{BC}}^2\\ &= \left(\overrightarrow{\text{AC}}-\overrightarrow{\text{AB}}\right)^2\\ &= \overrightarrow{\text{AC}}^2+\overrightarrow{\text{AB}}^2-2\underbrace{\left(\overrightarrow{\text{AB}}\bullet\overrightarrow{\text{AC}}\right)}_{0}\\ &= \text{AC}^2+\text{AB}^2\end{aligned}$$

Cette démonstration montre la puissance de l'outil « produit scalaire ».
Le produit scalaire permet de (re)démontrer de manière très courte et très simple le théorème de Pythagore.