$1^{\text{ère}}$ S

Exercices sur lignes trigonométriques d'un réel

1 Soit x un réel quelconque.
Calculer les expressions suivantes :
$A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$; $B=\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x$; $C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$.

Indication pour le calcul de l'expression C : Effectuer une factorisation de $\sin^4 x-\cos^4 x$.

2 Dans chaque cas, donner le signe de $\cos x$ et $\sin x$ en raisonnant graphiquement à l'aide du cercle trigonométrique.

a) $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ b) $x\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ c) $x\in\left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$

d) $x\in\left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$ e) $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ f) $x\in\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$

3 Calculer le cosinus et le sinus de $\frac{151\pi}{2}$.

4 Calculer le cosinus et le sinus de $-\frac{1975\pi}{6}$.

5 Calculer le cosinus et le sinus de $\frac{181\pi}{4}$.

6 Soit α le réel dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ tel que $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.
1°) Construire le point M, image de α sur le cercle trigonométrique.
2°) Calculer $\cos\alpha$.

7 Dans chaque cas, déterminer une relation entre les deux nombres
a) $\cos\frac{2\pi}{9}$ et $\cos\frac{7\pi}{9}$ b) $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5}$ c) $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

8 Soit x un réel quelconque. Calculer les expressions suivantes en détaillant toutes les étapes.
$A=\cos(5\pi+x)+\sin(5\pi-x)-\cos(7\pi+x)+\sin(7\pi+x)$ et $B=\cos(\pi-x)+\cos(5\pi+x)+2\cos(-x)$.

9 On donne $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{8}$.

10 Calculer, en regroupant astucieusement les termes, la somme $\mathrm{A}=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$.

11 Calculer, en regroupant astucieusement certains termes, l'expression
$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$.

12 Soit x un réel quelconque. Simplifier l'expression $A=\cos(17\pi+x)+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-\frac{11\pi}{2}\right)$.

13 Soit x un réel quelconque dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$.
À l'aide du cercle trigonométrique, donner le meilleur encadrement possible de $\cos x$. Faire une figure.

Dans les exercices **14** et **15**, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

---

14 On note M le point de coordonnées cartésiennes $(-4\,;4\sqrt{3})$.
Déterminer un système de coordonnées polaires de M en rédigeant.
Faire une figure en plaçant M au compas (en utilisant les coordonnées polaires trouvées précédemment).

15 On note M et N les points admettant pour systèmes de coordonnées polaires les couples respectifs $\left(3\,;-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\left(5\,;\frac{\pi}{3}\right)$.
1°) Construire M et N au compas.
2°) Démontrer que O, M, N sont alignés.
3°) Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

Corrigé

$\boxed{1}$ Calculs d'expressions trigonométriques

$A=2$; $B=1$; $C=1$

Cet exercice permet de comprendre que les identités remarquables ça marche aussi avec les sinus et les cosinus.

Solution détaillée :

Dans tout cet exercice, on utilise la relation fondamentale : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

$x\in\mathbb{R}$ quelconque

On peut rentrer dans la calculatrice les fonction $x\mapsto (\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$,
$x\mapsto \cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x$, $x\mapsto \sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$.

• Démarche pour A :

$A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

On développe les deux carrés avec les identités remarquables.

$A=(\cos x)^2+(\sin x)^2+2\cos x\times\sin x+(\cos x)^2+(\sin x)^2-2\cos x\times\sin x$

$A=\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1}+\cancel{2\cos x\times\sin x}+\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1}\cancel{-2\cos x\times\sin x}$

(avec les écritures simplifiées : $(\cos x)^2=\cos^2 x$ et $(\sin x)^2=\sin^2 x$)

$A=2$

Méthode :

1^er temps : On développe en utilisant les identités remarquables $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$ (développement « normal »).

2^e temps : On simplifie en utilisant la relation fondamentale $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

• Démarche pour B :

$B=\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x$

$B=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2$

$B=1^2$

$B=1$

• Démarche pour C :

$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$

$C=\left(\sin^2 x\right)^2-\left(\cos^2 x\right)^2+2\cos^2 x$

$C=\underbrace{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}_{1}\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+2\cos^2 x$

Petit complément pour la factorisation de $\sin^4 x-\cos^4 x$ qui peut bloquer les élèves.

Cela est en lien avec une factorisation de a^4-b^4 où a et b sont deux réels.

$a^4-b^4=\left(a^2\right)^2-\left(b^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)=(a+b)(a-b)\left(a^2+b^2\right)$

$C=\sin^2 x-\cos^2 x+2\cos^2 x$

$C=\sin^2 x+\cos^2 x$

$C=1$

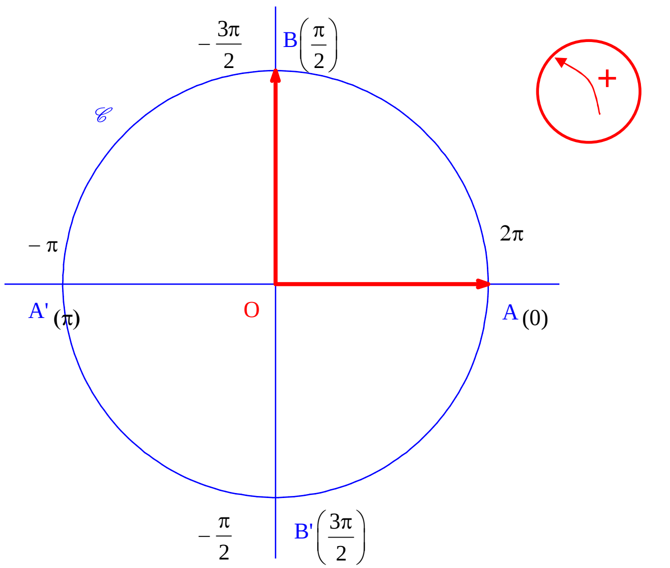
Avec XCas, on peut simplifier les expressions A, B, C.

$\boxed{2}$ Signe du cosinus et du sinus d'un réel

On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

Faire une figure.

On part du point A (associé au réel 0).



On procède quadrant par quadrant.

On rappelle la définition de 1ère S du cosinus et du sinus d'un réel.

Le cosinus et le sinus d'un réel x sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M du cercle trigonométrique associé à x.

Attention, la définition de 1ère est différente de celle de 3e (dans un triangle rectangle mais elles coïncident lorsque $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

• On tourne dans le **sens positif** en effectuant des quarts de cercle.

On rencontre successivement :

- le point B image de $\frac{\pi}{2}$
- le point A' image de π
- le point B' image de $\frac{3\pi}{2}$
- le point A image de 2π

etc

• On tourne dans le **sens négatif** en effectuant des quarts de cercle.

On rencontre successivement :

- le point B image de $-\frac{\pi}{2}$
- le point A' image de $-\pi$
- le point B' image de $-\frac{3\pi}{2}$
- le point A image de -2π

etc.

Sur la figure, on place les points A(1 ; 0), B(0 ; 1), A'(– 1 ; 0), B'(0 ; -1).

On note M l'image de x sur le cercle $\mathscr{C}$.

a) $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Par suite, l'abscisse de M est positive ou nulle et l'ordonnée de M est positive ou nulle. Donc $\cos x \geqslant 0$ et $\sin x \geqslant 0$.	b) $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{A'B}$ *. Par suite, l'abscisse de M est négative ou nulle et l'ordonnée de M est positive ou nulle. Donc $\cos x \leqslant 0$ et $\sin x \geqslant 0$.	c) $x \in \left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$. Par suite, l'abscisse de M est négative ou nulle et l'ordonnée de M est négative ou nulle. Donc $\cos x \leqslant 0$ et $\sin x \leqslant 0$.
d) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB'}$. Par suite, l'abscisse de M est positive ou nulle et l'ordonnée de M est négative ou nulle. Donc $\cos x \geqslant 0$ et $\sin x \leqslant 0$.	e) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB'}$. Par suite, l'abscisse de M est positive ou nulle et l'ordonnée de M est négative ou nulle. Donc $\cos x \geqslant 0$ et $\sin x \leqslant 0$.	f) $x \in \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$ donc M appartient à l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$. Par suite, l'abscisse de M est négative ou nulle et l'ordonnée de M est négative ou nulle. Donc $\cos x \leqslant 0$ et $\sin x \leqslant 0$.

* L'arc d'extrémités A' et B peut être noté $\overset{\frown}{A'B}$ ou $\overset{\frown}{BA'}$ (l'ordre des points n'a pas d'importance).
Il faut savoir retrouver très vite tous les résultats de cet exercice.

Étape 1 : Repérer l'arc sur le cercle trigonométrique correspondant à l'intervalle cité.
Étape 2 : Placer un point au hasard sur cet arc.
Étape 3 : Faire apparaître le cosinus sur l'axe des abscisses et le sinus sur l'axe des ordonnées.
Etape 4 : Repérer graphiquement le signe de cos x et sin x.
Étape 5 : Conclure à l'aide des signes $\geqslant$ et $\leqslant$ (exemples : $\cos x \geqslant 0$, $\sin x \geqslant 0$)
N.B. : attention, cos x et sin x peuvent être nuls ; ainsi $\cos x = 0$ ou $\sin x = 0$.

Version plus courte et plus complète :

a) $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$	b) $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ $-1 \leqslant \cos x \leqslant 0$ $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$	c) $x \in \left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ $-1 \leqslant \cos x \leqslant 0$ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 0$
d) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$ $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 0$	e) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 0$	f) $x \in \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$ $-1 \leqslant \cos x \leqslant 0$ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 0$

a) Lorsque $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x$ est compris entre 0 et 1 donc est positif ou nul et $\sin x$ est compris entre 0 et 1 donc est positif ou nul.

d) et e) Les intervalles $\left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$ et $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ correspondent au même arc.

$\boxed{3}$ Calculons le cosinus et le sinus de $\frac{151\pi}{2}$.

Recherche préalable au brouillon : $75 \times 2 < 151 < 76 \times 2$.

$\frac{151\pi}{2} = \frac{152\pi - \pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2 \times 38\pi$ (même démarche que pour une mesure principale)

$$\cos\frac{151\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2 \times 38\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\sin\frac{151\pi}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2 \times 38\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

On utilise la propriété : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Pour déterminer $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, on utilise le cercle trigonométrique.

Autrement dit, les valeurs de $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ peuvent être lues sur le cercle trigonométrique (et vérifiées sur calculatrice la mettant en mode radian ou en convertissant $-\frac{\pi}{2}$ en degrés).

L'image de $-\frac{\pi}{2}$ est le point B'. Son abscisse est 0 ; son ordonnée est – 1.

Calculatrice

On met la calculatrice en mode radian.

● TI-83 Plus.fr (bleue)

Pour $\cos\frac{151\pi}{2}$ (on tape cos(151π/2) on obtient l'affichage $1E-13$ qui correspond à 10^{-13}.

Pour $\sin\frac{151\pi}{2}$, on obtient l'affichage – 1.

C'est bizarre.
La calculatrice donne le résultat exact pour le sinus mais pour le cosinus.
Pour le cosinus, la calculatrice a du mal.
Pour le sinus, ça marche.

● TI-84 Plus

Pour $\cos\frac{151\pi}{2}$, on obtient l'affichage $3.41601E-8$.

Pour $\sin\frac{151\pi}{2}$, on obtient l'affichage – 1.

● Casio fx-92

Pour $\cos\frac{151\pi}{2}$, on obtient l'affichage 0 tout rond.

Pour $\sin\frac{151\pi}{2}$, on obtient l'affichage – 1 tout rond.

La calculatrice donne les deux résultats exacts.

On peut aussi vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice (attention à penser à se mettre en mode radians et non degré ; sinon, on peut se mettre en mode degré mais il faut convertir $-\frac{\pi}{2}$ en degrés c'est-à-dire – 90 °).

$\boxed{4}$ Calculons le cosinus et le sinus de $-\frac{1975\pi}{6}$.

Recherche préalable au brouillon : $-1980<-1975<-1974$ soit $-6\times330<-1975<-6\times329$

$$-\frac{1975\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}-165\times2\pi$$

$$\cos\left(-\frac{1975\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}-165\times2\pi\right)=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{1975\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}-165\times2\pi\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

On utilise le cosinus et le sinus de $\frac{5\pi}{6}$ (valeurs remarquables données dans le cours, à connaître par cœur).

On vérifie les résultats à l'aide de la calculatrice.

$\boxed{5}$ Calculons le cosinus et le sinus de $\frac{181\pi}{4}$.

Recherche préalable au brouillon : $180<181<184$ soit $4\times45<181<4\times46$.

$$\frac{181\pi}{4}=23\times2\pi-\frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\frac{181\pi}{4}=\cos\left(23\times2\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{181\pi}{4}=\sin\left(23\times2\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comment fait-on pour $-\frac{3\pi}{4}$?

Deux démarches possibles :

- soit on utilise le cercle trigonométrique en plaçant les valeurs des angles associés à $\frac{\pi}{4}$;

- soit on utilise les relations donnant le cosinus et le sinus de – *x* en fonction du cosinus et du sinus de *x*.

On vérifie les résultats à l'aide de la calculatrice.

$\boxed{6}$

$\alpha\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ $\sin\alpha=\frac{3}{5}$

1°) **Plaçons le point M, image de α, sur le cercle trigonométrique.**

On sait que $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc $M\in\overset{\frown}{A'B}$ (car l'image du réel $\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est le point B ; l'image du réel π sur le cercle trigonométrique est le point A').

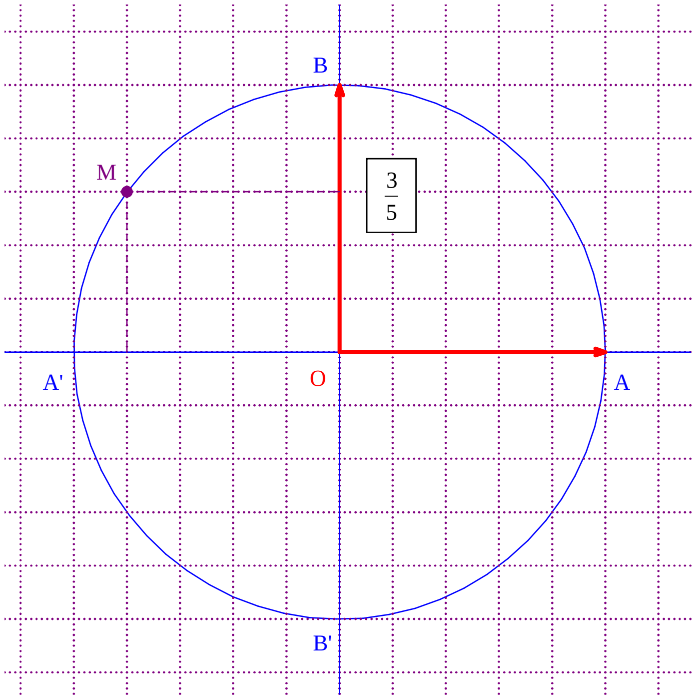
On fait une figure.

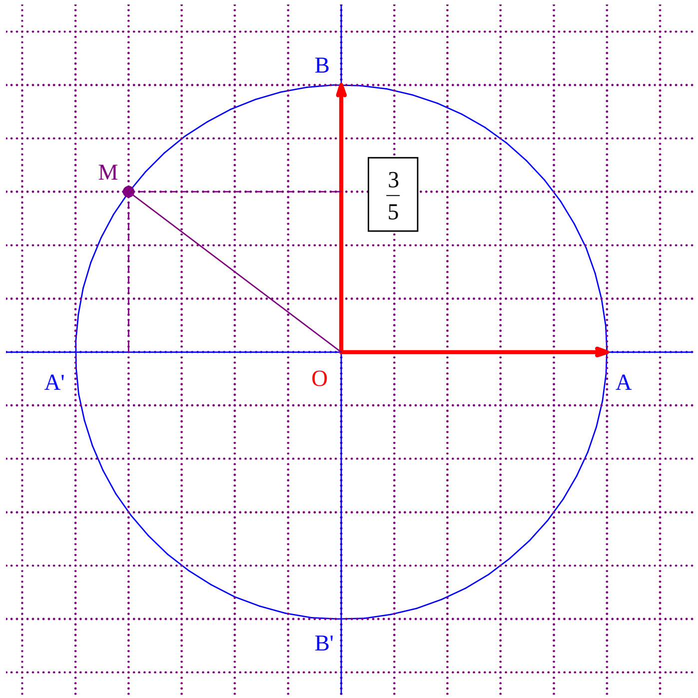
Pour plus de commodité, on trace un cercle trigonométrique de rayon 5 cm ou 5 « gros » carreaux.

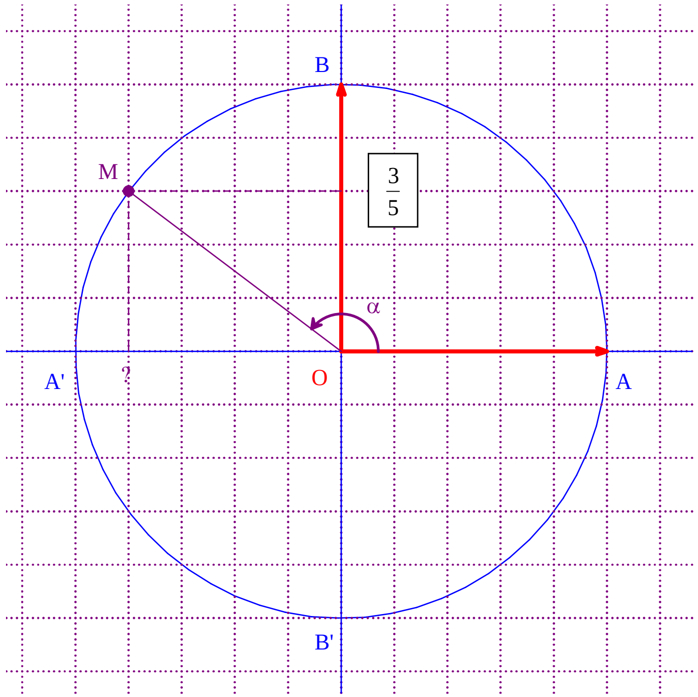
On n'utilise pas le rapporteur car $\frac{3}{5}$ n'est pas une valeur remarquable.

On place le point de la droite (OB) (axe des ordonnées) qui a pour ordonnée $\frac{3}{5}$.

On trace la parallèle à l'axe (OA) passant par ce point.
Cette droite coupe le cercle trigonométrique en deux points.


B
M
3
5
A'
O
A
B'


B
M
3
5
A'
O
A
B'


B
M
3
5
α
A'
?
O
A
B'

M est le point du cercle trigonométrique situé sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ qui a pour ordonnée $\frac{3}{5}$.

2°) **Calculons cos α.**

D'après la relation fondamentale, on a : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

D'où $\cos^2\alpha+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$

soit $\cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}$

ce qui donne $\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$

D'où $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ ou $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

Or $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$. Donc $\cos\alpha\leqslant 0$ (cf. exercice $\boxed{2}$).

D'où $\boxed{\cos\alpha=-\frac{4}{5}}$.

Bilan :

Étape 1 : Placer le point M en fonction de son ordonnée et de son intervalle (arc) ; placer sin α.
Étape 2 : Faire apparaître cos α.
Étape 3 : Appliquer la relation fondamentale $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.
Étape 4 : Résoudre
Étape 5 : Conclure

Ne pas oublier qu'une équation du type $x^2=a$ où a est un réel strictement positif admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

Le choix de l'une des deux solutions dépend de l'emplacement de cos α sur le graphique.

Avec la calculatrice (mise en mode radian), on trouve $\alpha=2,49809154\ldots$.

Avec la calculatrice (mise en mode degré), on trouve $\widehat{AOM}=143,130102\ldots\ °$.

Commentaires :

À propos de l'égalité : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

- On ne peut pas enlever le α (l'égalité $\cos^2+\sin^2=1$ n'a pas de sens).
- On ne peut pas remplacer α par une valeur.
- On peut juste remplacer sin α par $\frac{3}{5}$.

$\boxed{7}$ a) $\cos\frac{2\pi}{9}=-\cos\frac{7\pi}{9}$ b) $\cos\frac{\pi}{5}=-\cos\frac{6\pi}{5}$ c) $\cos\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}$.

Solution détaillée :

a) **Relation entre les nombres $\cos\frac{2\pi}{9}$ et $\cos\frac{7\pi}{9}$**

$\cos\frac{2\pi}{9}=\cos\left(\pi-\frac{7\pi}{9}\right)=-\cos\frac{7\pi}{9}$ (on utilise la propriété $\cos(\pi-x)=-\cos x$)

Autre façon :

$\cos\frac{7\pi}{9}=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{9}\right)=-\cos\frac{2\pi}{9}$

b) **Relation entre les nombres $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5}$**

$$\cos\frac{\pi}{5}=\underbrace{\cos\left(\frac{6\pi}{5}-\pi\right)=\cos\left[-\left(\frac{6\pi}{5}-\pi\right)\right]}_{\cos(-x)=\cos x}=\underbrace{\cos\left(\pi-\frac{6\pi}{5}\right)=-\cos\frac{6\pi}{5}}_{\cos(\pi-x)=-\cos x}$$

Autre façon :

$\cos\frac{6\pi}{5}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\frac{\pi}{5}$

c) **Relation entre les nombres $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$**

On observe aisément que $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$. Par suite, on a : $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$.

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}}_{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x}$$

On peut aussi utiliser un graphique (faire un graphique dans chaque cas).

$\boxed{8}$ Simplifications d’expressions trigonométriques

Réponses :

$A=0$ et $B=0$

Solutions détaillée :

$A=\cos(5\pi+x)+\sin(5\pi-x)-\cos(7\pi+x)+\sin(7\pi+x)$

$A=\cos(4\pi+\pi+x)+\sin(4\pi+\pi-x)-\cos(6\pi+\pi+x)+\sin(6\pi+\pi+x)$ (étape à écrire obligatoirement)

$A=\cos(\pi+x)+\sin(\pi-x)-\cos(\pi+x)+\sin(\pi+x)$

$A=-\cos x+\sin x-(-\cos x)-\sin x$ (on applique les propriétés du cours)

$A=-\cos x+\sin x+\cos x-\sin x$

$\boxed{A=0}$

Commentaire sur le passage des trois premières lignes :

$A=\cos(5\pi+x)+\sin(5\pi-x)-\cos(7\pi+x)+\sin(7\pi+x)$

$A=\cos(4\pi+\pi+x)+\sin(4\pi+\pi-x)-\cos(6\pi+\pi+x)+\sin(6\pi+\pi+x)$

$A=\cos(\pi+x)+\sin(\pi-x)-\cos(\pi+x)+\sin(\pi+x)$

Commentaire sur le passage de la 1ère ligne à la 2e ligne :
Pour le $\sin(7\pi+x)$, on pourrait aussi écrire $7\pi=8\pi-\pi$ mais c’est moins simple pour la suite.

Commentaire sur le passage de la 2e à la 3e ligne :

« On peut supprimer les 2π (ou plutôt les multiples entiers de 2π) ».
(D’une certaine manière, on peut dire que les 2π « s’évanouissent »).

$B=\cos(\pi-x)+\cos(5\pi+x)+2\cos(-x)$

$B=\cos(\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+2\cos(-x)$

$B=-\cos x+\cos(\pi+x)+2\cos x$

$B=-\cos x-\cos x+2\cos x$

$\boxed{B=0}$

$\boxed{9}$ $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Solution détaillée :

$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Calculons $\sin\frac{\pi}{8}$.

D’après la relation fondamentale, on a : $\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$.

On en déduit que $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$

D’où : $\frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}{4}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$ (le carré fait « exploser » la racine carrée au numérateur ; principe d’explosion d’une racine carrée sous l’effet d’un carré) soit $\frac{2+\sqrt{2}}{4}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$.

On a donc :

$\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{4-(2+\sqrt{2})}{4}$

$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Or $\frac{\pi}{8}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $\sin\frac{\pi}{8}\geqslant 0$.

On en déduit que $\boxed{\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$.

$\boxed{10}$ $A=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$

Cet exercice porte sur l’utilisation des formules de trigonométrie.

Cette somme apparaît incalculable à première vue (car il n’y a pas de règle de « mise en facteur » de cos et l’on ne connaît pas les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$ …).
On transforme un certain nombre de termes.
On simplifie de manière à calculer.

Solution fausse :

On regroupe tout dans un même cosinus.

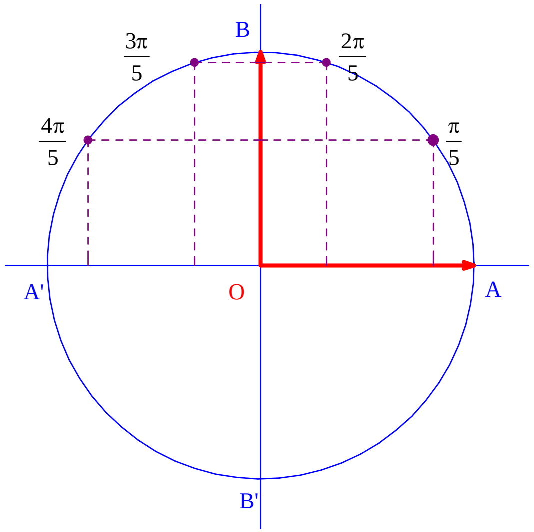
$A=\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}\right)=\cos(2\pi)=1$

On obtient un résultat faux.
Il n’y a pas de règle qui dit que $\cos a+\cos b=\cos(a+b)$.

Solution juste :

On peut placer sur un cercle trigonométrique les images des réels $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$.

On observe alors que les points sont deux à deux symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (les points images sont « disposés » de part et d'autre de l'axe (Oy)).



Il y a des symétries qui vont se traduire « au niveau des abscisses » (puisque ce sont les cosinus qui nous intéressent).
« Ça va se compenser » (Antoine Baubion, 1ère S1, le 2-2-2015).

On va ainsi pouvoir faire la démonstration.

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}$ (on utilise la règle : $\cos(\pi-x)=-\cos x$)

$A=0$

On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

Bilan sur les calculs de sommes de cosinus et de sinus :

- Si on peut remplacer tous les termes par leurs valeurs, on fait le calcul.

- Si on ne peut pas, on passe par le cercle trigonométrique. On utilise les formules de trigonométrie.

Autre manière de dire :

Bilan sur les calculs de sommes de cosinus et de sinus :

- Si on peut les calculer, on fait le calcul.

- Sinon, on regroupe etc.

11 $A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

Calculons A.

Pour commencer, une remarque sur les notations : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\neq\cos\frac{\pi^2}{64}$.

On va commencer par regarder deux solutions fausses.

On verra ensuite la solution juste.

On ne connaît pas les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8}$.

La somme paraît incalculable à première vue.

Une première solution fausse (mais tentante) :

On regroupe tout dans un même cosinus.

$A=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}\right)=\cos^2(2\pi)=1$

On obtient un résultat faux.

Une deuxième solution fausse (mais tentante) :

$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$A=0$

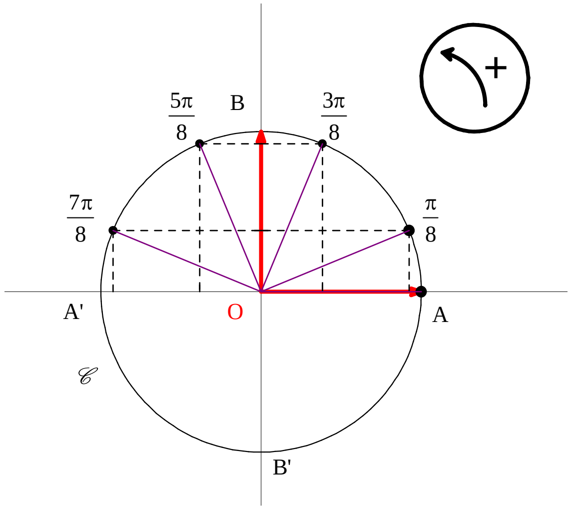
Où se situe la faute ?

Dans la solution fausse, l'erreur se situait avec les – et les carrés.
La notation $\cos^2 x$ est pratique mais peut s'avérer dangereuse si l'on en connaît mal la signification.

Ainsi $\cos^2(\pi-x)=\left[\cos(\pi-x)\right]^2=(-\cos x)^2=\cos^2 x$.

On ne peut pas écrire $\cos^2(\pi-x)=-\cos^2 x$.

Solution juste :



$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2$$

$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2$$ (on devrait mettre des parenthèses partout pour harmoniser les notations)

$$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$$

$$A=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$$ (on écrit $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$)

$$A=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right]^2$$

$$A=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$A=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$A=2\left(\underbrace{\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}}_{1}\right)$$

$$A=2\times1$$

$$A=2$$

$\boxed{12}$ **Simplification d'une expression trigonométrique**

$A=-\cos x$

Solution détaillée (avec détail de la démarche étape par étape) :

$$A=\cos(17\pi+x)+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-\frac{11\pi}{2}\right)$$

$$A=\cos(2\pi\times8+\pi+x)+\sin\left(\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-\frac{12\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A=\cos(\pi+x)+\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-6\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A=-\cos x+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A=-\cos x+\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]+\cos x$$

$$A=-\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos x$$

$$A=-\cos x\cancel{-\cos x}\cancel{+\cos x}$$

$$A=-\cos x$$

$\boxed{13}$

Solution détaillée :

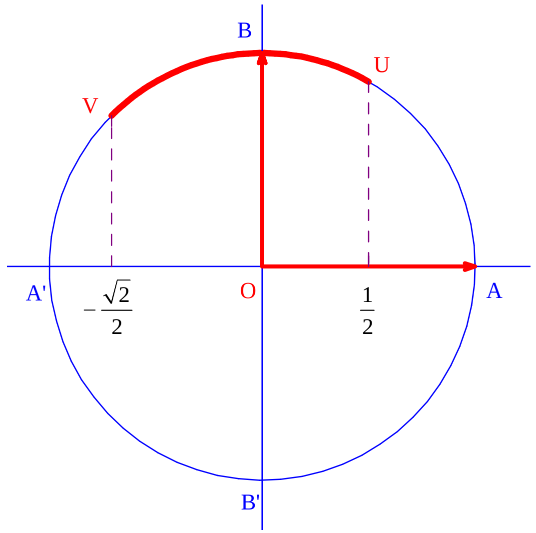
$$\boldsymbol{x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{4}\right]}$$

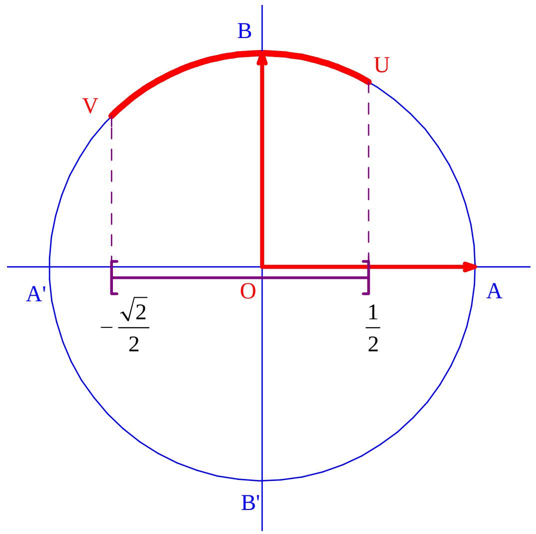
Donnons le meilleur encadrement possible de cos *x*.

Méthode : On trace un cercle trigonométrique.

Sur ce cercle, on place les points U et V, images respectives des réels $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

On trace l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{UV}}$ en rouge.





La construction des points U et V s'effectue facilement au compas.

Le point U est l'un des points d'intersection du cercle trigonométrique et du cercle de centre A et de rayon 1.

La demi-droite [OV) est la bissectrice de l'angle $\widehat{A'OB}$.
On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{A'OB}$.

On regarde ensuite en abscisse le maximum et le minimum.

Il n'y a pas d'autre méthode.

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ et $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

On a donc : $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant \cos x\leqslant\frac{1}{2}$.

14 Le point M admet le couple $\left(8\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right)$ pour système de coordonnées polaires.

On peut ensuite placer le point M (on trace d'abord le cercle de centre O et de rayon 8).

15

1°)

2°) On détermine une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$.

La relation de Chasles permet d'écrire : $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)=\left(\overrightarrow{OM}, \vec{i}\right)+\left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$.

Ce résultat permet de dire que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires (de sens contraires).
Donc les points O, M, N sont alignés.

3°)

$\left\|\overrightarrow{ON}\right\|=\left\|k\overrightarrow{OM}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{ON}\right\|=|\,k\,|\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$

$ON=|\,k\,|\times OM$

$5=|\,k\,|\times 3$

$|\,k\,|=\frac{5}{3}$

Or les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires et de sens contraires donc $k<0$.

Donc $-k=\frac{5}{3}$

On obtient donc $k=-\frac{5}{3}$.