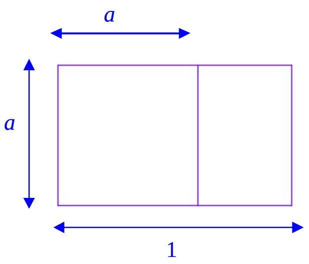
1ère S1

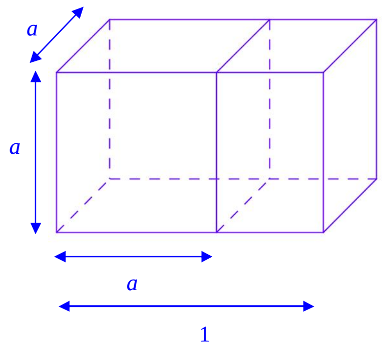
Devoir pour le lundi 5 mars 2012

I. Soit a un réel strictement positif.

1°) On suppose que $0 < a < 1$.
a) Expliquer pourquoi le rectangle et le carré de la première figure permettent d'illustrer l'inégalité $a^2 < a$.



b) Expliquer pourquoi la deuxième figure permet d'illustrer l'inégalité : $a^3 < a^2$.



2°) On suppose que $a > 1$.
En s'inspirant de ce qui précède, faire une illustration de l'inégalité $a^2 < a$ puis de l'inégalité $a^3 > a^2$.

On demande uniquement des figures sans aucune explication.

II. La suite de Fibonacci

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par les deux premiers termes $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Partie A (calculs)

1°) Recopier et compléter la phrase en utilisant le vocabulaire adapté :

« Chaque terme de la suite, sauf les …., s'obtient en … »

2°) Calculer « à la main » u_2, u_3, u_4, u_5.
Donner le détail des calculs uniquement pour u_2 et u_3.
Donner les autres résultats directement sans détailler les calculs.

Partie B (algorithme)

1°) Écrire en langage naturel un algorithme qui permet de calculer les seize premiers termes de cette suite.

- Écrire cet algorithme dans un cadre sur une seule page (il ne doit pas être écrit sur deux pages ; il ne doit pas y avoir de page à tourner).
- Indiquer clairement les différentes étapes de l'algorithme.
- Respecter les indentations éventuelles.

2°) Programmer cet algorithme sur la calculatrice et donner les valeurs de u_n pour $n \in \{2 ; 3 ; 4 ; \dots ; 15\}$.

Partie C (formule explicite)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
On note α et β les solutions de cette équation, avec $\alpha < \beta$.

2°) On admet que pour tout entier naturel n on a : $u_n = \lambda\ \alpha^n + \mu\ \beta^n$.
Déterminer les valeurs de λ et μ.

Partie D (facultative)

1°) Écrire en langage naturel un algorithme qui permet de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 1\,000$.
Programmer cet algorithme sur calculatrice et en déduire l'entier n cherché.

2°) Même question pour déterminer la somme des cinquante premiers termes.

Leonardo Fibonacci est né à Pise vers 1170, il est mort vers 1225. Il voyage en Égypte, Grèce et Syrie ; il y rencontre de nombreux scientifiques. Il publie vers 1200 un ouvrage « *Liber abbaci* » qui contient la plupart des résultats connus des Arabes en géométrie et arithmétique et sa célèbre suite. Vers 1220, il publie « *Practica geometriae* » dans lequel il recense toutes les connaissances de l'époque en géométrie et en trigonométrie.

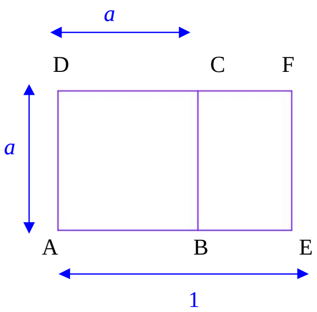
Corrigé du DM pour le 5 mars 2012

I. $a > 0$

On nomme des points en les plaçant sur la figure (on refait les figures).

1°) **$0 < a < 1$**

a)



$\mathcal{A}_{\text{ABCD}} = a^2$

$\mathcal{A}_{\text{EFGH}} = 1 \times a = a$

On observe que : $\mathcal{A}_{\text{ABCD}} < \mathcal{A}_{\text{EFGH}}$ donc $a^2 < a$.

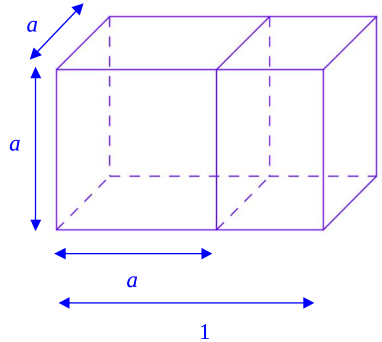
b)

Le volume du cube d'arête a est égal à a^3.

Le volume du parallélépipède est égal à $1 \times a \times a = a^2$.

On observe que le volume du cube est strictement inférieur au volume du parallélépipède.

On a donc $a^3 < a^2$.



2°) **$a > 1$**

$a^2 < a$

$a^3 > a^2$

II. La suite de Fibonacci

$$(u_n) \left| \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{array} \right.$$

Cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique (il n'y a pas de raison).

Partie A (calculs)

1°) On explique la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Chaque terme de la suite, sauf les deux premiers, s'obtient en faisant la somme des deux précédents.

2°) Calcul de u_2, u_3, u_4, u_5.

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 + u_1 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= u_1 + u_2 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$u_4 = 3$

$u_5 = 5$

Partie B (algorithme)

1°) Écrivons un algorithme qui permet de calculer les seize premiers termes de cette suite.

On utilise une « boucle Pour »

Variables :
a, *b*, *c*, *i* : nombres

Initialisation :
a prend la valeur 0
b prend la valeur 1

Traitement et sorties :
Pour *i* allant de 0 à 15 **Faire**
  c prend la valeur *a* + *b*
  Afficher *c*
  a prend la valeur de *b*
  b prend la valeur de *c*
FinPour

2°) On programme cet algorithme sur la calculatrice.

On peut alors donner les valeurs de u_n pour $n \in \{2\ ;3\ ;4\ ;\ldots\ ;15\}$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	1	2	3	5	8	13	21	34	45	79	124	203	282	485

Partie C (formule explicite)

1°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

On calcule le discriminant de cette équation.

$\Delta = 5$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet donc deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(on a bien $\alpha < \beta$).

2°) Déterminons les valeurs de λ et μ.

L'énoncé demande d'admettre que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda\ \alpha^n + \mu\ \beta^n$.

On applique cette relation pour $n = 0$ puis pour $n = 1$.

$\alpha^0 = 1,\ \beta^0 = 1$

On sait que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

On obtient le système : $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = 1 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire.

On va le résoudre par substitution.

La 1ère équation donne $\mu = -\lambda$.

En reportant dans la deuxième équation, on obtient $\lambda\,(\alpha - \beta) = 1$ d'où $\lambda = \dfrac{1}{\alpha - \beta}$.

Or $\alpha - \beta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

On en déduit que : $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Comme $\mu = -\lambda$, on a donc $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

On en déduit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$